Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2015. Том 56, № 1

УДК 512.54

НОВАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП

М. Ф. Гасемабади,
А. Иранманеш, Ф. Мавадатпур

Аннотация. Пусть G — конечная группа. Элемент группы G, обращающийся в нуль, — это элемент $g \in G$ такой, что $\chi(g) = 0$ для некоторого неприводимого комплексного характера $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ группы G. Пусть $\mathrm{Vo}(G)$ — множество порядков элементов группы G, обращающихся в нуль. Конечная группа G называется VCP-*группой*, если каждый элемент в $\mathrm{Vo}(G)$ есть степень простого числа. Исследована новая характеризация всех конечных неабелевых простых VCP-групп, связанная с множеством $\mathrm{Vo}(G)$. Показано, что если G — конечная группа и M — конечная неабелева простая VCP-группа такая, что $\mathrm{Vo}(G) = \mathrm{Vo}(M)$ и $|G| = |M|$, то $G \cong M$.

Ключевые слова: простая конечная группа, нули характеров.

1. Введение

Пусть G — конечная группа. *Элемент* группы G, *обращающийся в нуль*, — это такой элемент $g \in G$, что $\chi(g) = 0$ для некоторого неприводимого комплексного характера $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ группы G. Обозначим символом $\mathrm{Van}(G)$ множество элементов группы G, обращающихся в нуль, а символом $\mathrm{Vo}(G)$ — множество порядков элементов в $\mathrm{Van}(G)$. Согласно [1, 2] множество $\mathrm{Vo}(G)$ может дать некоторую информацию о структуре конечной группы G. Например, теорема C из [3] как усиление следствия 3 из [2] утверждает, что если p — простой делитель $|G|$ и в G нет элементов, обращающихся в нуль, порядка, делящегося на p, то в G имеется нормальная силовская p-подгруппа. Также в [4] показано, что если G — конечная группа такая, что $\mathrm{Vo}(G) = \mathrm{Vo}(A_5)$, то $G \cong A_5$, т. е. знакопеременная группа A_5 характеризуется множеством порядков своих элементов, обращающихся в нуль. В связи с этим результатом можно задать следующий

Вопрос. *Верно ли, что все конечные неабелевы простые группы характеризуемы множеством порядков элементов, обращающихся в нуль?*

Ответ на этот вопрос в общем случае отрицателен. Например, для простой линейной группы $L_3(5)$ имеем $\mathrm{Vo}(L_3(5)) = \mathrm{Vo}(\mathrm{Aut}(L_3(5)))$, но $L_3(5) \ncong \mathrm{Aut}(L_3(5))$, так как $|L_3(5)| \neq |\mathrm{Aut}(L_3(5))|$. Однако, исследовав группы одного и того же порядка, можем выдвинуть следующую гипотезу.

Работа частично поддержана Центром мастерства в области алгебраических гиперструктур и их приложений Университета Тарбиат Модарес (CEAHA). Также авторы были частично поддержаны Иранским национальным научным фондом (INSF) (код проекта 91058621).

Гипотеза. *Пусть G — конечная группа, и пусть M — конечная неабелева простая группа. Если* $\mathrm{Vo}(G) = \mathrm{Vo}(M)$ *и* $|G| = |M|$, *то* $G \cong M$.

На самом деле идея добавления условия, что все группы имеют один и тот же порядок, восходит к известной гипотезе Ши, которая звучит следующим образом. *Спектром* $\omega(G)$ *конечной группы* G называется множество порядков элементов группы G. Гипотеза Ши (вопрос 12.39 в [5]) утверждает, что всякая конечная простая группа однозначно определяется своим спектром и порядком в классе всех групп.

Гипотеза Ши. *Пусть G — конечная группа, и пусть M — конечная простая группа. Тогда $G \cong M$ тогда и только тогда, когда $|G| = |M|$ и $\omega(G) = \omega(M)$.*

В ряде статей доказано, что эта гипотеза верна для большинства конечных простых групп, более того, в [6] показано, что гипотеза Ши верна для всех конечных простых групп.

Конечная группа G называется VCP-*группой*, если каждый элемент множества $\mathrm{Vo}(G)$ есть степень простого числа. Ввиду [4, лемма 2.4] и того факта, что $\mathrm{Vo}(A_7) = \{3, 4, 5, 7\}$, конечная неабелева простая VCP-группа изоморфна одной из групп $L_2(q)$, где $q \in \{5, 7, 8, 9, 17\}$, $L_3(4)$, A_7, $Sz(8)$ и $Sz(32)$. Имеющийся результат для знакопеременной группы A_5 в [4] стал мотивацией для доказательства того, что наша гипотеза верна для всех конечных неабелевых простых VCP-групп. Основной целью работы является доказательство следующей теоремы.

Основная теорема. *Пусть G — конечная группа, и пусть M — одна из конечных простых групп $L_2(q)$, где $q \in \{5, 7, 8, 9, 17\}$, $L_3(4)$, A_7, $Sz(8)$ и $Sz(32)$. Если $\mathrm{Vo}(G) = \mathrm{Vo}(M)$ и $|G| = |M|$, то $G \cong M$.*

2. Обозначения и предварительные результаты

В настоящей работе будем использовать следующие обозначения: (m, n) и $[m, n]$ обозначают наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное целых чисел m и n соответственно. Для конечной группы G символом $\pi(G)$ будет обозначаться множество всех простых делителей порядка $|G|$. Пусть также $\mathrm{Sol}(G)$ — разрешимый радикал группы G. Все обозначения, используемые ниже без объяснения, стандартны и могут быть найдены, например, в [7].

Структура конечных неразрешимых VCP-групп была найдена в [4, теорема A]. Поскольку $\mathrm{Vo}(A_7) = \{3, 4, 5, 7\}$, очевидно, что простая группа A_7 в этой теореме пропущена. Сформулируем исправленную версию этой теоремы, которую будем использовать в доказательстве основной теоремы. Заметим, что в этой теореме M_{10} обозначает единственную VCP-подгруппу индекса 2 в группе $\mathrm{Aut}(L_2(9))$, а под CP-группой имеем в виду конечную группу G такую, что каждый элемент в $\mathrm{Vo}(G)$ — простое число.

Теорема 2.1. *Пусть G — конечная неразрешимая* VCP-*группа. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $\mathrm{Sol}(G) = 1$, то группа G изоморфна одной из следующих групп:*

$$L_2(q),\ q = 5, 7, 8, 9, 17, \quad L_3(4), Sz(8), Sz(32), A_7, M_{10}.$$

2. *Предположим, что $\mathrm{Sol}(G) > 1$. Пусть для некоторого простого числа p группа $N := O^p(\mathrm{Sol}(G))$ такова, что $\mathrm{Sol}(G)/N > 1$. Тогда либо $G/\mathrm{Sol}(G) \cong A_7$, либо $p = 2$, G/N —* CP-*группа и выполнено одно из следующих утверждений:*

(a) *группа* $\mathrm{Sol}(G)/N$ *элементарная абелева, а группа* $G/\mathrm{Sol}(G)$ *изоморфна группе* $L_2(5)$*;*

(b) *группа* $\mathrm{Sol}(G)/N$ *абелева, а группа* $G/\mathrm{Sol}(G)$ *изоморфна* $L_2(8)$*;*

(c) *группа* $\mathrm{Sol}(G)/N$ *нильпотентна ступени не выше* 6, *а группа* $G/\mathrm{Sol}(G)$ *изоморфна* $Sz(8)$ *или* $Sz(32)$.

Одним из ключевых утверждений для доказательства основной теоремы является результат Долфи и др. [3] об «обращающемся в нуль» графе простых чисел конечной группы и его связи с графом Грюнберга — Кегеля. По этой причине напомним требуемые определения. Для конечного множества положительных целых чисел X *граф простых чисел* $\Pi(X)$ определяется как простой ненаправленный граф, вершинами которого являются простые числа p такие, что существует элемент множества X, делящийся на p, и две различные вершины p, q являются смежными тогда и только тогда, когда существует элемент из X, делящийся на pq. Для конечной группы G граф $\Pi(\omega(G))$, который обозначаем символом $GK(G)$, также известен под названием *графа Грюнберга — Кегеля группы* G. Граф простых чисел $\Pi(\mathrm{Vo}(G))$, который в данной статье обозначается через $\Gamma(G)$, называется *обращающимся в нуль* графом простых чисел группы G. Следующая лемма описывает некоторые свойства обращающегося в нуль графа простых чисел конечной группы и его связь с графом Грюнберга — Кегеля. Отметим, что $n(\mathscr{G})$ означает число связных компонент графа $\mathscr{G}$.

Лемма 2.2 [3, 8]. *Пусть* G *— конечная группа.*

(1) *Если группа* G *разрешима, то граф* $\Gamma(G)$ *имеет не более двух связных компонент.*

(2) *Если группа* G *неразрешима и граф* $\Gamma(G)$ *несвязен, то* G *имеет единственный неабелев композиционный фактор* S *и* $n(\Gamma(G)) \leq n(GK(S))$, *если только* G *не изоморфна* A_7.

Пусть p — простое число. Говорят, что характер χ из $\mathrm{Irr}(G)$ *имеет нулевой p-дефект*, если p не делит $|G|/\chi(1)$. Согласно фундаментальному результату Брауэра [9, теорема 8.17] если $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ имеет нулевой p-дефект, то для каждого элемента $g \in G$ такого, что p делит $o(g)$, имеем $\chi(g) = 0$. Следующая лемма показывает, что очень часто неабелева простая группа имеет неприводимые характеры нулевого p-дефекта для каждого простого p.

Лемма 2.3 [2, предложение 2.1]. *Пусть* M *— неабелева простая группа, и пусть* p *— простое число. Если группа* M *лиевского типа или* $p \geq 5$, *то существует характер* $\chi \in \mathrm{Irr}(M)$ *нулевого* p*-дефекта.*

В следующей лемме собраны некоторые факты, связанные с неприводимыми характерами нулевого p-дефекта нормальной подгруппы или факторгруппы.

Лемма 2.4. *Пусть* G *— конечная группа, и пусть* N *— нормальная подгруппа в* G.

(1) *Если* $p \in \pi(N)$ *и* N *имеет неприводимый характер нулевого* p*-дефекта, то всякий элемент в* N *порядка, делящегося на* p, *является элементом группы* G, *обращающимся в нуль.*

(2) *Если* $p \in \pi(G/N)$, $(|N|, p) = 1$ *и у группы* G/N *есть неприводимый характер нулевого* p*-дефекта, то* G *также имеет неприводимый характер нулевого* p*-дефекта.*

Доказательство. Утверждение (1) есть лемма 2.7 из [3]. Далее, поскольку неприводимые характеры группы G/N можно рассматривать как неприводимые характеры группы G, ядро которых содержит N, доказательство утверждения (2) получается непосредственно. $\square$

Следующая лемма, которую легко доказать с использованием таблицы характеров прямого произведения групп и строения неприводимых характеров фактор-группы, необходима для доказательства основной теоремы.

Лемма 2.5. *Пусть G — конечная группа.*

(1) *Если $G = H \times K$, то $\mathrm{Vo}(G) = \{[m,n] \mid m \in \mathrm{Vo}(H),\ n \in \omega(K)\} \cup \{[m,n] \mid m \in \omega(H),\ n \in \mathrm{Vo}(K)\}$.*

(2) *Если N — нормальная подгруппа группы G и $m \in \mathrm{Vo}(G/N)$, то существует целое число n такое, что $mn \in \mathrm{Vo}(G)$.*

3. Доказательство основной теоремы

Известно, что $\mathrm{Vo}(G) = \mathrm{Vo}(M)$ и $|G| = |M|$, где M — одна из простых групп $L_2(q)$, $q \in \{5,7,8,9,17\}$, $L_3(4)$, A_7, $Sz(8)$ и $Sz(32)$. Используя [7], соберем порядки $|M|$ и $\mathrm{Vo}(M)$ в табл. 1.

Таблица 1

M	$\mathrm{Vo}(M)$	$\|M\|$
$L_2(5)$	$\{2,3,5\}$	$2^2.3.5$
$L_2(7)$	$\{2,3,4,7\}$	$2^3.3.7$
$L_2(8)$	$\{2,3,7,9\}$	$2^3.3^2.7$
$L_2(9)$	$\{2,3,4,5\}$	$2^3.3^2.5$
$L_2(17)$	$\{2,3,4,8,9,17\}$	$2^4.3^2.17$
$L_3(4)$	$\{2,3,4,5,7\}$	$2^6.3^2.5.7$
A_7	$\{3,4,5,7\}$	$2^3.3^2.5.7$
$Sz(8)$	$\{2,4,5,7,13\}$	$2^6.5.7.13$
$Sz(32)$	$\{2,4,5,25,31,41\}$	$2^{10}.5^2.31.41$

В силу следствия 4.1 из [4] и леммы 2.2(1) группа $M = L_2(5)$ характеризуется множеством $\mathrm{Vo}(M)$ и, следовательно, $G \cong M$. Далее, если $M = L_3(4)$, то $n(\Gamma(G)) = 4$, и потому из леммы 2.2 следует, что G имеет единственный неабелев композиционный фактор S такой, что

$$n(GK(S)) \geq n(\Gamma(G)) = 4. \tag{3.1}$$

Таким образом, $|\pi(S)| \geq 4$, и так как S — простая группа и $|S|$ делит $|G|$, ввиду [10] S изоморфна одной из групп $A_7, A_8, L_3(4)$. Но $\omega(A_7) = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ и $\omega(A_8) = \omega(A_7) \cup \{15\}$, откуда $n(GK(A_8)) < n(GK(A_7)) = 3$. Тем самым в силу (3.1) можем заключить, что $S \cong L_3(4)$, откуда $G \cong L_3(4)$.

Для остальных случаев будем использовать теорему 2.1. Так как $\mathrm{Vo}(G) = \mathrm{Vo}(M)$, из табл. 1 имеем $n(\Gamma(G)) \geq 3$ и из леммы 2.2(1) следует, что G — неразрешимая VCP-группа. Пусть $K = \mathrm{Sol}(G)$. Если $K = 1$, то ввиду $|G| = |M|$ легко заключаем, что $G \cong M$. Поэтому для завершения доказательства основной теоремы достаточно получить противоречие для случая $K > 1$, где $G/K \cong L_2(5), L_2(8), A_7, Sz(8), Sz(32)$. Пусть $M = L_2(7)$. Поскольку $\{5,9\} \cap \mathrm{Vo}(G/K) \neq \varnothing$, в силу $\mathrm{Vo}(L_2(7))$ и леммы 2.5(2) легко приходим к противоречию. Тем же способом легко убеждаемся, что если M — одна из групп $L_2(8)$, $L_2(17)$, $Sz(8)$,

$Sz(32)$, то $G/K \cong M$, и потому из $|G| = |M|$ вытекает, что $K = 1$; противоречие. Для удобства опускаем детали. Таким образом, остается рассмотреть случаи $M = L_2(9)$ и $M = A_7$. Разберем их отдельно.

Случай 1. Пусть $M = L_2(9)$. Если $G/K \not\cong L_2(5)$, то $\{7, 31\} \cap \mathrm{Vo}(G/K) \neq \varnothing$, и лемма 2.5(2) приводит к противоречию. Поэтому достаточно рассмотреть случай $G/K \cong L_2(5)$. Поскольку $|G| = |M|$, имеем $|K| = 6$, а значит, K эквивалентно S_3 или $\mathbb{Z}_6$. Так как $C_G(K)K/K \trianglelefteq G/K$ и G/K — неабелева простая группа, заключаем, что $C_G(K)K = K$ или $C_G(K)K = G$. В первом случае $C_G(K) \leq K$, и потому

$$60 = |G/K| \mid |G/C_G(K)| \mid |\operatorname{Aut}(K)|,$$

что приводит к противоречию, ибо легко убедиться, что порядок группы автоморфизмов группы порядка 6 не делится на 5. Поэтому $C_G(K)K = G$, откуда

$$C_G(K)/Z(K) \cong C_G(K)K/K \cong G/K \cong L_2(5).$$

Если $K \cong S_3$, то $Z(K) = C_G(K) \cap K = 1$ и, следовательно, $G \cong S_3 \times L_2(5)$. Так как $2 \in \omega(S_3)$ и $5 \in \mathrm{Vo}(L_2(5))$, из леммы 2.5(1) следует, что $10 \in \mathrm{Vo}(G)$; противоречие с тем, что G — VCP-группа. Поэтому $K \cong \mathbb{Z}_6$ и группа K абелева. Таким образом, $G = C_G(K)$, так что G — центральное расширение K с помощью группы $L_2(5)$. Пусть P — силовская 2-подгруппа группы K. Тем самым $P \lhd G$ и $\frac{G/P}{K/P} \cong L_2(5)$. Легко заключаем, что группа G/P есть центральное расширение группы K/P с помощью $L_2(5)$. Так как порядок множителя Шура группы $L_2(5)$ равен 2 и $|K/P| = 3$, отсюда следует, что расширение расщепляемое, а значит, $G/P \cong K/P \times L_2(5)$. Из леммы 2.5 вытекает, что множество $\mathrm{Vo}(G)$ содержит число, кратное 6; противоречие.

Случай 2. Пусть $M = A_7$. Если $G/K \cong L_2(8), Sz(8), Sz(32)$, то поскольку $\{9, 13, 31\} \cap \mathrm{Vo}(G/K) \neq \varnothing$, по лемме 2.5(2) получаем противоречие. Если $G/K \cong L_2(5)$, то $|K| = 42$ и аналогично предыдущему случаю заключаем, что $C_G(K)K = K$ или $C_G(K)K = G$. Так как $|\operatorname{Aut}(K)|$ не делится на 5, случай $C_G(K)K = K$ невозможен. Таким образом, $G = C_G(K)K$, откуда $C_G(K)/Z(K) \cong G/K \cong L_2(5)$, и так как $Z(K) \leq Z(C_G(K))$, заключаем, что $C_G(K)$ — центральное расширение группы $Z(K)$ с помощью $L_2(5)$. Если это расширение расщепляемо, то $C_G(K) = Z(K) \times T$, где $T \cong L_2(5)$. В силу $T \leq G$, $T \cap K \leq T \cap Z(K) = 1$ и $|G| = |TK|$ группа G — расщепляемое расширение группы K с помощью $L_2(5)$. Поскольку $|\operatorname{Aut}(K)|$ не делится на 60, легко видеть, что $G = K \times L_2(5)$. Так как $2 \in \omega(K)$ и $5 \in \mathrm{Vo}(L_2(5))$, из леммы 2.5(1) следует, что $10 \in \mathrm{Vo}(G)$; противоречие. Поэтому $C_G(K)$ — нерасщепляемое расширение группы $Z(K)$ с помощью $L_2(5)$. Ввиду центральности этого расширения с учетом порядка множителя Шура группы $L_2(5)$ получаем, что $|Z(K)| \in \{1, 2, 6, 14, 42\}$.

Если $|Z(K)| = 1$, то $K \cap C_G(K) = 1$, и в силу $G = KC_G(K)$ получаем, что $G = K \times L_2(5)$; противоречие. Если $|Z(K)| = 2$, то согласно $(|K/Z(K)|, |Z(K)|) = (21, 2) = 1$ из теоремы Шура — Цассенхауса вытекает, что у K существует подгруппа N такая, что $K = NZ(K)$. Так как $|K : N| = 2$, заключаем, что $K = N \times Z(K)$. Утверждается, что $G = N \times C_G(K)$. С учетом порядка группы $NC_G(K)$ имеем $G = NC_G(K)$ и потому легко видеть, что N — нормальная подгруппа в G. Далее, $N \cap C_G(K) \leq N \cap Z(K) = 1$, что доказывает утверждение. Таким образом, $15 \in \omega(G)$. С другой стороны, поскольку $G/K \cong L_2(5)$, в силу лемм 2.3 и 2.4(2) группа G имеет неприводимый характер нулевого 5-дефекта, а значит, $15 \in \mathrm{Vo}(G)$; противоречие.

Если $|Z(K)| \in \{6, 14, 42\}$, то пусть P — силовская 2-подгруппа группы $Z(K)$. Легко видеть, что $C_G(K)/P$ — центральное расширение группы $Z(K)/P$ с помощью $L_2(5)$. Учитывая порядок множителя Шура группы $L_2(5)$, видим, что это расширение расщепляется; следовательно, $C_G(K)/P \cong Z(K)/P \times L_2(5)$. Таким образом, $\{15, 35\} \cap \omega(C_G(K)) \neq \varnothing$. Поскольку $L_2(5)$ имеет неприводимый характер нулевого 5-дефекта, из леммы 2.4(2) следует, что у группы $C_G(K)$ тоже имеется неприводимый характер нулевого 5-дефекта. Поэтому в силу леммы 2.4(1) $\{15, 35\} \cap \mathrm{Vo}(G) \neq \varnothing$; противоречие. $\square$

Авторы благодарят рецензента за неоценимые комментарии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bubboloni D., Dolfi S., Spiga P.* Finite groups whose irreducible characters vanish only on p-elements // J. Pure Appl. Algebra. 2009. V. 213. P. 370–376.

2. *Dolfi S., Pacifici E., Sanus L., Spiga P.* On the orders of zeros of irreducible characters // J. Algebra. 2009. V. 321. P. 345–352.

3. *Dolfi S., Pacifici E., Sanus L., Spiga P.* On the vanishing prime graph of finite groups // J. London Math. Soc. 2010. V. 82, N 1. P. 167–183.

4. *Zhang J., Li Z., Shao C.* Finite groups whose irreducible characters vanish only on elements of prime power order // Int. Electron. J. Algebra. 2011. V. 9. P. 114–123.

5. *Коуровская тетрадь* (нерешенные вопросы теории групп). 17-е изд. Новосибирск: Ин-т математики, 2010.

6. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Мазуров В. Д.* Характеризация конечных простых групп спектром и порядком // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 6. С. 685–728.

7. *Conway J., Curtis R., Norton S., Parker R., Wilson R.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.

8. *Dolfi S., Pacifici E., Sanus L., Spiga P.* On the vanishing prime graph of solvable groups // J. Group Theory. 2010. V. 13. P. 189–206.

9. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups. New York: Dover, 1976.

10. *Zavarnitsine A. V.* Finite simple groups with narrow prime spectrum, // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2009. V. 6. P. 1–12.

Статья поступила 2 октября 2013 г.

M. Foroudi Ghasemabadi (Гасемабади М. Фороуди), A. Iranmanesh (Иранманеш А.)
F. Mavadatpour (Мавадатпур Ф.)
Tarbiat Modares University,
Tehran, Iran
`foroudi@modares.ac.ir`, `iranmanesh@modares.ac.ir`, `f.mavadatpor@modares.ac.ir`