Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2015. Том 56, № 1

УДК 517.518.36

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛИНОМАМИ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ L^p

С. С. Волосивец

Аннотация. Изучаются наилучшие приближения полиномами по мультипликативным системам в пространствах L^p с весами Макенхаупта. С помощью аналогов неравенств Джексона и Бернштейна получены прямая и обратная теоремы приближения в терминах K-функционала и обратная теорема типа М. Ф. Тимана — О. В. Бесова. В случае степенного веса дается критерий принадлежности функции весовому пространству L^p в терминах коэффициентов Фурье по мультипликативным системам.

Ключевые слова: мультипликативная система, весовое пространство L^p, K-функционал, неравенство Джексона, неравенство Бернштейна, обобщенно монотонная последовательность.

1. Введение

Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, причем $2 \le p_j \le N$ для всех $j \in \mathbb{N}$. По определению $\mathbb{Z}(p_j) = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$, $m_0 = 1$ и $m_n = p_1 \dots p_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Каждое число $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \quad x_j \in \mathbb{Z}(p_j). \tag{1}$$

Это разложение единственно, если для $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, берем разложение с конечным числом $x_j \ne 0$. Каждое число $k \in \mathbb{Z}_+$ может быть записано единственным образом в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \quad k_j \in \mathbb{Z}(p_j). \tag{2}$$

Если x и y представлены в виде (1), то по определению

$$x \oplus y = z = \sum_{j=1}^{\infty} z_j m_J^{-1}, \quad z_j \in \mathbb{Z}(p_j),\ z_j = x_j + y_j \pmod{p}_j.$$

Аналогично определяется $x \ominus y$. Для данного $x \in [0, 1)$ с разложением (1) и $k \in \mathbb{Z}_+$ с разложением (2) полагаем

$$\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right)\right).$$

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/К).

Система $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$, называемая *мультипликативной*, является ортонормированной и полной в $L^1[0,1]$ (см. [1, § 1.5]), причем при $k < m_n$ функции $\chi_k(x)$ постоянны на $I_j^n := [(j-1)/m_n, j/m_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le j \le m_n$. Множество всех I_j^n обозначим через Ω. Введем коэффициенты Фурье по системе $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ формулой

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_k(t)}\, dt, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

и частичные суммы Фурье равенством

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $1 < p < \infty$. Положительная измеримая на $[0,1)$ (т. е. весовая) функция $w(x)$ принадлежит классу Макенхаупта A_p [2], если

$$\left(|I|^{-1}\int_I w(x)\,dx\right)\left(|I|^{-1}\int_I w^{-1/(p-1)}(x)\,dx\right)^{p-1} \le C < \infty \tag{3}$$

для всех $I \in \Omega$ ($|I|$ означает меру Лебега множества I).

Через $L_w^p[0,1)$, где $1 \le p < \infty$ и $w(x)$ — весовая функция, обозначим банахово пространство измеримых на $[0,1)$ функций с конечной нормой

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p w(x)\,dx\right)^{1/p}.$$

Как обычно,

$$E_n(f)_{p,w} = \inf\left\{\left\| f - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\chi_k\right\|_{p,w} : a_k \in \mathbb{C}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При $w(x) \equiv 1$ получаем классическое пространство $L^p[0,1)$ с нормой $\|\cdot\|_p$. С помощью неравенства Гёльдера легко показывается, что $L_w^p[0,1) \subset L^1[0,1)$ при $1 < p < \infty$ и $w \in A_p$. В этом случае будем говорить, что *существует* $\mathbf{P}$-*производная* $f^{[r]}$ функции $f \in L_w^p[0,1)$ порядка $r > 0$ (в $L_w^p[0,1)$), если ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} j^r \hat{f}(j)\chi_j$ является рядом Фурье функции $f^{[r]} \in L_w^p[0,1)$. Это условие равносильно тому, что ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} j^r \hat{f}(j)\chi_j$ сходится в $L_w^p[0,1)$ к $f^{[r]}$ (см. лемму 1).

Целью настоящей работы является получение ряда основных результатов теории приближения полиномами по мультипликативным системам в весовых пространствах $L_w^p[0,1)$. Среди них аналоги теоремы Джексона о наилучшем приближении дифференцируемой функции, неравенства Бернштейна, обратной теоремы М. Ф. Тимана — О. В. Бесова о наилучшем приближении производной функции, а также следствия из этих результатов, связанные с понятием K-функционала. Также даются оценка наилучшего приближения в $L_w^p[0,1)$ в терминах коэффициентов Фурье и критерий типа Харди — Литтлвуда принадлежности пространству $L_w^p[0,1)$ для обобщенно монотонных коэффициентов Фурье и степенных весов. Тригонометрические аналоги этих результатов см. в [3–6].

Далее через C, C_i обозначены постоянные, разные в различных случаях. Запись $A(x) \asymp B(x)$, $x \in E$, означает, что существуют $C_1, C_2 > 0$ такие, что $C_1A(x) \le B(x) \le C_2A(x)$ для всех $x \in E$.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1 (см. [7]). *Пусть $w(x)$ — весовая функция, $1 < p < \infty$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $w \in A_p$;

(2) $\|S_n(f)\|_{p,w} \le C\|f\|_{p,w}$, *где* $f \in L^p_w[0,1)$ *и* C *не зависит от* n;

(3) *для любой функции* $f \in L^p_w[0,1)$ *верно соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_{p,w} = 0.$$

Из (2) следует также неравенство $\|f - S_n(f)\|_{p,w} \le (1 + C)E_n(f)_{p,w}$.

Лемма 2. *Пусть* $f \in L^1[0,1)$ *и*

$$Q(f) = \left(|\hat f(0)|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |S_{m_{n+1}}(f) - S_{m_n}(f)|^2\right)^{1/2}, \quad w \in A_p,\ 1 < p < \infty.$$

Тогда $f \in L^p_w[0,1)$ *в том и только в том случае, когда* $Q(f) \in L^p_w[0,1)$ *и при этом* $\|Q(f)\|_{p,w} \asymp \|f\|_{p,w}$, $f \in L^p_w[0,1)$.

Доказательство. При $p_i \equiv 2$ утверждение леммы доказано в [8], для степенного веса $w(x) = x^{p\gamma}$, $-1/p < \gamma < 1 - 1/p$, и ограниченной последовательности $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — в [9]. Пусть $m_n = 1/m_{|n|}$ при $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$. Квек [10] доказал следующее: $f \in L^p_w(\mathbb{R}_+)$, $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда

$$S(f) = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |G_{n+1}(f) - G_n(f)|^2\Big)^{1/2} \in L^p_w(\mathbb{R}_+),$$

где

$$G_n(f)(x) = |I|^{-1} \int_I f(t)\,dt$$

при $x \in I = I^n_j = [(j-1)/m_n, j/m_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$. Известно [1, § 1.5], что $S_{m_n}(f) = G_n(f)$ при $n \in \mathbb{Z}_+$ и $f \in L^1[0,1)$. Считая, что $f(x) = 0$ на $[1,+\infty)$), получаем $G_n(f)(x) = 0$ при $n \in \mathbb{Z}_+$, $x \ge 1$. Кроме того, ясно, что при $n \le -1$ справедливо равенство

$$G_n(f) = m_{|n|}^{-1} \int_0^1 f(t)\,dt$$

для $x \in [0, m_{|n|})$ и $G_n(f)(x)$ равно нулю при остальных x. Поэтому $S(f - \hat f(0)) = Q(f - \hat f(0))$ для $f \in L^1[0,1)$, если $f(x) = 0$ на $[1,+\infty)$. Эквивалентность норм $Q(f)$ и f также следует из [10]. Лемма доказана.

Лемма 3 (см. [11]). *Пусть* $r \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - (k/n)^r)\varphi_k, \quad \zeta_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - (k/n)^r)k^r\varphi_k,$$

где φ_i *принадлежат банахову пространству* E. *Если* $\big\|\zeta_n^{(r)}\big\|_E \le K$, $n \in \mathbb{N}$, *то* $\sigma_n^{(r)}$ *сходится в* E *к некоторому элементу* $s \in E$ *и* $\big\|s - \sigma_n^{(r)}\big\|_E = O(Kn^{-r})$, $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 4. *Пусть E — банахово пространство, $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \subset E$. Тогда для $\sigma_k^{(1)}$, $\zeta_k^{(1)}$ из леммы 3 и*

$$r_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+1}{k} \sigma_{k+1}^{(1)} \Big/ \binom{n+1}{n-1}$$

справедливо тождество

$$(n+1)\big(\sigma_n^{(1)} - r_n\big) = \zeta_n^{(1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Так как $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{k+1}{k} = \binom{n+1}{n-1}$, получаем равенство

$$\begin{aligned}(n+1)\big(\sigma_n^{(1)} - r_n\big) &= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \sum_{i=k+1}^{n-1} \big(\sigma_{i+1}^{(1)} - \sigma_i^{(1)}\big) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \sum_{i=k+1}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{i} \left(1 - \frac{j}{i+1}\right) \varphi_j - \sum_{j=0}^{i} \left(1 - \frac{j}{i}\right) \varphi_j \right) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \sum_{i=k+1}^{n-1} \sum_{i=1}^{j} \frac{j\varphi_j}{i(i+1)}.\end{aligned}$$

Пусть $z_j = \sum\limits_{i=1}^{j} j\varphi_j$. Тогда, меняя порядок суммирования, находим

$$(n+1)\big(\sigma_n^{(1)} - r_n\big) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{z_i}{i(i+1)} \sum_{k=0}^{i-1} (k+1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} z_i = \zeta_n^{(1)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5 принадлежит Алексичу [12, лемма 2]. Ключевой в ее доказательстве является лемма 4 данной работы, используемая в [12] без обоснования. Поскольку в формулировке леммы 2 из [12] требовалось $\big\|s - \sigma_n^{(1)}\big\|_E \le M/n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, дадим краткое доказательство леммы 5.

Лемма 5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и в обозначениях леммы 3 для некоторого $s \in E$ справедливо неравенство $\big\|s - \sigma_m^{(1)}\big\|_E \le M/m$, $1 \le m \le n$. Тогда $\big\|\zeta_n^{(1)}\big\|_E \le 4M$.*

Доказательство. Рассматривая r_n из леммы 4 в силу условия имеем

$$\|s - r_n\|_E \le \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \big\|s - \sigma_{k+1}^{(1)}\big\|_E \Big/ \binom{n+1}{n-1} \le M \sum_{k=0}^{n-1} 1 \Big/ \binom{n+1}{n-1} = 2M(n+1)^{-1}.$$

Благодаря равенству леммы 4 видим

$$\big\|\zeta_n^{(1)}\big\|_E \le (n+1)\big(\big\|s - \sigma_n^{(1)}\big\|_E + \|s - r_n\|_E\big) \le 4M.$$

Лемма доказана.

Лемма 6 (см. [13]). *Пусть $\mathbf{g} = \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $g_k \in L_w^p[0,1)$, $k \in \mathbb{N}$, $p, q \in [1, +\infty)$, $w(x)$ — весовая функция и*

$$\|\mathbf{g}\|_{L_w^p(l^q)} = \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |g_k|^q \right)^{1/q} \right\|_{p,w}, \quad \|\mathbf{g}\|_{l^q(L_w^p)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{p,w}^q \right)^{1/q}.$$

Тогда при $1 < p \le 2$ справедливо неравенство $\|\mathbf{g}\|_{L_w^p(l^2)} \le \|\mathbf{g}\|_{l^2(L_w^p)}$. Если же $p \ge 2$, то верно обратное неравенство.

Будем писать $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM$, если $\sum\limits_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \le Ca_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Это понятие введено С. Ю. Тихоновым [14], установившим следующую лемму.

Лемма 7. *Пусть* $\{a_k\}_{k=1}^\infty \in GM$ *и сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^\infty k^{-1}a_k$. *Тогда*

$$\sum_{k=n}^\infty |a_k - a_{k+1}| \le C\left(a_n + \sum_{k=n+1}^\infty k^{-1}a_k\right).$$

Лейндлер [15] получил следующие неравенства, обобщающие классические результаты Харди и Литтлвуда [16, теорема 346].

Лемма 8. *Пусть* $p \ge 1$, $a_n \ge 0$ *и* $\lambda_n > 0$ *при* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^p \le p^p \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{1-p} \left(\sum_{k=n}^\infty \lambda_k\right)^p a_n^p$$

и

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n \left(\sum_{k=n}^\infty a_k\right)^p \le p^p \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{1-p} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)^p a_n^p.$$

Из теоремы (4.2) в [17] в силу ограниченности и ортонормированности $\{\chi_k\}_{k=0}^\infty$ вытекает

Лемма 9. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, $0 \le \alpha < 1/p'$, $2/p - 1 + \alpha \ge 0$. *Тогда*

$$\left(\sum_{n=0}^\infty |\hat f(n)|^p (n+1)^{p-2-\alpha p}\right)^{1/p} \le C\left(\int_0^1 |f(x)|^p x^{\alpha p}\, dx\right)^{1/p}.$$

Для тригонометрической системы аналогичный лемме 9 результат получен Питтом [18].

3. Основные результаты

Теорема 1 является аналогом теоремы Джексона (разновидности формулировок этой теоремы см. в [19, гл. 7, формула (1.3)]).

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $r \in \mathbb{N}$ *и для* $f \in L^p_w[0,1)$ *существует* $f^{[r]} \in L^p_w[0,1)$. *Тогда*

$$E_n(f)_{p,w} \le Cn^{-r}\|f^{[r]}\|_{p,w}. \tag{4}$$

Доказательство. Если существует $f^{[r]} \in L^p_w[0,1)$, то для

$$\begin{aligned}\zeta_n^{(r)}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1}(1 - k^r/n^r)k^r \hat f(k)\chi_k = \sum_{k=0}^{n-1}(1-k^r/n^r)(S_{k+1}(f^{[r]}) - S_k(f^{[r]})) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(1-(k-1)^r/n^r)S_k(f^{[r]}) - \sum_{k=0}^{n-1}(1-k^r/n^r)S_k(f^{[r]}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(k^r - (k-1)^r)/n^r S_k(f^{[r]}) + ((n-1)/n)^r S_n(f^{[r]})\end{aligned}$$

по лемме 1 верно неравенство $\left\|\zeta_n^{(r)}(f)\right\|_{p,w} \le C_1\|f^{[r]}\|_{p,w} = C_2$, откуда по лемме 3 последовательность

$$\sigma_n^{(r)}(f) = \sum_{k=0}^{n-1}(1 - k^r/n^r)\hat f(k)\chi_k$$

сходится в $L^p_w[0,1)$ к функции $\sigma(f)=f$. В самом деле, так как в $L^1[0,1)$ согласно теореме 4.21 из [20, гл. 4, § 10], функции $\sigma_n^{(r)}(f)$ сходятся к f и предел этой последовательности в $L^p_w[0,1)$ совпадает п. в. с f. При этом также по лемме 3 находим

$$E_n(f)_{p,w} \le \left\|f-\sigma_n^{(r)}(f)\right\|_{p,w} = O(C_2 n^{-r}) = O(n^{-r}\|f^{[r]}\|_{p,w}).$$

Теорема доказана.

Будем писать $f\in\mathscr{P}_n$, если $f\in L^1[0,1)$ и $\hat f(k)=0$ при $k\ge n$.

Теорема 2 (аналог неравенства Бернштейна). *Пусть* $1<p<\infty$, $w\in A_p$, $r\in\mathbb{N}$ *и* $t_n\in\mathscr{P}_n$. *Тогда*

$$\left\|t_n^{[r]}\right\|_{p,w} \le C(p,w)n^r\|t_n\|_{p,w}.$$

Доказательство. Из условия (3) следует, что $w\in L^1[0,1)$, поэтому любой полином $t_n\in\mathscr{P}_n$ принадлежит $L^p_w[0,1)$. Значит, достаточно доказать теорему при $r=1$. Будем обозначать средние Чезаро

$$\sigma_n^{(1)}(f)=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k(f)}{n}=\sum_{k=0}^{n-1}(1-k/n)\hat f(k)\chi_k$$

через $\sigma_n(f)$. Из леммы 1 следует, что $\|\sigma_k(t_n/n)\|_{p,w}\le C_1 n^{-1}\|t_n\|_{p,w}$, $k\in\mathbb{N}$, откуда

$$\|t_n/n-\sigma_k(t_n/n)\|_{p,w}\le (C_1+1)n^{-1}\|t_n\|_{p,w}\le (C_1+1)k^{-1}\|t_n\|_{p,w},\quad 1\le k\le n.$$

По лемме 5 имеем $\left\|\sigma_n\big(t_n^{[1]}/n\big)\right\|_{p,w}\le 4(C_1+1)\|t_n\|_{p,w}$ и

$$\left\|\sigma_n(t_n^{[1]})\right\|_{p,w}\le 4(C_1+1)n\|t_n\|_{p,w}=C_2 n\|t_n\|_{p,w}.$$

Аналогично доказывается, что $\left\|\sigma_{2n}(t_n^{[1]})\right\|_{p,w}\le 2C_2 n\|t_n\|_{p,w}$. Рассмотрим оператор Валле — Пуссена $v_n(f)=2\sigma_{2n}(f)-\sigma_n(f)$ со свойством $v_n(t_n)=t_n$ при $t_n\in\mathscr{P}_n$. Тогда из неравенств выше следует, что

$$\left\|t_n^{[1]}\right\|_{p,w}=\left\|v_n(t_n^{[1]})\right\|_{p,w}\le 5C_2 n\|t_n\|_{p,w}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $1<p<\infty$, $\gamma=\min(2,p)$, $w\in A_p$, $r\in\mathbb{N}$ *и* $f\in L^p_w[0,1)$. *Если сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{r\gamma-1}E_k^\gamma(f)_{p,w}$, *то существует* $f^{[r]}\in L^p_w[0,1)$ *и при этом*

$$E_n(f^{[r]})_{p,w}\le C\left(n^rE_n(f)_{p,w}+\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{r\gamma-1}E_k^\gamma(f)_{p,w}\right)^{1/\gamma}\right). \tag{5}$$

Доказательство. Докажем сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^r\hat f(k)\chi_k$ в $L^p_w[0,1)$. Пусть $n<q$ и $s,l\in\mathbb{N}$ таковы, что $m_{s-1}\le n<m_s$, $m_{l-1}\le q<m_l$, $s\le l$. Если $s<l$, то

$$\sum_{k=n}^{q}k^r\hat f(k)\chi_k=\left(\sum_{k=n}^{m_s-1}+\sum_{k=m_s}^{m_{l-1}-1}+\sum_{k=m_{l-1}}^{q}\right)k^r\hat f(k)\chi_k=I_1+I_2+I_3,$$

где I_2 может соответствовать пустое множество индексов. По лемме 2 имеем

$$\|I_2\|_{p,w} \le C_1 \left\| \left(\sum_{j=s}^{l-2} \left| \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} k^r \hat{f}(k)\chi_k \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,w}.$$

При $1 < p \le 2$ по неравенству Йенсена находим, что

$$\|I_2\|_{p,w} \le C_1 \left[\int_0^1 \left(\sum_{j=s}^{l-2} \left| \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} k^r \hat{f}(k)\chi_k \right|^p \right)^{p\cdot 1/p} w(x)\,dx \right]^{1/p}$$
$$= C_1 \left[\sum_{j=s}^{l-2} \left\| \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} k^r \hat{f}(k)\chi_k \right\|_{p,w}^p \right]^{1/p}. \quad (6)$$

При $p > 2$ в силу леммы 6

$$\|I_2\|_{p,w} \le C_2 \left[\sum_{j=s}^{l-2} \left\| \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} k^r \hat{f}(k)\chi_k \right\|_{p,w}^2 \right]^{1/2}. \quad (7)$$

Далее по лемме 1 и теореме 2 получаем оценку

$$\left\| \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} k^r \hat{f}(k)\chi_k \right\|_{p,w} \le C_3 m_{j+1}^r \left\| \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} \hat{f}(k)\chi_k \right\|_{p,w}$$
$$\le C_3 m_{j+1}^r \|S_{m_{j+1}}(f) - f + f - S_{m_j}(f)\|_{p,w} \le C_4 m_{j+1}^r E_{m_j}(f)_{p,w}. \quad (8)$$

Аналогично $\|I_1\|_{p,w} \le C_4 n^r E_n(f)_{p,w}$ и $\|I_3\|_{p,w} \le C_4 m_{l-1}^r E_{m_{l-1}}(f)_{p,w}$. В случае $s = l$ оцениваем только I_1. Подставляя (8) в (7) или (6), находим

$$\left\| \sum_{k=n}^{q} k^r \hat{f}(k)\chi_k \right\|_{p,w} \le C_5 \left[n^r E_n(f)_{p,w} + \left(\sum_{j=s}^{l-1} m_j^{r\gamma} E_{m_j}^{\gamma}(f)_{p,w} \right)^{1/\gamma} \right]. \quad (9)$$

Известно, что сходимость ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} m_j^{r\gamma} E_{m_j}^{\gamma}(f)_{p,w}$ равносильна сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{r\gamma-1} E_k^{\gamma}(f)_{p,w}$, откуда следуют фундаментальность частичных сумм и сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^r \hat{f}(k)\chi_k$ к $f^{[r]} \in L_w^p[0,1)$ в $L_w^p[0,1)$. Далее для $n \in \mathbb{N}$, $m_{s-1} \le n < m_s$, $s \in \mathbb{N}$, согласно лемме 2, (8), (7) и (6) имеем

$$E_n(f^{[r]})_{p,w} \le \|f^{[r]} - S_n(f^{[r]})\|_{p,w}$$
$$\le C_6 \left\| \left(\left| \sum_{k=n}^{m_s-1} k^r \hat{f}(k)\chi_k \right|^2 + \sum_{j=s}^{\infty} \left| \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} k^r \hat{f}(k)\chi_k \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,w}$$
$$\le C_7 \left[n^r E_n(f)_{p,w} + \left(\sum_{j=s}^{\infty} m_j^{r\gamma} E_{m_j}^{\gamma}(f)_{p,w} \right)^{1/\gamma} \right],$$

откуда стандартным образом выводится оценка (5). Теорема доказана.

Замечание 1. Аналог теоремы 3 для приближений тригонометрическими полиномами получен в [5], невесовой вариант в тригонометрическом случае см. в [21, 22]. В [5] рассматривался модуль непрерывности вида

$$\Omega(g,\delta)_{p,w} = \sup\left\{\left\|g(x) - (2h)^{-1}\int\limits_{x-h}^{x+h} g(t)\,dt\right\|_{p,w}^{*} : 0 < h \le \delta\right\}, \tag{10}$$

где

$$\|g\|_{p,w}^{*} = \left(\int\limits_{0}^{2\pi} |g(x)|^p w(x)\,dx\right)^{1/p}.$$

Пусть $I^n(x)$ — содержащий x промежуток $I_j^n = [(j-1)/m_n, j/m_n)$. Можно рассмотреть модуль непрерывности

$$\Omega_n(g)_{p,w} = \sup_{k\ge n}\left\|g(x) - |I^k(x)|^{-1}\int\limits_{I^k(x)} g(t)\,dt\right\|_{p,w}$$

аналогично (10). Но

$$|I^k(x)|^{-1}\int\limits_{I^k(x)} g(t)\,dt = S_{m_k}(f)(x), \quad k\in\mathbb{Z}_+$$

(см. [1, § 1.5]), а из леммы 1 следует, что

$$E_{m_k}(g)_{p,w} \le \|g - S_{m_k}(g)\|_{p,w} \le C_1 E_{m_k}(g)_{p,w}.$$

Поэтому $\Omega_n(g)_{p,w} \asymp E_{m_n}(g)_{p,w}$, $g\in L_w^p[0,1)$, и оценка $\Omega_n(f^{[r]})_{p,w}$ через $E_k(f)_{p,w}$ есть простое следствие теоремы 3. Для модуля непрерывности из (10) соответствующая оценка в [5] нетривиальна.

Пусть $1<p<\infty$, $w\in A_p$, $r\in\mathbb{N}$ и $W^rL_w^p[0,1)$ состоит из функций $g\in L_w^p[0,1)$, для которых существует $g^{[r]}\in L_w^p[0,1)$, с полунормой $\|g^{[r]}\|_{p,w}$. Рассмотрим K-функционал

$$\begin{aligned} K_r(f,t) &= K_r\big(f,t,L_w^p[0,1),W^rL_w^p[0,1)\big)\\ &= \inf\big\{\|f-g\|_{p,w} + t\|g^{[r]}\|_{p,w} : g\in W^rL_w^p[0,1)\big\}. \end{aligned}$$

Следуя теореме 5.1 из [19, гл. 7], получим прямые и обратные теоремы приближения в $L_w^p[0,1)$ в терминах $K_r(f,t)$.

Теорема 4. *Пусть $1<p<\infty$, $w\in A_p$, $r\in\mathbb{N}$ и $\gamma=\min(p,2)$. Тогда для всех $f\in L_w^p[0,1)$ и $n\in\mathbb{N}$ справедливы неравенства*

$$E_n(f)_{p,w} \le CK_r(f,n^{-r}) \tag{11}$$

и

$$K_r(f,n^{-r}) \le Cn^{-r}\left(\sum_{k=1}^{n}[k^rE_k(f)_{p,w}]^\gamma k^{-1}\right)^{1/\gamma}. \tag{12}$$

Доказательство. В силу полуаддитивности наилучших приближений и теоремы 1 выводим для $g\in W^rL_w^p[0,1)$ неравенство

$$E_n(f)_{p,w} \le E_n(f-g)_{p,w} + E_n(g)_{p,w} \le C_1(\|f-g\|_{p,w} + n^{-r}\|g^{[r]}\|_{p,w}).$$

Беря точную нижнюю грань правой части по $g \in W^r L^p_w[0,1)$, получаем неравенство (11). Пусть $t_k \in \mathscr{P}_{m_k}$ таков, что $\|f - t_k\|_{p,w} = E_{m_k}(f)_{p,w}$, $s_k = t_k - t_{k-1}$ при $k \in \mathbb{N}$, $s_0 = t_0$ постоянен на $[0,1)$. С помощью неравенства треугольника имеем $\|s_k\|_{p,w} \le 2E_{m_{k-1}}(f)_{p,w}$. Далее $t_k = \sum\limits_{j=0}^{k} s_j$ и $s_0^{[1]} = 0$, поэтому по теореме 2 и аналогично (6)–(8) находим

$$
\begin{aligned}
K_r\bigl(f, m_k^{-r}\bigr) &\le \|f - t_k\|_{p,w} + m_k^{-r}\bigl\|t_k^{[r]}\bigr\|_{p,w} = E_{m_k}(f)_{p,w} + m_k^{-r}\left\|\sum_{j=1}^{k} s_j^{[r]}\right\|_{p,w} \\
&\le E_{m_k}(f)_{p,w} + C_2 m_k^{-r}\left(\sum_{j=1}^{k} \bigl\|s_j^{[r]}\bigr\|_{p,w}^{\gamma}\right)^{1/\gamma} \\
&\le E_{m_k}(f)_{p,w} + C_3 m_k^{-r}\left(\sum_{j=1}^{k} m_j^{r\gamma} E_{m_{j-1}}^{\gamma}(f)_{p,w}\right)^{1/\gamma} \\
&\le C_4 m_k^{-r}\left(\sum_{j=1}^{k} m_j^{r\gamma} E_{m_{j-1}}^{\gamma}(f)_{p,w}\right)^{1/\gamma}. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Из (13) с помощью монотонности $E_n(f)_{p,w}$ и $K_r(f,t)$ легко получаем (12). Теорема доказана.

В заключение дадим условие весовой интегрируемости и оценку наилучшего приближения в весовой норме в терминах коэффициентов Фурье по мультипликативной системе при условии $\{\hat f(n)\}_{n=1}^{\infty} \in GM$.

Теорема 5. *Пусть* $f \in L^1[0,1)$, $\{\hat f(n)\}_{n=1}^{\infty} \in GM$, $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, *так что* $\gamma_n = \int\limits_{1/(n+1)}^{1/n} w(x)\,dx$ *удовлетворяет двум условиям типа Бари — Стечкина*

$$
\sum_{k=1}^{n} \gamma_k k^p = O(\gamma_n n^{p+1}), \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (14)
$$

и

$$
\sum_{k=n}^{\infty} \gamma_k = O(n\gamma_n), \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (15)
$$

Тогда из условия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n n^p (\hat f(n))^p < \infty$ *следует* $f \in L^p_w[0,1)$. *При этом для наилучших приближений функции* f *в* $L^p_w[0,1)$ *справедлива оценка*

$$
E_n(f)_{p,w} \le C\left(n^{p+1}\gamma_n(\hat f(n))^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k k^p (\hat f(k))^p\right)^{1/p}.
$$

Доказательство. Пусть для простоты $\hat f(0) = 0$, $\hat f(k) = a_k$, $k \in \mathbb{N}$. Известно, что

$$
|D_n(x)| := \left|\sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)\right| \le N x^{-1}
$$

(см. [20, гл. 4, § 3]). С помощью преобразования Абеля и леммы 7 получаем

$$|f(x)| \le \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k - a_{k+1}||D_{k+1}(x)| \le \sum_{k=1}^{n} a_k + C_1 x^{-1}\left(a_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-1} a_k\right).$$

Поэтому благодаря лемме 8, (14) и (15) имеем

$$\int_0^1 |f(x)|^p w(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{1/(n+1)}^{1/n} w(x)|f(x)|^p\,dx$$

$$\le C_2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p + \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(na_n)^p + \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n n^p\left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{-1}a_k\right)^p\right)$$

$$\le C_3\left(\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{1-p}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\gamma_k\right)^p a_n^p + \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n n^p a_n^p + \sum_{n=1}^{\infty}(n^p\gamma_n)^{1-p}\left(\sum_{k=1}^{n}\gamma_k k^p\right)^p (a_n/n)^p\right)$$

$$\le C_4 \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n n^p a_n^p. \quad (16)$$

Для получения оценки $E_n(f)_{p,w}$ рассмотрим функцию

$$f_1 = \sum_{k=1}^{n} a_n\chi_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\chi_k.$$

Тогда последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $b_k = a_n$ при $1 \le k \le n$ и $b_k = a_k$ при $k \ge n+1$, также принадлежит классу GM и к f_1 применима оценка (16). Поэтому в силу (14) имеем

$$E_n(f)_{p,w} \le \|f_1\|_{p,w} \le C_5\left(\sum_{k=1}^{n}\gamma_k k^p a_n^p + \sum_{k=n+1}^{\infty}\gamma_k k^p a_k^p\right)^{1/p}$$

$$\le C_6\left(n^{p+1}\gamma_n a_n^p + \sum_{k=n+1}^{\infty}\gamma_k k^p a_k^p\right)^{1/p}.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Близкие к теореме 5 результаты в тригонометрическом случае см. в [6]. Если $w(x) = x^{\alpha p}$, то оценка (14) выполнена при $\alpha < 1 - 1/p$, а оценка (15) — при $\alpha > -1/p$, т. е. обе оценки справедливы для всех степенных весов, удовлетворяющих условию A_p. Для таких весов можно установить критерий, частично обобщающий теорему 9 из [23].

Теорема 6. *Пусть* $w(x) = x^{\alpha p}$, $2 \le p < \infty$, $-1/p < \alpha < 1 - 1/p$, *или* $1 < p < 2$, $0 \le \alpha < 1 - 1/p$. *Если* $f \in L^1[0,1)$ *и* $\{\hat f(n)\}_{n=1}^{\infty} \in GM$, *то* $f \in L^p_w[0,1)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2-\alpha p}(\hat f(n))^p < \infty. \quad (17)$$

Доказательство. Достаточность условия (17) вытекает из теоремы 5. Докажем его необходимость. При $p \ge 2$ используем обозначение $\Delta_n(f) =$

$S_{m_{n+1}}(f) - S_{m_n}(f)$ и лемму 2, согласно которой и неравенству Йенсена

$$\|x^\alpha f(x)\|_p^p \ge C_1 \left\| x^\alpha \left(\sum_{n=0}^\infty |\Delta_n(f)(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p$$
$$= C_1 \int\limits_0^1 x^{\alpha p} \left(\sum_{n=o}^\infty |\Delta_n(f)(x)|^2 \right)^{p/2} dx \ge C_1 \int\limits_0^1 x^{\alpha p} \sum_{n=0}^\infty |\Delta_n(f)(x)|^p\, dx$$
$$= C_1 \sum_{n=0}^\infty \|x^\alpha \Delta_n(f)(x)\|_p^p.$$

Известно, что для $\{a_k\}_{k=1}^\infty \in GM$ неравенство $a_k \le C_2 a_n$ выполнено при всех $n \le k \le 2n$ (см. [14]). Так как отношение m_{n+1}/m_n ограничено N, отсюда следует, что $a_{m_{n+1}} \le C_3(N) a_k$ при $m_n \le k < m_{n+1}$. Кроме того, $\Delta_n(f)$ постоянна на $[0, 1/m_{n+1})$ (см. [1, § 1.5]). В результате получаем

$$\|x^\alpha \Delta_n(x)\|_p^p \ge \int\limits_0^{1/m_{n+1}} x^{\alpha p} |\Delta_n(x)|^p\, dx$$
$$\ge C_4 m_n^{-\alpha p - 1} \left(\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \hat{f}(k) \right)^p \ge C_5 m_{n+1}^{-\alpha p + p - 1} (\hat{f}(m_{n+1}))^p. \quad (18)$$

Суммируя неравенства (18) и используя указанное выше свойство последовательности $\{\hat{f}(n)\}_{n=1}^\infty \in GM$, выводим сходимость ряда (17). При $1 < p < 2$ применяем лемму 9. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987.
2. *Muckenhoupt B.* Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 165. P. 207–226.
3. *Ky N. X.* On approximation by trigonometric polynomials in L_u^p-spaces // Stud. Sci. Math. Hungar. 1993. V. 28. P. 183–188.
4. *Ky N. X.* Moduli of mean smoothness and approximation with A_p-weights // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 1997. V. 40. P. 37–48.
5. *Kokilashvili V., Yildirir Y. E.* On the approximation in weighted Lebesgue spaces // Proc. A. Razmadze Math. Inst. 2007. V. 143. P. 103–113.
6. *Wei B., Yu D.* On weighted L^p integrability and approximation of trigonometric series // Anal. Theory Appl. 2009. V. 25, N 1. P. 40–54.
7. *Young W. S.* Weighted norm inequalities for Vilenkin–Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 340, N 1. P. 273–291.
8. *Gundy R. F., Wheeden R. L.* Weighted integral inequalities for the nontangential maximal function, Lusin area integral, and Walsh–Paley series // Stud. Math. 1974. V. 49, N 2. P. 107–124.
9. *Watari C.* On generalized Walsh–Fourier series // Tohoku Math. J. 1958. V. 16, N 3. P. 211–241.
10. *Quek T. S.* Littlewood–Paley and multiplier theorems on weighted spaces over locally compact Vilenkin groups // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 210, N 2. P. 742–754.
11. *Kralik D.* Über die Approximationstheoretische Characterisierung Gewisser Funktionen Klassen mit Hilfe der Rieszschen Mittel von Fourierreihen // Acta Math. Hungar. 1969. V. 20, N 3–4. P. 361–373.
12. *Alexits G.* Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction periodique par les sommes de Fejer // Acta Math. Hungar. 1952. V. 3, N 1–2. P. 29–42.

13. *Fridli S.* On the rate of convergence of Cesaro means of Walsh–Fourier series // J. Approx. Theory. 1994. V. 76, N 1. P. 31–53.
14. *Tikhonov S.* Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 326, N 1. P. 721–735.
15. *Leindler L.* Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood // Acta Sci. Math. (Szeged). 1970. V. 31, N 3–4. P. 279–285.
16. *Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
17. *Stein E. M., Weiss G.* Interpolation of operators with change of measures // Trans. Amer. Math. Soc. 1958. V. 87, N 1. P. 159–172.
18. *Pitt H. R.* Theorems on Fourier series and power series // Duke Math. J. 1937. V. 3, N 4. P. 747–755.
19. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive approximation. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1993.
20. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981.
21. *Бесов О. В.* О некоторых условиях принадлежности к L^p производных периодических функций // Науч. докл. высш. школы. Физ.-мат. наук. 1959. № 1. С. 13–17.
22. *Тиман М. Ф.* Обратные теоремы конструктивной теории функций в L^p $(1 < p < \infty)$ // Мат. сб. 1958. Т. 46, № 1. С. 125–132.
23. *Волосивец С. С.* О некоторых условиях в теории рядов по мультипликативным системам // Anal. Math. 2007. V. 33, N 3. P. 227–246.

Статья поступила 18 июля 2012 г.

Волосивец Сергей Сергеевич
Саратовский гос. университет,
ул. Астраханская, 83, Саратов 410028
`VolosivetsSS@mail.ru`