Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2015. Том 56, № 1

УДК 517.518.235

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ВЛОЖЕНИЯ ВЕСОВОГО КЛАССА СОБОЛЕВА НА ОБЛАСТИ С УСЛОВИЕМ ДЖОНА

А. А. Васильева

Аннотация. Получены достаточные условия вложения весовых классов Соболева в весовое пространство Лебега на области с условием Джона. Веса являются функциями расстояния до некоторого h-множества, содержащегося в границе области. Задача сводится к оценкам норм двухвесовых операторов суммирования на некотором дереве, затем применяются полученные ранее результаты об оценках этих норм.

Ключевые слова: весовые пространства Соболева, теоремы вложения, h-множества, деревья.

1. Введение

Пусть X, Y — множества, $f_1,\ f_2 : X \times Y \to \mathbb{R}_+$. Будем писать $f_1(x,y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x,y)$ (или $f_2(x,y) \underset{y}{\gtrsim} f_1(x,y)$), если для любого $y \in Y$ существует $c(y) > 0$ такое, что $f_1(x,y) \le c(y) f_2(x,y)$ для любого $x \in X$; $f_1(x,y) \underset{y}{\asymp} f_2(x,y)$, если $f_1(x,y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x,y)$ и $f_2(x,y) \underset{y}{\lesssim} f_1(x,y)$.

Пусть $|\cdot|$ — норма на $\mathbb{R}^d$, $E, E' \subset \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$. Положим

$$\operatorname{diam}_{|\cdot|} E = \sup\{|y-z| : y, z \in E\}, \quad \operatorname{dist}_{|\cdot|}(x, E) = \inf\{|x-y| : y \in E\},$$

$$\operatorname{dist}_{|\cdot|}(E', E) = \inf\{|x-y| : x \in E, y \in E'\}.$$

Для $x \in \mathbb{R}^d$, $a > 0$ обозначим через $B_a(x)$ евклидов шар радиуса a с центром в точке x.

Определение 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $a > 0$. Говорят, что Ω *принадлежит* $\mathbf{FC}(a)$, если найдется точка $x_* \in \Omega$ такая, что для любого $x \in \Omega$ существует кривая $\gamma_x : [0, T(x)] \to \Omega$ со следующими свойствами:

1) $\gamma_x \in AC[0, T(x)]$, $\left|\frac{d\gamma_x(t)}{dt}\right| = 1$ п. в.,
2) $\gamma_x(0) = x$, $\gamma_x(T(x)) = x_*$,
3) для любого $t \in [0, T(x)]$ выполнено включение $B_{at}(\gamma_x(t)) \subset \Omega$.

Определение 2. Говорят, что Ω *удовлетворяет условию Джона*, если $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ для некоторого $a > 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 13–01–00022, 12–01–00554).

Для ограниченной области условие Джона совпадает с условием гибкого конуса (см. определение в [1]). В работах Ю. Г. Решетняка [2, 3] найдено интегральное представление для функций на области Ω, удовлетворяющих условию Джона, через их производные порядка r. Из этого интегрального представления следует, что при $p > 1$, $1 \le q < \infty$ и $\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \ge 0$ (соответственно $\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$) класс $W^r_p(\Omega)$ непрерывно (соответственно компактно) вложен в пространство $L_q(\Omega)$ (т. е. условия непрерывного и компактного вложения такие же, как для $\Omega = [0,1]^d$).

Замечание 1. Если $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, x_* из определения 1, то

$$\operatorname{diam}_{|\cdot|}\Omega \underset{d,a,|\cdot|}{\lesssim} \operatorname{dist}_{|\cdot|}(x_*, \partial\Omega). \tag{1}$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область (т. е. ограниченное открытое связное множество), g, $v : \Omega \to (0, \infty)$ — измеримые функции. Для каждой измеримой векторнозначной функции $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^l$, $\psi = (\psi_k)_{1\le k\le l}$, и для каждого $p \in [1, \infty]$ положим

$$\|\psi\|_{L_p(\Omega)} = \|\max_{1\le k\le l} |\psi_k|\|_p = \left(\int\limits_\Omega \max_{1\le k\le l} |\psi_k(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Пусть $\bar\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{Z}^d_+ := (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$, $|\bar\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_d$. Для каждой обобщенной функции f на Ω обозначим $\nabla^r f = (\partial^r f/\partial x^{\bar\beta})_{|\bar\beta|=r}$ (здесь частные производные берутся в обобщенном смысле), $l_{r,d}$ — число компонент обобщенной вектор-функции $\nabla^r f$. Положим

$$W^r_{p,g}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \exists \psi : \Omega \to \mathbb{R}^{l_{r,d}} : \|\psi\|_{L_p(\Omega)} \le 1, \nabla^r f = g \cdot \psi\}$$

(соответствующую функцию ψ будем обозначать через $\frac{\nabla^r f}{g}$),

$$\|f\|_{L_{q,v}(\Omega)} = \|f\|_{q,v} = \|fv\|_{L_q(\Omega)}, \quad L_{q,v}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} | \ \|f\|_{q,v} < \infty\}.$$

Множество $W^r_{p,g}(\Omega)$ будем называть *весовым классом Соболева.* Отметим, что $W^r_{p,1}(\Omega) = W^r_p(\Omega)$.

Далее считаем, что $\overline{\Omega} \subset \left(-\frac12, \frac12\right)^d$ (где $\overline{\Omega}$ — замыкание Ω).

Свойства весовых пространств Соболева и их обобщений описаны в книгах [4–9] и в обзорной статье [10]. Достаточные условия ограниченности и компактности вложений весовых пространств Соболева в весовое пространство L_q получены например, в [4, 5, 11–15]. Отметим, что в этих работах определение весового класса Соболева включало не только условия на производные порядка r, но и на производные меньших порядков. Более подробная история вопроса описана в [16].

Обозначим через $\mathbb{H}$ множество неубывающих положительных функций, определенных на $(0, 1]$.

Введем понятие h-множества в соответствии с [17].

Определение 3. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — непустой компакт, $h \in \mathbb{H}$. Будем говорить, что Γ является *h-множеством*, если существуют $c_* \ge 1$ и конечная счетно-аддитивная мера μ на $\mathbb{R}^d$ такие, что $\operatorname{supp}\mu = \Gamma$ и для любых $x \in \Gamma$, $t \in (0, 1]$ выполнено

$$c_*^{-1} h(t) \le \mu(B_t(x)) \le c_* h(t). \tag{2}$$

Заметим, что мера μ неотрицательна.

Всюду далее считаем, что $1 < p \le \infty$, $1 \le q < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\delta := r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p} > 0$.

Пусть $g(x) = \varphi_g(\operatorname{dist}(x,\Gamma))$, $v(x) = \varphi_v(\operatorname{dist}(x,\Gamma))$, φ_g, $\varphi_v : (0,\infty) \to (0,\infty)$. Предположим, что существует $c_0 \ge c_*$ такое, что

$$\frac{h(t)}{h(s)} \le c_0, \quad \frac{\varphi_g(t)}{\varphi_g(s)} \le c_0, \quad \frac{\varphi_v(t)}{\varphi_v(s)} \le c_0, \quad j \in \mathbb{N},\ t, s \in [2^{-j-1}, 2^{-j+1}]. \tag{3}$$

Для таких функций g и v получены достаточные условия существования непрерывного вложения $W^r_{p,g}(\Omega)$ в $L_{q,v}(\Omega)$ (см. теоремы 1–3). В теореме 1 условием вложения является ограниченность некоторого весового оператора суммирования на дереве, которое строится по области и множеству Γ. Эта теорема доказывается так же, как теорема 2 из [18], в которой функции h, φ_g, φ_v имели вид $h(t) = t^\theta |\log t|^\gamma \tau(|\log t|)$, $\varphi_g(t) = t^{-\beta_g} |\log t|^{-\alpha_g} \rho_g(|\log t|)$, $\varphi_v(t) = t^{-\beta_v} |\log t|^{-\alpha_v} \rho_v(|\log t|)$, где τ, ρ_g, $\rho_v : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — абсолютно непрерывные функции, $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{y\tau'(y)}{\tau(y)} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y\rho_g'(y)}{\rho_g(y)} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y\rho_v'(y)}{\rho_v(y)} = 0$, $0 \le \theta < d$, $\beta_v < \frac{d-\theta}{q}$, $\beta_g + \beta_v = \delta - \theta\bigl(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\bigr)_+$. Достаточным условием вложения $W^r_{p,g}(\Omega)$ в $L_{q,v}(\Omega)$ являлось неравенство $\alpha_g + \alpha_v > (1-\gamma)\bigl(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\bigr)_+$. Оценка нормы оператора суммирования при $\beta_v < \frac{d-\theta}{q}$ получается достаточно просто, однако этот простой метод неприменим в случае $\beta_v = \frac{d-\theta}{q}$. Здесь с помощью оценок, полученных в [19], доказываются теоремы 2, 3. Из этих теорем (см. также следствие 1) несложно вывести, что при $\theta > 0$, $\beta_v = \frac{d-\theta}{q}$, $\alpha_v > \frac{1-\gamma}{q}$ достаточным условием вложения является неравенство $\alpha_g + \alpha_v > \frac{1}{q}$ в случае $p < q$ и $\alpha_g + \alpha_v > 1 + (1-\gamma)\bigl(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\bigr)$ в случае $p \ge q$.

Отметим, что в силу (3) можно считать $|(x_1,\dots,x_d)| = \max\limits_{1\le i\le d} |x_i|$. Далее обозначаем $\operatorname{dist} := \operatorname{dist}_{|\cdot|}$, $\operatorname{diam} := \operatorname{diam}_{|\cdot|}$.

2. Обозначения

Будем обозначать через $\overline{A}$, $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{card} A$ соответственно замыкание, внутренность, границу, мощность множества A. Если множество A содержится в некотором $(d-1)$-мерном аффинном подпространстве $L \subset \mathbb{R}^d$, то внутренность множества A относительно индуцированной топологии пространства L будем обозначать через $\operatorname{int}_{d-1} A$. *Размерностью* $\dim A$ выпуклого множества A будем называть размерность аффинной оболочки A.

Пусть (Ω, Σ, ν) — пространство с мерой. Говорят, что множества A, $B \subset \Omega$ *не перекрываются*, если $\nu(A \cap B) = 0$. Пусть $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, E, $E_1, \dots, E_m \subset \Omega$ — измеримые множества. Будем говорить, что $\{E_i\}_{i=1}^m$ — *разбиение* E, если множества E_i попарно не перекрываются и $\nu\left[\left(\bigcup\limits_{i=1}^m E_i\right) \triangle E\right] = 0$.

Для каждого куба K со сторонами, параллельными осям координат, и $s \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $\Xi_s(K)$ разбиение K на 2^{sd} одинаковых по размеру неперекрывающихся кубов, $\Xi(K) := \bigcup\limits_{s\in\mathbb{Z}_+} \Xi_s(K)$.

Пусть $\mathscr{G}$ — граф с не более чем счетным числом вершин. Всюду далее предполагаем, что граф не имеет кратных ребер и петель. Множество вершин $\mathscr{G}$ будем обозначать через $\mathbf{V}(\mathscr{G})$, множество ребер — через $\mathbf{E}(\mathscr{G})$. Две различные вершины, являющиеся концами одного и того же ребра, будем называть *соседними*; ребра будем отождествлять с парами соседних вершин. Если $\xi_i \in \mathbf{V}(\mathscr{G})$, $1 \le i \le n$, причем вершины ξ_i и ξ_{i+1} являются соседними для любого

$i=1,\dots,n-1$, то последовательность $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ будем называть *путем*; если все вершины ξ_i различны, то такой путь будем называть *простым*; если $n\ge 4$, $(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$ — простой путь и $\xi_1=\xi_n$, то такой путь будем называть *циклом*. Граф будем называть *связным*, если любые его две вершины можно соединить конечным путем. Если связный граф не имеет циклов, то он называется *деревом*.

Пусть $(\mathscr{T},\xi_0)$ — дерево с выделенной вершиной (корнем) ξ_0. Тогда на множестве $\mathbf{V}(\mathscr{T})$ естественным образом вводится частичный порядок: $\xi'>\xi$, если существует простой путь $(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_n,\xi')$ такой, что $\xi=\xi_k$ для некоторого $k\in\overline{0,n}$; при этом *расстоянием* между ξ и ξ' назовем величину $\rho_{\mathscr{T}}(\xi,\xi')=\rho_{\mathscr{T}}(\xi',\xi)=n+1-k$. Кроме того, положим $\rho_{\mathscr{T}}(\xi,\xi)=0$. Если $\xi'>\xi$ или $\xi'=\xi$, то будем писать $\xi'\ge\xi$ и обозначим $[\xi,\xi']:=\{\xi''\in\mathbf{V}(\mathscr{T}):\xi\le\xi''\le\xi'\}$.

Для $j\in\mathbb{Z}_+$, $\xi\in\mathbf{V}(\mathscr{T})$ обозначим

$$\mathbf{V}_j(\xi):=\mathbf{V}_j^{\mathscr{T}}(\xi):=\{\xi'\ge\xi:\rho_{\mathscr{T}}(\xi,\xi')=j\}.$$

Для вершины $\xi\in\mathbf{V}(\mathscr{T})$ обозначим через $\mathscr{T}_\xi=(\mathscr{T}_\xi,\xi)$ поддерево в $\mathscr{T}$, множеством вершин которого является $\{\xi'\in\mathbf{V}(\mathscr{T}):\xi'\ge\xi\}$. Введенный частичный порядок на дереве $\mathscr{T}$ индуцирует частичный порядок на каждом его поддереве.

Пусть $\mathbf{W}\subset\mathbf{V}(\mathscr{T})$. Будем говорить, что $\mathscr{G}\subset\mathscr{T}$ — максимальный подграф на множестве вершин $\mathbf{W}$, если $\mathbf{V}(\mathscr{G})=\mathbf{W}$ и любые две соседние в $\mathscr{T}$ вершины ξ', $\xi''\in\mathbf{W}$ также соседние в $\mathscr{G}$.

Пусть $\mathscr{G}$ — конечное дизъюнктное объединение деревьев с выделенной вершиной. Частичный порядок на каждом дереве индуцирует частичный порядок на $\mathscr{G}$ (вершины, принадлежащие различным деревьям, считаем несравнимыми). Обозначим через $\mathbf{V}_{\max}(\mathscr{G})$ и $\mathbf{V}_{\min}(\mathscr{G})$ соответственно множество максимальных и минимальных вершин в $\mathscr{G}$.

3. Дискретное неравенство Харди на дереве: предварительные сведения

Пусть $\mathscr{G}$ — дизъюнктное объединение деревьев $(\mathscr{T}_j,\xi_j)$, $1\le j\le k$. Для функции $f:\mathbf{V}(\mathscr{G})\to\mathbb{R}$ положим $\|f\|_{l_p(\mathscr{G})}=\big(\sum\limits_{\xi\in\mathbf{V}(\mathscr{G})}|f(\xi)|^p\big)^{1/p}$ при $1\le p<\infty$, $\|f\|_{l_\infty(\mathscr{G})}=\sup\limits_{\xi\in\mathbf{V}(\mathscr{G})}|f(\xi)|$. Пусть u, $w:\mathbf{V}(\mathscr{G})\to(0,\infty)$ — весовые функции. Определим оператор суммирования $S_{u,w,\mathscr{G}}$ по формуле

$$S_{u,w,\mathscr{G}}f(\xi)=w(\xi)\sum_{\xi'\le\xi}u(\xi')f(\xi'),\quad \xi\in\mathbf{V}(\mathscr{G}),\ f:\mathbf{V}(\mathscr{G})\to\mathbb{R}.$$

Пусть $1\le p,q\le\infty$. Обозначим через $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathscr{G},u,w}$ норму оператора $S_{u,w,\mathscr{G}}:l_p(\mathscr{G})\to l_q(\mathscr{G})$, т. е. минимальную константу C в неравенстве

$$\Big(\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\mathscr{G})}w^q(\xi)\Big|\sum_{\xi'\le\xi}u(\xi')f(\xi')\Big|^q\Big)^{1/q}\le C\Big(\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\mathscr{G})}|f(\xi)|^p\Big)^{1/p},\quad f:\mathbf{V}(\mathscr{G})\to\mathbb{R}.$$

Так как для функций $f\ge 0$ выполнено

$$\|S_{u,w,\mathscr{G}}f\|_{l_q(\mathscr{G})}\ge\Big(\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\mathscr{G})}w^q(\xi)u^q(\xi)f^q(\xi)\Big)^{1/q},$$

то

$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathscr{G},u,w} \geq \begin{cases} \sup\limits_{\xi\in\mathbf{V}(\mathscr{G})} u(\xi)w(\xi), & \text{если } p\leq q,\\ \Big(\sum\limits_{\xi\in\mathbf{V}(\mathscr{G})} (u(\xi)w(\xi))^{\frac{pq}{p-q}}\Big)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & \text{если } p>q. \end{cases} \tag{4}$$

В самом деле, если $p\leq q$, то рассматриваем $f(\xi)=1$ при $\xi=\tilde{\xi}$, $f(\xi)=0$ при $\xi\neq\tilde{\xi}$ и затем берем супремум по $\tilde{\xi}$. При $p>q$ утверждение следует из того, что точная константа в неравенстве Гёльдера равна 1.

В [20] получены двусторонние оценки нормы весового оператора интегрирования на метрическом дереве. Применяя этот результат, можно вывести аналогичные оценки для оператора суммирования при $p\leq q$ (см. [19]). Эти оценки имеют достаточно сложный вид. При дополнительных условиях на веса в [19] были получены более простые и удобные для приложений оценки. Приведем соответствующие результаты.

Теорема A. *Пусть $\mathscr{A}$ — дерево, $1<p<q<\infty$. Предположим, что существуют $K\geq 1$, $l_0\in\mathbb{N}$ и $\lambda\in(0,1)$ такие, что*

$$\operatorname{card}\mathbf{V}^{\mathscr{A}}_1(\xi)\leq K,\quad \xi\in\mathbf{V}(\mathscr{A}), \tag{5}$$

$$\frac{u(\xi')}{u(\xi)}\leq K,\quad \frac{\|w\|_{l_q(\mathscr{A}_{\xi''})}}{\|w\|_{l_q(\mathscr{A}_{\xi})}}\leq\lambda,\quad \xi\in\mathbf{V}(\mathscr{A}),\ \xi'\in\mathbf{V}^{\mathscr{A}}_1(\xi),\ \xi''\in\mathbf{V}^{\mathscr{A}}_{l_0}(\xi). \tag{6}$$

Тогда $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathscr{A},u,w}\underset{K,\lambda,l_0,p,q}{\asymp}\sup\limits_{\xi\in\mathbf{V}(\mathscr{A})}u(\xi)\|w\|_{l_q(\mathscr{A}_\xi)}$.

Теперь рассмотрим случай $p\geq q$.

Пусть $N\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, $(\mathscr{A},\xi_0)$ — дерево такое, что $\mathbf{V}_{\max}(\mathscr{A})=\mathbf{V}^{\mathscr{A}}_N(\xi_0)$. Предположим, что существуют функция $\psi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ и константа $C_*\geq 1$ такие, что $\psi(0)=0$ и для любого $0\leq j\leq j'<N+1$, $\xi\in\mathbf{V}^{\mathscr{A}}_j(\xi_0)$

$$C_*^{-1}\cdot 2^{\psi(j')-\psi(j)}\leq\operatorname{card}\mathbf{V}^{\mathscr{A}}_{j'-j}(\xi)\leq C_*\cdot 2^{\psi(j')-\psi(j)}. \tag{7}$$

Пусть u, $w:\mathbf{V}(\mathscr{A})\to(0,\infty)$,

$$u(\xi)=u_j,\quad w(\xi)=w_j\quad\text{для } \xi\in\mathbf{V}^{\mathscr{A}}_j(\xi_0), \tag{8}$$

$1\leq q\leq p\leq\infty$.

Положим $\widehat{w}_j=w_j\cdot 2^{\frac{\psi(j)}{q}}$, $\hat{u}_j=u_j\cdot 2^{-\frac{\psi(j)}{p}}$, $0\leq j<N+1$. Через $\mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\widehat{w}}$ обозначим минимальную константу C в неравенстве

$$\left(\sum_{j=0}^{N}\widehat{w}_j^q\left(\sum_{i=0}^{j}\hat{u}_i\varphi_i\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq C\left(\sum_{j=0}^{N}\varphi_j^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad \varphi_j\geq 0,\quad 0\leq j<N+1.$$

Теорема B. *Пусть $1\leq q\leq p\leq\infty$ и выполнены условия* (7), (8). *Тогда* $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathscr{A},u,w}\underset{p,q,C_*}{\asymp}\mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}}$; *если $C_*=1$, то* $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathscr{A},u,w}=\mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\widehat{w}}$.

Оценки $\mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\widehat{w}}$ получены в [21–23].

Теорема C. *Пусть $1\leq p,q\leq\infty$, $u=\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $w=\{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — неотрицательные последовательности такие, что*

$$M_{u,w}:=\sup_{m\in\mathbb{Z}_+}\left(\sum_{n=m}^{\infty}w_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{n=0}^{m}u_n^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty\quad \textit{при } 1<p\leq q<\infty,$$

$$M_{u,w} := \left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\left(\sum_{n=m}^{\infty} w_n^q\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=0}^{m} u_n^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right)^{\frac{pq}{p-q}} w_m^q\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} < \infty \text{ при } 1 \le q < p \le \infty.$$

Пусть $\mathfrak{S}^{p,q}_{u,w}$ *— минимальная константа* C *в неравенстве*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|w_n\sum_{k=0}^{n} u_k f_k\right|^q\right)^{1/q} \le C\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}|f_n|^p\right)^{1/p}, \quad \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\in l_p.$$

Тогда $\mathfrak{S}^{p,q}_{u,w} \underset{p,q}{\asymp} M_{u,w}$.

4. Сведение к дискретному неравенству Харди на дереве

Всюду считаем, что функции h, φ_g, φ_v удовлетворяют (3), $r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p} > 0$. Обозначим $\mathfrak{Z} = (p, q, r, d, a, c_0, h, g, v)$.

Пусть $\Theta \subset \Xi\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d\right)$ — семейство попарно не перекрывающихся кубов.

Определение 4. Пусть $\mathscr{G}$ — граф, $F : \mathbf{V}(\mathscr{G}) \to \Theta$ — биекция. Будем говорить, что отображение F *согласовано со структурой графа* $\mathscr{G}$, если выполнено следующее условие: для любых соседних вершин ξ', $\xi'' \in \mathbf{V}(\mathscr{G})$ множество $\Gamma_{\xi',\xi''} := F(\xi') \cap F(\xi'')$ имеет размерность $d - 1$.

Пусть $(\mathscr{T}, \xi_*)$ — дерево, $F : \mathbf{V}(\mathscr{T}) \to \Theta$ — биекция, согласованная со структурой дерева $\mathscr{T}$. Для соседних вершин ξ', ξ'' обозначим $\overset{\circ}{\Gamma}_{\xi',\xi''} = \mathrm{int}_{d-1}\,\Gamma_{\xi',\xi''}$ и для каждого поддерева $\mathscr{T}'$ в $\mathscr{T}$ положим

$$\Omega_{\mathscr{T}',F} = \Bigl(\bigcup_{\xi\in\mathbf{V}(\mathscr{T}')} \mathrm{int}F(\xi)\Bigr) \cup \Bigl(\bigcup_{(\xi',\xi'')\in\mathbf{E}(\mathscr{T}')} \overset{\circ}{\Gamma}_{\xi',\xi''}\Bigr).$$

Сформулируем теорему Уитни о покрытии (см., например, [24, с. 562]).

Теорема D. *Пусть* $\Omega \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$ *— открытое множество. Тогда существует семейство замкнутых попарно не перекрывающихся кубов* $\Theta(\Omega) = \{\Delta_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \Xi\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d\right)$ *со следующими свойствами:*

1) $\Omega = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} \Delta_j$;

2) $\mathrm{dist}(\Delta_j, \partial\Omega) \underset{d}{\asymp} 2^{-\mathbf{m}(\Delta_j)}$;

3) *если* $\dim(\Delta_i \cap \Delta_j) = d - 1$, *то* $\mathbf{m}(\Delta_j) - 2 \le \mathbf{m}(\Delta_i) \le \mathbf{m}(\Delta_j) + 2$.

Пусть $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$. Обозначим через $\Theta(\Omega)$ покрытие из теоремы D . В [25] доказана следующая

Лемма 1. *Пусть* $a > 0, \Omega \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d, \Omega \in \mathbf{FC}(a)$. *Тогда существуют дерево* $\mathscr{T}$ *с корнем и отображение* $F : \mathbf{V}(\mathscr{T}) \to \Theta(\Omega)$, *согласованное со структурой дерева* $\mathscr{T}$, *со следующим свойством: для любого поддерева* $\mathscr{T}'$ *в дереве* $\mathscr{T}$

$$\Omega_{\mathscr{T}',F} \in \mathbf{FC}(b_*), \quad \text{где } b_* = b_*(a, d) > 0.$$

Пусть $\{(\mathscr{D}_{j,i}, \hat\xi_{j,i})\}_{j\ge j_*, i\in\widetilde{I}_j}$ — разбиение дерева $\mathscr{T}$ на непустые поддеревья. Будем говорить, что *дерево* $\mathscr{D}_{j',i'}$ *следует за деревом* $\mathscr{D}_{j,i}$, если $\hat\xi_{j,i} < \hat\xi_{j',i'}$ и $\{\xi \in \mathscr{T} : \hat\xi_{j,i} \le \xi < \hat\xi_{j',i'}\} \subset \mathbf{V}(\mathscr{D}_{j,i})$. Назовем это разбиение *регулярным*, если $j' = j+1$ для любых j, $j' \ge j_*$, $i \in \widetilde{I}_j$, $i' \in \widetilde{I}_{j'}$ таких, что $\mathscr{D}_{j',i'}$ следует за деревом $\mathscr{D}_{j,i}$.

В [16] были определены регулярное разбиение $\{(\mathscr{D}_{j,i}, \hat{\xi}_{j,i})\}_{j\ge j_*, i\in \tilde{I}_j}$ дерева $\mathscr{T}$ и число $\bar{s} = \bar{s}(a,d) \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) для любых $j \ge j_*$, $i \in \widetilde{I}_j$

$$\operatorname{diam} \Omega_{\mathscr{D}_{j,i},F} \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\bar{s}j}; \tag{9}$$

2) для любого $x \in \Omega_{\mathscr{D}_{j,i},F}$

$$\operatorname{dist}_{|\cdot|}(x, \Gamma) \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\bar{s}j}. \tag{10}$$

При этом можно считать, что $\bar{s} \ge 4$ и $\widetilde{I}_{j_*} = \{1\}$. Отметим также, что поскольку $\mathscr{D}_{j,i} \subset \Omega_{\mathscr{T}_{\hat{\xi}_{j,i}},F}$ и $\Omega_{\mathscr{T}_{\hat{\xi}_{j,i}},F} \in \mathbf{FC}(b_*)$ (см. лемму 1), из (1) и (9) следует, что

$$\operatorname{diam} \Omega_{\mathscr{T}_{\hat{\xi}_{j,i}},F} \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\bar{s}j}. \tag{11}$$

Для $j \ge j_*$, $t \in \widetilde{I}_j$, $l \in \mathbb{Z}_+$ определяем $\widetilde{I}^l_{j,t}$ по формуле

$$\widetilde{I}^l_{j,t} = \{i \in \widetilde{I}_{j+l} :, \hat{\xi}_{j+l,i} \ge \hat{\xi}_{j,t}\}. \tag{12}$$

Пусть $\mathscr{A}$ — дерево с множеством вершин $\{\eta_{j,i}\}_{j\ge j_*, i\in \widetilde{I}_j}$ и множеством ребер, определенных равенствами $\mathbf{V}^{\mathscr{A}}_1(\eta_{j,i}) = \{\eta_{j+1,s}\}_{s\in \widetilde{I}^1_{j,i}}$.

В [18] доказано, что

$$\mathbf{V}^{\mathscr{A}}_l(\eta_{j,i}) = \bigl\{\eta_{j+l,t} : t \in \widetilde{I}^l_{j,i}\bigr\}, \quad \operatorname{card} \mathbf{V}^{\mathscr{A}}_l(\eta_{j,i}) \le K_0 \frac{h(2^{-\bar{s}j})}{h(2^{-\bar{s}(j+l)})}, \quad j,l \in \mathbb{Z}_+, \tag{13}$$

где $K_0 = K_0(\mathfrak{Z})$.

Обозначим через $\mathscr{P}_{r-1}(\mathbb{R}^d)$ пространство полиномов на $\mathbb{R}^d$ степени не выше $r-1$. Для измеримого подмножества $E \subset \mathbb{R}^d$ положим

$$\mathscr{P}_{r-1}(E) = \{f|_E : f \in \mathscr{P}_{r-1}(\mathbb{R}^d)\}.$$

Пусть

$$u(\eta_{j,i}) = u_j = \varphi_g(2^{-\bar{s}j}) \cdot 2^{-(r-\frac{d}{p})\bar{s}j}, \quad w(\eta_{j,i}) = w_j = \varphi_v(2^{-\bar{s}j}) \cdot 2^{-\frac{d\bar{s}j}{q}}, \tag{14}$$

$$\Omega[\eta_{j,i}] := \Omega_{j,i} := \Omega_{\mathscr{D}_{j,i},F}. \tag{15}$$

Далее, если $\mathscr{D} \subset \mathscr{A}$ — поддерево, то положим $\Omega[\mathscr{D}] = \bigcup\limits_{\xi\in \mathbf{V}(\mathscr{D})} \Omega[\xi]$.

Следующая теорема доказывается так же, как теорема 2 из [18], с учетом (4).

Теорема 1. *Пусть функции u, w определены формулой (14), $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathscr{A},u,w} < \infty$. Тогда $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$ и для любой вершины $\xi_* \in \mathbf{V}(\mathscr{A})$ существует линейный непрерывный оператор $P : L_{q,v}(\Omega) \to \mathscr{P}_{r-1}(\Omega)$ такой, что для любого поддерева $\mathscr{D} \subset \mathscr{A}$ с минимальной вершиной ξ_* и для любой функции $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$ выполнено*

$$\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega[\mathscr{D}])} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathscr{D},u,w} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega[\mathscr{D}])}.$$

В случае $1 < p < q < \infty$ получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть u, w определены формулой* (14), $1 < p < q < \infty$. *Предположим, что существуют $l_0 \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in (0,1)$ такие, что*

$$\frac{\|w\|_{l_q(\mathscr{A}_{\xi'})}}{w(\xi)} \le \lambda, \quad \xi \in \mathbf{V}(\mathscr{A}), \ \xi' \in \mathbf{V}^{\mathscr{A}}_{l_0}(\xi). \tag{16}$$

Пусть $\sup\limits_{\xi \in \mathbf{V}(\mathscr{A})} u(\xi)\|w\|_{l_q(\mathscr{A}_\xi)} < \infty$. *Тогда* $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$ *и для любой вершины* $\xi_* \in \mathbf{V}(\mathscr{A})$ *существует линейный непрерывный оператор* $P : L_{q,v}(\Omega) \to \mathscr{P}_{r-1}(\Omega)$ *такой, что для любого поддерева* $\mathscr{D} \subset \mathscr{A}$ *с минимальной вершиной* ξ_* *и для любой функции* $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$ *выполнено*

$$\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega[\mathscr{D}])} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} \sup_{\xi \in \mathbf{V}(\mathscr{D})} u(\xi)\|w\|_{l_q(\mathscr{D}_\xi)} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega[\mathscr{D}])}.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно проверить условия теоремы A. Соотношение (5) и первое неравенство (6) следует из (13), (14) и (3), второе соотношение (6) — из (16). □

Применяя (13), получаем

Следствие 1. *Пусть u, w определены формулой* (14), $1 < p < q < \infty$. *Предположим, что существуют $l_0 \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in (0,1)$ такие, что*

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=j+l_0}^{\infty} \frac{h(2^{-\bar{s}(j+l_0)})}{h(2^{-\bar{s}i})} w_i^q\right)^{1/q}}{w_j} \le \lambda, \quad j \ge j_*.$$

Пусть

$$\sup_{j \ge j_*} u_j \left(\sum_{i=j}^{\infty} \frac{h(2^{-\bar{s}j})}{h(2^{-\bar{s}i})} w_i^q\right)^{1/q} < \infty.$$

Тогда $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$ *и для любого* $j_0 \ge j_*$ *и любой вершины* $\xi_* \in \mathbf{V}^{\mathscr{A}}_{j_0-j_*}(\eta_{j_*,1})$ *существует линейный непрерывный оператор* $P : L_{q,v}(\Omega) \to \mathscr{P}_{r-1}(\Omega)$ *такой, что для любого поддерева* $\mathscr{D} \subset \mathscr{A}$ *с минимальной вершиной* ξ_* *и для любой функции* $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$ *выполнено*

$$\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega[\mathscr{D}])} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} \sup_{j \ge j_0} u_j \left(\sum_{i \ge j} \frac{h(2^{-\bar{s}j})}{h(2^{-\bar{s}i})} w_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega[\mathscr{D}])}.$$

Рассмотрим случай $p \ge q$.

Для дерева $(\mathscr{D}, \xi_0)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $[\mathscr{D}]_{\le n}$ поддерево в $\mathscr{D}$ такое, что

$$\mathbf{V}([\mathscr{D}]_{\le n}) = \bigcup_{j=0}^{n} \mathbf{V}^{\mathscr{D}}_j(\xi_0);$$

кроме того, положим

$$\mathbf{V}_{\ge n}(\mathscr{D}) = \bigcup_{j \ge n} \mathbf{V}^{\mathscr{D}}_j(\xi_0).$$

Если граф $\mathscr{G}$ является дизъюнктным объединением деревьев $(\mathscr{D}_i, \xi_i)$, $1 \le i \le m$, то полагаем $\mathbf{V}_{\ge n}(\mathscr{G}) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathbf{V}_{\ge n}(\mathscr{D}_i)$.

Пусть $\xi_* = \eta_{j_0,i_0} \in \mathbf{V}(\mathscr{A})$, $\mathscr{D} = [\mathscr{A}_{\xi_*}]_{\le N-j_0}$. Получим оценку сверху для величины $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathscr{D},u,w}$, пользуясь результатами из § 3. Отметим, что дерево $\mathscr{D}$ может не удовлетворять условию (7): из (13) следует только оценка сверху для количества вершин. Поэтому нам понадобятся дополнительные построения.

Пространством однородного типа называется множество X с квазиметрикой ρ и неотрицательной борелевской мерой μ такой, что

$$\mu(B(x,2R)) \le A_1\mu(B(x,R)),$$

где $B(x,R)$ — шар радиуса R с центром в точке x и A_1 не зависит от x, R. В частности, если функция $h \in \mathbb{H}$ удовлетворяет (3), то h-множество в $\mathbb{R}^d$ (с метрикой, индуцированной стандартной метрикой на $\mathbb{R}^d$, и мерой μ из определения 3) является пространством однородного типа.

В [26] построено разбиение пространства однородного типа на множества, являющиеся аналогами диадических кубов. Сформулируем частный случай этого результата для h-множества $\Gamma \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$.

Теорема E. *Для любого $m \ge 4$ существует семейство открытых в Γ подмножеств $\{\Delta_{j,i}\}_{j\in\mathbb{Z}_+, i\in\widehat{I}_j} \subset \Gamma$ со следующими свойствами:*

1) $\mu\bigl(\Gamma\setminus \bigcup\limits_{i\in\widehat{I}_j} \Delta_{j,i}\bigr) = 0$, $j \in \mathbb{Z}_+$;

2) *если $l \ge k$, то либо $\Delta_{l,i} \subset \Delta_{k,t}$, либо $\Delta_{l,i} \cap \Delta_{k,t} = \varnothing$;*

3) *для любого (j,i) и $l < j$ существует единственное $t \in \widehat{I}_l$ такое, что $\Delta_{l,t} \supset \Delta_{j,i}$;*

4) $\operatorname{diam}\Delta_{j,i} \lesssim 2^{-mj}$;

5) *каждое множество $\Delta_{j,i}$ содержит шар множества Γ радиуса $R_j \asymp 2^{-mj}$ (т. е. существует $z_{j,i} \in \Gamma$ такое, что $\{x \in \Gamma : |x - z_{j,i}| \le R_j\} \subset \Delta_{j,i}$).*

При этом можно считать, что $\widehat{I}_0 = \{1\}$.

Замечание 2. Условие $m \ge 4$ получается из оценок, возникающих при доказательстве теоремы в частном случае, когда квазиметрика является метрикой (см. с. 608, 609 работы [26]).

Замечание 3. Из (2) и утверждения 1 теоремы E следует, что $\bigcup\limits_{i\in\widehat{I}_j} \Delta_{j,i}$ всюду плотно в Γ.

Семейству множеств $\{\Delta_{j,i}\}_{j\in\mathbb{Z}_+, i\in\widehat{I}_j}$ соответствует дерево $\widehat{\mathscr{A}} = \widehat{\mathscr{A}}(m)$ с множеством вершин $\{\zeta_{j,i}\}_{j\in\mathbb{Z}_+, i\in\widehat{I}_j}$ такое, что $\zeta_{j',i'} \in \mathbf{V}_1^{\widehat{\mathscr{A}}}(\zeta_{j,i})$ тогда и только тогда, когда $j' = j+1$ и $\Delta_{j',i'} \subset \Delta_{j,i}$.

Пусть $m = \bar{s}(a,d)$ (напомним, что $\bar{s} \ge 4$).

Предложение 1. *Выполнено соотношение*

$$\operatorname{card}\mathbf{V}^{\widehat{\mathscr{A}}}_{j''-j'}(\zeta) \underset{a,d,c_0}{\asymp} \frac{h(2^{-\bar{s}j'})}{h(2^{-\bar{s}j''})}, \quad j'' \ge j',\ \zeta \in \mathbf{V}^{\widehat{\mathscr{A}}}_{j'}(\zeta_{0,1}). \tag{17}$$

Доказательство. В самом деле, пусть $\zeta = \zeta_{j',i}$. Тогда

$$\operatorname{card}\mathbf{V}^{\widehat{\mathscr{A}}}_{j''-j'}(\zeta) = \operatorname{card}\{t \in \widehat{I}_{j''} : \Delta_{j'',t} \subset \Delta_{j',i}\}.$$

Из теоремы E (пп. 4, 5), (2) и (3) следует, что

$$\mu(\Delta_{j',i}) \underset{a,d,c_0}{\asymp} h(2^{-\bar{s}j'}), \quad \mu(\Delta_{j'',t}) \underset{a,d,c_0}{\asymp} h(2^{-\bar{s}j''}),$$

а из пп. 1, 2 теоремы E — что

$$\sum_{t:\Delta_{j'',t}\subset\Delta_{j',i}} \mu(\Delta_{j'',t}) = \mu(\Delta_{j',i}).$$

Отсюда получаем (17). $\square$

Лемма 2. *Пусть* $\xi_* = \eta_{j_0,t_0} \in \mathbf{V}(\mathscr{A})$, $j_0 < N < \infty$, $\mathscr{D} = [\mathscr{A}_{\xi_*}]_{\le N-j_0}$, u_*, w_* : $\mathbf{V}(\widehat{\mathscr{A}}) \to (0,\infty)$, $u_*(\zeta_{j,i}) = u_j$, $w_*(\zeta_{j,i}) = w_j$, *где* u_j, w_j *определены формулой* (14). *Тогда существует* $i_0 \in \widehat{I}_{j_0}$ *такое, что для дерева* $\mathscr{D}_* = \widehat{\mathscr{A}_{\zeta_{j_0,i_0}}} \cap [\widehat{\mathscr{A}}]_{\le N}$ *выполнено* $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathscr{D},u,w} \underset{a,d,c_0,p,q}{\lesssim} \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathscr{D}_*,u_*,w_*}$.

Перед тем как доказывать эту лемму, введем некоторые обозначения.

Пусть $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}_1, \dots, \mathscr{T}_k$ — деревья, не имеющие общих вершин, $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbf{V}(\mathscr{T})$, $\eta_j \in \mathbf{V}(\mathscr{T}_j)$, $j = 1, \dots, k$ ($k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$). Обозначим через $\mathbf{J}(\mathscr{T}, \mathscr{T}_1, \dots, \mathscr{T}_k; \xi_1, \eta_1, \dots, \xi_k, \eta_k)$ дерево, получающееся из $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}_1, \dots, \mathscr{T}_k$ соединением ребром вершин ξ_j и η_j, $j = 1, \dots, k$.

Пусть $(\mathscr{D}, \zeta_*)$ — дерево, $\xi \in \mathbf{V}(\mathscr{D})$, $n \in \mathbb{N}$, $T = \{A_1, \dots, A_n\}$ — разбиение $\mathbf{V}^{\mathscr{D}}_1(\xi)$ на непустые множества, $A_j = \{\omega_{j,i}\}_{i=1}^{k_j}$. Определим граф $G_{\xi,T}(\mathscr{D})$ следующим образом.

1. Пусть $\xi = \zeta_*$. Возьмем множество $\{\eta_j\}_{j=1}^n$, не пересекающееся с $\mathbf{V}(\mathscr{D})$. Через $G_{\xi,T}(\mathscr{D})$ обозначим граф, являющийся дизъюнктным объединением деревьев $\widetilde{\mathscr{D}}_j := \mathbf{J}(\{\eta_j\}, \mathscr{D}_{\omega_{j,1}}, \dots, \mathscr{D}_{\omega_{j,k_j}}; \eta_j, \omega_{j,1}, \dots, \eta_j, \omega_{j,k_j})$ с корнем η_j, $1 \le j \le n$.

2. Пусть $\xi > \zeta_*$, η — вершина, предшествующая ξ. Положим

$$G_{\xi,T}(\mathscr{D}) = \mathbf{J}(\mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_\xi, \widetilde{\mathscr{D}}_1, \dots, \widetilde{\mathscr{D}}_n; \eta, \eta_1, \dots, \eta, \eta_n),$$

где вершины η_j и деревья $\widetilde{\mathscr{D}}_j$ определены в п. 1 для дерева $\mathscr{D}_\xi$. В качестве корня дерева $G_{\xi,T}(\mathscr{D})$ берем ζ_*.

Замечание 4. Выполнены равенства

$$\mathbf{V}_{\max}(G_{\xi,T}(\mathscr{D})) = \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{D}), \quad \mathbf{V}_1^{G_{\xi,T}(\mathscr{D})}(\eta_j) = A_j, \quad 1 \le j \le n.$$

Пусть $\bar u, \overline{w} : \mathbf{V}(\mathscr{D}) \to (0,\infty)$, $\xi \in \mathbf{V}(\mathscr{D})$, $T = \{A_1, \dots, A_n\}$ — разбиение $\mathbf{V}^{\mathscr{D}}_1(\xi)$ на непустые множества. Определим веса $\bar u_{\xi,T}$ и $\overline{w}_{\xi,T}$ на графе $G_{\xi,T}(\mathscr{D})$ следующим образом. Если $\zeta \in \mathbf{V}(\mathscr{D})\backslash\mathbf{V}(\mathscr{D}_\xi)$ или $\zeta \in \bigcup\limits_{j=1}^n \bigcup\limits_{i=1}^{k_j} \mathbf{V}(\mathscr{D}_{\omega_{j,i}})$, то полагаем $\bar u_{\xi,T}(\zeta) = u(\zeta)$, $\overline{w}_{\xi,T}(\zeta) = w(\zeta)$; если $\zeta = \eta_j$ для некоторого $j \in \{1, \dots, n\}$, то полагаем $\bar u_{\xi,T}(\eta_j) = n^{\frac1p} u(\xi)$, $\overline{w}_{\xi,T}(\eta_j) = n^{-\frac1q} w(\xi)$.

В [19] доказано следующее утверждение.

Лемма 3. *Для любых* $1 \le p, q \le \infty$ *выполнена оценка*

$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathscr{D},\bar u,\overline{w}} \le \mathfrak{S}^{p,q}_{G_{\xi,T}(\mathscr{D}),\bar u_{\xi,T},\overline{w}_{\xi,T}}.$$

Следствие 2. *Пусть* $(\mathscr{D}, \xi_*)$ — *дерево*, $\bar u, \overline{w} : \mathbf{V}(\mathscr{D}) \to (0,\infty)$. *Пусть* $j \in \mathbb{Z}_+$, $\mathbf{V}^{\mathscr{D}}_j(\xi_*)\backslash\mathbf{V}_{\max}(\mathscr{D}) = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$, T_k — *разбиения множеств* $\mathbf{V}^{\mathscr{D}}_1(\xi_k)$, $\operatorname{card} T_k \le C$, $1 \le k \le m$. *Положим*

$$\widetilde{\mathscr{D}} = G_{\xi_m,T_m}(\dots G_{\xi_2,T_2}(G_{\xi_1,T_1}(\mathscr{D}))),$$

$$\tilde u = (((\bar u)_{\xi_1,T_1})_{\xi_2,T_2}\dots)_{\xi_m,T_m}, \quad \widetilde{w} = (((\overline{w})_{\xi_1,T_1})_{\xi_2,T_2}\dots)_{\xi_m,T_m}.$$

Обозначим $\mathbf{W} = \mathbf{V}_j^{\widetilde{\mathscr{D}}}(\xi_*)\backslash\mathbf{V}_{\max}(\widetilde{\mathscr{D}})$, *если* $j \ge 1$, *и* $\mathbf{W} = \mathbf{V}_{\min}(\widetilde{\mathscr{D}})$, *если* $j = 0$. *Тогда*

1) $\mathbf{V}_{\max}(\widetilde{\mathscr{D}}) = \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{D})$, $\mathbf{V}(\widetilde{\mathscr{D}})\backslash\mathbf{W} = \mathbf{V}(\mathscr{D})\backslash l(\mathbf{V}_j^{\mathscr{D}}(\xi_*)\backslash\mathbf{V}_{\max}(\mathscr{D})r)$;

2) $[\widetilde{\mathscr{D}}]_{\le j-1} = [\mathscr{D}]_{\le j-1}$, $\mathbf{V}_{\ge j'}(\widetilde{\mathscr{D}}) = \mathbf{V}_{\ge j'}(\mathscr{D})$, $j' \ge j+1$, *и для любого* $\xi \in \mathbf{V}([\mathscr{D}]_{\le j-1})$ *выполнено* $\mathbf{V}_{\max}(\widetilde{\mathscr{D}}) \cap \mathbf{V}(\widetilde{\mathscr{D}}_\xi) = \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{D}) \cap \mathbf{V}(\mathscr{D}_\xi)$;

3) *для любой вершины* $\xi \in \mathbf{W}$ *найдется* $k \in \{1, \dots, m\}$ *такое, что* $\mathbf{V}_1^{\widetilde{\mathscr{D}}}(\xi) \in T_k$;

4) *если* $\xi \in \mathbf{V}(\widetilde{\mathscr{D}})\backslash\mathbf{W}$, *то* $\xi \in \mathbf{V}(\mathscr{D})$ *и* $\tilde{u}(\xi) = \bar{u}(\xi)$, $\widetilde{w}(\xi) = \overline{w}(\xi)$; *если* $\xi \in \mathbf{W}$, *то* $\tilde{u}(\xi) \underset{C}{\asymp} \bar{u}(\xi)$, $\tilde{w}(\xi) \underset{C}{\asymp} \overline{w}(\xi)$;

5) $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathscr{D},\bar{u},\overline{w}} \le \mathfrak{S}^{p,q}_{\widetilde{\mathscr{D}},\tilde{u},\widetilde{w}}$.

Доказательство леммы 2. Положим $\Theta_j = \{\Delta_{j,t}\}_{t \in \widehat{I}_j}$ (см. теорему E).

Шаг 1. Пусть ξ — максимальная вершина дерева $\mathscr{D}$, $\xi \in \mathbf{V}^{\mathscr{D}}_{j-j_0}(\xi_*)$, $j_0+1 \le j \le N$. Из (10), (15) и замечания 3 следует, что существует множество $\Delta(\xi) \in \Theta_j$ такое, что

$$\operatorname{dist}(\Omega[\xi], \Delta(\xi)) \underset{a,d}{\lesssim} 2^{-\bar{s}j}. \tag{18}$$

Обозначим $\Phi(\xi) = \{\Delta(\xi)\}$.

Пусть $\xi \in \mathbf{V}^{\mathscr{D}}_{j-j_0}(\xi_*)$ не максимальна. Положим

$$\Phi(\xi) = \{K \in \Theta_j : \exists \zeta \in \mathbf{V}(\mathscr{D}_\xi) \cap \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{D}), \Delta(\zeta) \subset K\}. \tag{19}$$

Пусть $K \in \Phi(\xi)$, вершина ζ такая, как в (19). Тогда $\zeta \ge \xi$, так что $\zeta = \eta_{j',i'}$, $j' \ge j$, $i' \in \widetilde{I}_{j'}$, и $\Omega[\zeta] \subset \Omega_{\mathscr{T}_{\hat{\xi}_{j,i}},F}$ в силу (12), (13) и (15). Из (9), (11) и (15) следует, что

$$\operatorname{diam}\Omega[\xi] \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\bar{s}j}, \quad \operatorname{diam}\Omega[\zeta] \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\bar{s}j'}, \quad \operatorname{dist}(\Omega[\zeta], \Omega[\xi]) \underset{a,d}{\lesssim} 2^{-\bar{s}j}. \tag{20}$$

Поэтому

$$\operatorname{dist}(K, \Omega[\xi]) \overset{(19)}{\le} \operatorname{dist}(\Delta(\zeta), \Omega[\zeta]) + \operatorname{diam}\Omega[\zeta] + \operatorname{dist}(\Omega[\zeta], \Omega[\xi]) \underset{a,d,c_0}{\overset{(18),(20)}{\lesssim}} 2^{-\bar{s}j}. \tag{21}$$

В силу (19)–(21) и п. 4 теоремы E

$$\operatorname{diam}\{x \in K : K \in \Phi(\xi)\} \underset{a,d,c_0}{\lesssim} 2^{-\bar{s}j}.$$

С другой стороны, элементы Θ_j попарно не пересекаются и содержат шар в Γ радиуса $R_j \asymp 2^{-\bar{s}j}$ (см. п. 5 теоремы E). Попарные расстояния между центрами этих шаров больше R_j, поэтому

$$\operatorname{card}\Phi(\xi) \underset{a,d,c_0}{\lesssim} 1. \tag{22}$$

Шаг 2. Построим граф $\mathscr{G}_{j_0}$ и функции $u^{(j_0)}$, $w^{(j_0)} : \mathbf{V}(\mathscr{G}_{j_0}) \to (0, \infty)$ со следующими свойствами:

1) $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathscr{D},u,w} \le \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathscr{G}_{j_0},u^{(j_0)},w^{(j_0)}}$;

2) $\mathscr{G}_{j_0}$ является конечным объединением деревьев $(\widetilde{\mathscr{D}}_l, \tilde{\xi}_l)$, $1 \le l \le l_* \underset{a,d,c_0}{\lesssim} 1$, таких, что $\mathbf{V}_k^{\widetilde{\mathscr{D}}_l}(\tilde{\xi}_l) = \varnothing$ при $k > N - j_0$;

3) если $\xi \in \mathbf{V}^{\widetilde{\mathscr{D}}_l}_{j'-j_0}(\tilde{\xi}_l)$, $j_0 \le j' \le N$, то $u^{(j_0)}(\xi) \underset{a,d,c_0}{\asymp} u_{j'}$, $w^{(j_0)}(\xi) \underset{a,d,c_0}{\asymp} w_{j'}$;

4) существует отображение $K_{j_0} : \mathbf{V}(\mathscr{G}_{j_0}) \to \bigcup\limits_{j'=j_0}^{N} \Theta_{j'}$ со следующими свойствами:

(a) если $\xi \in \mathbf{V}^{\widetilde{\mathscr{D}}_l}_{j'-j_0}(\tilde{\xi}_l)$ для некоторого $l \in \{1, \dots, l_*\}$, $j_0 \le j' \le N$, то $K_{j_0}(\xi) \in \Theta_{j'}$;

(b) если $\xi < \xi'$, $\xi, \xi' \in \mathbf{V}(\mathscr{G}_{j_0})$, то $K_{j_0}(\xi) \supset K_{j_0}(\xi')$;

(c) для любого $j_0 \le j' \le N$, $1 \le l \le l_*$, $Q \in \Theta_{j'}$ выполнено

$$\operatorname{card}\bigl\{\xi \in \mathbf{V}^{\widetilde{\mathscr{D}}_l}_{j'-j_0}(\tilde{\xi}_l) : K_{j_0}(\xi) = Q\bigr\} \underset{a,d,c_0}{\lesssim} 1.$$

Этот граф будет получен на последнем шаге индукционного построения, которое описано ниже.

Шаг 3. Для $j_0 \le j \le N$ определим граф $\mathscr{G}_j$ и функции $u^{(j)}$, $w^{(j)} : \mathbf{V}(\mathscr{G}_j) \to (0, \infty)$ со следующими свойствами:

1) $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathscr{D},u,w} \le \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathscr{G}_j,u^{(j)},w^{(j)}}$;

2) если $j \ge j_0 + 1$, то $\mathscr{G}_j$ является деревом с минимальной вершиной ξ_*, $\mathbf{V}^{\mathscr{G}_j}_k(\xi_*) = \varnothing$ при $k > N - j_0$, $[\mathscr{G}_j]_{\le j-1-j_0} = [\mathscr{D}]_{\le j-1-j_0}$, $u^{(j)}(\xi) = u(\xi)$, $w^{(j)}(\xi) = w(\xi)$ для $\xi \in \mathbf{V}([\mathscr{G}_j]_{\le j-1-j_0})$;

3) если $j = j_0$, то $\mathscr{G}_{j_0}$ является конечным объединением деревьев $(\widetilde{\mathscr{D}}_l, \tilde{\xi}_l)$, $1 \le l \le l_* \underset{a,d,c_0}{\lesssim} 1$, таких, что $\mathbf{V}^{\widetilde{\mathscr{D}}_l}_k(\tilde{\xi}_l) = \varnothing$ при $k > N - j_0$;

4) $\mathbf{V}_{\max}(\mathscr{G}_j) = \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{D})$ и для любой вершины $\xi \in [\mathscr{G}_j]_{\le j-1-j_0}$ выполнено $\mathbf{V}_{\max}(\mathscr{G}_j) \cap \mathbf{V}((\mathscr{G}_j)_\xi) = \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{D}) \cap \mathbf{V}(\mathscr{D}_\xi)$;

5) $\mathbf{V}_{\ge j'-j_0}(\mathscr{G}_j) = \mathbf{V}_{\ge j'-j_0}(\mathscr{G}_{j'})$, $j' \ge j$;

6) если $\xi_{**} \in \mathbf{V}_{\min}(\mathscr{G}_j)$, $\xi \in \mathbf{V}^{\mathscr{G}_j}_{j'-j_0}(\xi_{**})$, $j \le j' \le N$, то $u^{(j)}(\xi) \underset{a,d,c_0}{\asymp} u_{j'}$, $w^{(j)}(\xi) \underset{a,d,c_0}{\asymp} w_{j'}$;

7) существует отображение $K_j : \mathbf{V}_{\ge j-j_0}(\mathscr{G}_j) \to \bigcup\limits_{j'=j}^{N} \Theta_{j'}$ со следующими свойствами:

(a) $K_j|_{\mathbf{V}_{\ge j'-j_0}(\mathscr{G}_{j'})} = K_{j'}$, $j \le j' \le N$; если $\xi_{**} \in \mathbf{V}_{\min}(\mathscr{G}_j)$, $\xi \in \mathbf{V}^{\mathscr{G}_j}_{j'-j_0}(\xi_{**})$, то $K_j(\xi) \in \Theta_{j'}$;

(b) если $\zeta \in \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{G}_j)$, то $K_j(\zeta) = \Delta(\zeta)$;

(c) если $\xi < \xi'$, $\xi \in \mathbf{V}_{\ge j-j_0}(\mathscr{G}_j)$, то $K_j(\xi) \supset K_j(\xi')$;

(d) если $j \ge j_0 + 1$, то для любого $\xi \in \mathbf{V}^{\mathscr{G}_j}_{j-1-j_0}(\xi_*) \backslash \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{G}_j)$ существуют разбиение T_ξ множества $\mathbf{V}^{\mathscr{G}_j}_1(\xi)$ на непустые подмножества и биекция $b_\xi : \Phi(\xi) \to T_\xi$ такая, что

$$b_\xi(\Delta) = \bigl\{\xi' \in \mathbf{V}^{\mathscr{G}_j}_1(\xi) : K_j(\xi') \subset \Delta\bigr\}; \qquad (23)$$

(e) если $\xi_{**} \in \mathbf{V}_{\min}(\mathscr{G}_j)$, $\xi \in \mathbf{V}^{\mathscr{G}_j}_{j-j_0}(\xi_{**})$, то существует такая вершина $\xi' \in \mathbf{V}^{\mathscr{D}}_{j-j_0}(\xi_*)$, что $K_j(\xi) \in \Phi(\xi')$; при этом если $\xi \in \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{G}_j)$, то $\xi' = \xi$, а если $\xi \notin \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{G}_j)$, то $\xi' \notin \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{G}_{j+1})$ и $b_{\xi'}(K_j(\xi)) = \mathbf{V}^{\mathscr{G}_j}_1(\xi)$, где биекция $b_{\xi'}$ определена в соответствии с п. 7(d) для $j+1$;

(f) для любых $\xi_{**} \in \mathbf{V}_{\min}(\mathscr{G}_j)$, $j' \ge j$, $Q \in \Theta_{j'}$ выполнено

$$\operatorname{card}\bigl\{\xi \in \mathbf{V}^{\mathscr{G}_j}_{j'-j_0}(\xi_{**}) : K_j(\xi) = Q\bigr\} \underset{a,d,c_0}{\lesssim} 1.$$

(Если $j = j_0$ и $\xi_{**} = \tilde{\xi}_l$, то $\mathbf{V}^{\mathscr{G}_j}_{j'-j_0}(\xi_{**}) = \mathbf{V}^{\widetilde{\mathscr{D}}_l}_{j'-j_0}(\tilde{\xi}_l)$.)

Проведем индукцию по j.

База индукции. Положим $\mathscr{G}_N = \mathscr{D}$, $u^{(N)} = u$, $w^{(N)} = w$, $K_N(\xi) = \Delta(\xi)$, $\xi \in \mathbf{V}^{\mathscr{D}}_{N-j_0}(\xi_*)$. Достаточно проверить свойства 7(d) и 7(f).

Докажем 7(d). Для $\xi \in \mathbf{V}^{\mathscr{D}}_{N-1-j_0}(\xi_*)\backslash \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{D})$, $K \in \Phi(\xi)$ положим $b_\xi(K) = \bigl\{\zeta \in \mathbf{V}^{\mathscr{D}}_1(\xi) : K \supset \Delta(\zeta)\bigr\}$. В силу (19) множество $b_\xi(K)$ непусто и для любого $\zeta \in \mathbf{V}^{\mathscr{D}}_1(\xi)$ найдется множество $K \in \Phi(\xi)$ такое, что $\zeta \in b_\xi(K)$ (см. также п. 3 теоремы E). Если K_1, $K_2 \in \Phi(\xi)$, $K_1 \ne K_2$, то $K_1 \cap K_2 = \varnothing$ в силу п. 2 теоремы E. Значит, $b_\xi(K_1) \cap b_\xi(K_2) = \varnothing$. Тем самым $T_\xi := \{b_\xi(K) : K \in \Phi(\xi)\}$ является разбиением множества $\mathbf{V}^{\mathscr{D}}_1(\xi)$ и отображение b_ξ биективно.

Докажем 7(f). Пусть $Q \in \Theta_N$. В силу п. 4 теоремы E $\operatorname{diam} Q \lesssim 2^{-\bar{s}N}$. С другой стороны, если $\zeta \in \mathbf{V}^{\mathscr{D}}_{N-j_0}(\xi_*)$, то в силу (1), (9), (15) множество $\Omega[\zeta]$ содержит шар радиуса $\widetilde{R} \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\bar{s}N}$ и $\operatorname{diam}\Omega[\zeta] \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\bar{s}N}$. Отсюда и из (18) получаем утверждение (оценивается количество вершин $\zeta \in \mathbf{V}^{\mathscr{D}}_{N-j_0}(\xi_*)$ таких, что $Q = \Delta(\zeta)$).

Индукционный переход. Пусть для $j_0 \le j \le N-1$ построены граф $\mathscr{G}_{j+1}$ и функции $u^{(j+1)}$, $w^{(j+1)} : \mathbf{V}(\mathscr{G}_{j+1}) \to (0, \infty)$ со свойствами 1–7. Определим граф $\mathscr{G}_j$.

Пусть $\mathbf{V}^{\mathscr{G}_{j+1}}_{j-j_0}(\xi_*)\backslash \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{G}_{j+1}) = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$. Определим разбиения T_{ξ_k} множества $\mathbf{V}^{\mathscr{G}_{j+1}}_1(\xi_k)$ $(1 \le k \le m)$ и биекцию $b_{\xi_k} : \Phi(\xi_k) \to T_{\xi_k}$ в соответствии со свойством 7(d) дерева $\mathscr{G}_{j+1}$ и отображения K_{j+1}. Отметим, что

$$\operatorname{card} T_{\xi_k} = \operatorname{card}\Phi(\xi_k) \underset{a,d,c_0}{\overset{(22)}{\lesssim}} 1. \tag{24}$$

Положим

$$\mathscr{G}_j = G_{\xi_m, T_{\xi_m}}(\dots G_{\xi_2, T_{\xi_2}}(G_{\xi_1, T_{\xi_1}}(\mathscr{G}_{j+1}))),$$

$$u^{(j)} = (((u^{(j+1)})_{\xi_1, T_{\xi_1}})_{\xi_2, T_{\xi_2}} \dots)_{\xi_m, T_{\xi_m}}, \quad w^{(j)} = (((w^{(j+1)})_{\xi_1, T_{\xi_1}})_{\xi_2, T_{\xi_2}} \dots)_{\xi_m, T_{\xi_m}}.$$

Из построения, оценки (24), предположения индукции и следствия 2 получаем свойства 1–6.

Положим $\widetilde{\mathbf{W}} = \mathbf{V}^{\mathscr{G}_j}_{j-j_0}(\xi_*)$, если $j \ge j_0 + 1$, $\widetilde{\mathbf{W}} = \mathbf{V}_{\min}(\mathscr{G}_j)$, если $j = j_0$.

Определим отображение K_j. Положим $K_j|_{\mathbf{V}_{\ge j+1-j_0}(\mathscr{G}_j)} = K_{j+1}$. Пусть $\eta \in \widetilde{\mathbf{W}}$. Если $\eta \in \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{G}_j)$, то полагаем $K_j(\eta) = \Delta(\eta) \in \Phi(\eta)$. Пусть $\eta \notin \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{G}_j)$. Тогда $\mathbf{V}^{\mathscr{G}_j}_1(\eta) \in T_{\xi_k}$ для некоторого $k \in \{1, \dots, m\}$ (см. п. 3 следствия 2). Полагаем

$$K_j(\eta) = b^{-1}_{\xi_k}\bigl(\mathbf{V}^{\mathscr{G}_j}_1(\eta)\bigr) \in \Phi(\xi_k). \tag{25}$$

Из построения, предположения индукции, (19) и уже доказанных свойств 2 и 4 следуют свойства 7(a), 7(b), 7(e).

Проверим свойство 7(c). В силу предположения индукции для этого достаточно рассмотреть $\xi \in \widetilde{\mathbf{W}}$, $\xi' \in \mathbf{V}^{\mathscr{G}_j}_1(\xi)$. В силу п. 3 следствия 2 $\mathbf{V}^{\mathscr{G}_j}_1(\xi) \in T_{\xi_k}$ для некоторого $1 \le k \le m$, $b_{\xi_k}(K_j(\xi)) \overset{(25)}{=} \mathbf{V}^{\mathscr{G}_j}_1(\xi)$, т. е. $\xi' \in b_{\xi_k}(K_j(\xi))$. По уже доказанному свойству 7(a) и предположению индукции (см. свойство 7(d) с $j+1$ вместо j) имеем $K_j(\xi') = K_{j+1}(\xi') \overset{(23)}{\subset} K_j(\xi)$.

Проверим свойство 7(d) (для $j \ge j_0 + 1$). Пусть $\xi \in \mathbf{V}^{\mathscr{G}_j}_{j-1-j_0}(\xi_*)\backslash \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{G}_j) = \mathbf{V}^{\mathscr{D}}_{j-1-j_0}(\xi_*)\backslash \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{D})$ (в силу уже доказанных свойств 2 и 4 графа $\mathscr{G}_j$), $Q \in \Phi(\xi)$.

Положим

$$b_\xi(Q) = \bigl\{\xi' \in [\xi, \zeta] \cap \mathbf{V}_1^{\mathscr{G}_j}(\xi) : \zeta \in \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{G}_j), \zeta \ge \xi, K_j(\zeta) \subset Q\bigr\}. \tag{26}$$

Покажем, что множество $b_\xi(Q)$ непусто. В самом деле, по определению $\Phi(\xi)$, существует $\zeta \in \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{D}) \cap \mathbf{V}(\mathscr{D}_\xi)$ такое, что $\Delta(\zeta) \subset Q$. Из свойства 4 графа $\mathscr{G}_j$ следует, что $\zeta \in \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{G}_j) \cap \mathbf{V}((\mathscr{G}_j)_\xi)$. В силу свойства 7(b) $\Delta(\zeta) = K_j(\zeta)$. Значит, $K_j(\zeta) \subset Q$.

По доказанному свойству 7(c) для $Q \in \Phi(\xi)$, $\xi' \in b_\xi(Q)$ и ζ из (26) выполнено $K_j(\zeta) \subset K_j(\xi')$. Значит, в силу (26) и пп. 2, 3 теоремы E

$$K_j(\xi') \subset Q, \quad \xi' \in b_\xi(Q). \tag{27}$$

Докажем, что для различных $Q \in \Phi(\xi)$ множества $b_\xi(Q)$ не пересекаются и образуют разбиение множества $\mathbf{V}_1^{\mathscr{G}_j}(\xi)$. Пусть Q', $Q'' \in \Phi(\xi)$, $Q' \ne Q''$. Если $\xi' \in b_\xi(Q') \cap b_\xi(Q'')$, то из (27) следует, что $K_j(\xi') \subset Q'$ и $K_j(\xi') \subset Q''$. Снова в силу п. 2 теоремы E имеем $Q' \cap Q'' = \varnothing$; противоречие. Остается проверить, что для любой вершины $\xi' \in \mathbf{V}_1^{\mathscr{G}_j}(\xi)$ найдется множество $Q \in \Phi(\xi)$ такое, что $\xi' \in b_\xi(Q)$. В самом деле, пусть $\zeta \in \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{G}_j)$, $\zeta \ge \xi'$. Тогда $\zeta \ge \xi$. В силу уже доказанных свойств 2 и 4 $\zeta \in \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{D}) \cap \mathbf{V}(\mathscr{D}_\xi)$. Так как $\xi' \in \mathbf{V}_{j-j_0}^{\mathscr{G}_j}(\xi_*)$ и $\zeta \ge \xi'$, то $\Delta(\zeta) \in \Theta_{j'}$, $j' \ge j$ (см. начало шага 1). Из п. 3 теоремы E следует, что найдется множество $Q \in \Theta_{j-1}$ такое, что $Q \supset \Delta(\zeta)$. Тогда $Q \in \Phi(\xi)$ (см. (19)) и $\xi' \in b_\xi(Q)$ по определению (26) и свойству 7(b).

Положим $T_\xi := b_\xi(\Phi(\xi))$. Тогда T_ξ — разбиение $\mathbf{V}_1^{\mathscr{G}_j}(\xi)$, $b_\xi : \Phi(\xi) \to T_\xi$ — биекция и $b_\xi(Q) \subset \{\xi' \in \mathbf{V}_1^{\mathscr{G}_j}(\xi) : K_j(\xi') \subset Q\}$ в силу (27). Докажем обратное включение. Пусть $\xi' \in \mathbf{V}_1^{\mathscr{G}_j}(\xi)$, $Q \in \Phi(\xi)$, $K_j(\xi') \subset Q$. Тогда $\xi' \in b_\xi(\Delta)$ для некоторого $\Delta \in \Phi(\xi)$. Значит, $K_j(\xi') \overset{(27)}{\subset} \Delta$, и поэтому $\Delta = Q$ (см. п. 2 теоремы E).

Докажем свойство 7(f). В силу свойства 7(a) достаточно рассмотреть $j' = j$. Если $Q = K_j(\xi)$, то в силу свойства 7(e) существует $\eta = \eta(\xi) \in \mathbf{V}_{j-j_0}^{\mathscr{D}}(\xi_*)$ такое, что $Q \in \Phi(\eta)$. При этом если $\xi \in \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{G}_j)$, то $\eta = \xi \in \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{G}_{j+1})$, иначе $\eta \notin \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{G}_{j+1})$ и $b_\eta(K_j(\xi)) = \mathbf{V}_1^{\mathscr{G}_j}(\xi)$. Отметим, что различным вершинам ξ, таким, что $Q = K_j(\xi)$, соответствуют различные $\eta(\xi)$. В самом деле, достаточно рассмотреть случай $\eta \notin \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{G}_{j+1})$. Если $Q = K_j(\xi) = K_j(\tilde\xi)$ и $\eta(\xi) = \eta(\tilde\xi) = \eta$, то $\mathbf{V}_1^{\mathscr{G}_j}(\xi) = b_\eta(Q) = \mathbf{V}_1^{\mathscr{G}_j}(\tilde\xi)$ и $\xi = \tilde\xi$.

Значит, достаточно доказать, что

$$\operatorname{card}\bigl\{\eta \in \mathbf{V}_{j-j_0}^{\mathscr{D}}(\xi_*) : Q \in \Phi(\eta)\bigr\} \underset{a,d,c_0}{\lesssim} 1. \tag{28}$$

Если $Q \in \Phi(\eta)$, то в силу (19) существует $\zeta \in \mathbf{V}_{\max}(\mathscr{D}) \cap \mathbf{V}(\mathscr{D}_\eta)$ такое, что $\Delta(\zeta) \subset Q$. Поэтому

$$\operatorname{dist}(\Omega[\eta], Q) \le \operatorname{dist}(\Omega[\eta], \Omega[\zeta]) + \operatorname{dist}(\Omega[\zeta], \Delta(\zeta)) + \operatorname{diam}\Omega[\zeta] \underset{a,d,c_0}{\lesssim} 2^{-\bar s j} \tag{29}$$

с учетом (9), (11), (15), (18). Ввиду (19) $Q \in \Theta_j$, так что $\operatorname{diam} Q \lesssim 2^{-\bar s j}$ (см. п. 4 теоремы E). Далее, $\operatorname{diam}\Omega[\eta] \overset{(9),(15)}{\underset{a,d}{\asymp}} 2^{-\bar s j}$. Из (1) следует, что $\Omega[\eta]$ содержит шар радиуса $R(\eta) \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\bar s j}$. Это вместе с (29) дает (28).

Шаг 4. В силу свойств 1 и 2 графа $\mathscr{G}_{j_0}$ (см. шаг 2)

$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathscr{D},u,w} \le \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathscr{G}_{j_0},u^{(j_0)},w^{(j_0)}} \underset{a,d,c_0,p,q}{\lesssim} \max_{1\le l\le l_*} \mathfrak{S}^{p,q}_{\widetilde{\mathscr{D}}_l,u^{(j_0)},w^{(j_0)}}. \tag{30}$$

Пусть максимум правой части достигается на номере l_0. Положим $(\widetilde{\mathscr{D}},\tilde{\xi}_*) = (\widetilde{\mathscr{D}}_{l_0},\tilde{\xi}_{l_0})$, $\tilde{u}(\xi) = u_j$, $\widetilde{w}(\xi) = w_j$, $\xi \in \mathbf{V}^{\widetilde{\mathscr{D}}}_{j-j_0}(\tilde{\xi}_*)$. По (30) и свойству 3 графа $\mathscr{G}_{j_0}$ имеем $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathscr{D},u,w} \underset{a,d,c_0,p,q}{\lesssim} \mathfrak{S}^{p,q}_{\widetilde{\mathscr{D}},\tilde{u},\widetilde{w}}$.

Оценим сверху $\mathfrak{S}^{p,q}_{\widetilde{\mathscr{D}},\tilde{u},\widetilde{w}}$. Рассмотрим максимальный подграф $\widehat{\mathscr{D}}$ в $\widehat{\mathscr{A}}$ на множестве вершин $\{\zeta_{j,i} : \exists\xi \in \mathbf{V}(\widetilde{\mathscr{D}}),\ K_{j_0}(\xi) = \Delta_{j,i}\}$. Тогда $\widehat{\mathscr{D}}$ является деревом. В самом деле, $\operatorname{card}\{i : \zeta_{j_0,i} \in \widehat{\mathscr{D}}\} = 1$. Далее, пусть $\zeta_{j,i} \in \mathbf{V}(\widehat{\mathscr{D}})$. Тогда $j \ge j_0$, $K_{j_0}(\xi) = \Delta_{j,i}$ для некоторой вершины $\xi \in \mathbf{V}(\widetilde{\mathscr{D}})$. Пусть $\zeta_{j',i'} \in \mathbf{V}(\widehat{\mathscr{A}})$, $j' \ge j_0$, $\zeta_{j',i'} \le \zeta_{j,i}$. Из определения $\widehat{\mathscr{A}}$ следует, что $\Delta_{j',i'} \supset \Delta_{j,i}$. Рассмотрим вершину $\eta \in \mathbf{V}^{\widetilde{\mathscr{D}}}_{j'-j_0}(\tilde{\xi}_*)$, $\eta \le \xi$. В силу свойства 4(b) графа $\mathscr{G}_{j_0}$, $K_{j_0}(\eta) \supset K_{j_0}(\xi)$. Значит, ввиду свойства 4(a) графа $\mathscr{G}_{j_0}$ и п. 2 теоремы E $K_{j_0}(\eta) = \Delta_{j',i'}$, так что $\zeta_{j',i'} \in \mathbf{V}(\widehat{\mathscr{D}})$.

Обозначим через $\hat{\xi}_*$ минимальную вершину $\widehat{\mathscr{D}}$. Тогда $\hat{\xi}_* = \zeta_{j_0,i_0}$ для некоторого i_0. Для $\zeta_{j,i} \in \mathbf{V}(\widehat{\mathscr{D}})$ положим

$$V_{\zeta_{j,i}} = \{\xi \in \mathbf{V}(\widetilde{\mathscr{D}}) : K_{j_0}(\xi) = \Delta_{j,i}\}.$$

По свойству 4(a) графа $\mathscr{G}_{j_0}$

$$V_{\zeta_{j,i}} \subset \mathbf{V}^{\widetilde{\mathscr{D}}}_{j-j_0}(\tilde{\xi}_*). \tag{31}$$

В силу свойства 4(c) для любого $\zeta \in \mathbf{V}(\widehat{\mathscr{D}})$

$$\operatorname{card} V_\zeta \underset{a,d,c_0}{\lesssim} 1. \tag{32}$$

Кроме того, если $\xi \in V_\zeta$, $\xi' \in V_{\zeta'}$, $\xi' \le \xi$, то $\zeta' \le \zeta$. В самом деле, если $\zeta = \zeta_{j,i}$, $\zeta' = \zeta_{j',i'}$, $K_{j_0}(\xi) = \Delta_{j,i}$, $K_{j_0}(\xi') = \Delta_{j',i'}$, $\xi \ge \xi'$, то по свойству 4(b) графа $\mathscr{G}_{j_0}$ имеем $\Delta_{j,i} \subset \Delta_{j',i'}$. Из определения дерева $\widehat{\mathscr{A}}$ следует, что $\zeta_{j,i} \ge \zeta_{j',i'}$.

Пусть $\|f\|_{l_p(\widetilde{\mathscr{D}})} = 1$. Для $\zeta \in \mathbf{V}(\widehat{\mathscr{D}})$ положим

$$\varphi(\zeta) = \Big(\sum_{\xi\in V_\zeta} |f(\xi)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда $\|\varphi\|_{l_p(\widehat{\mathscr{D}})} = 1$. Напомним, что функции u_*, w_* определены в формулировке леммы. Если $\xi \in V_\zeta$, $\xi' \in V_{\zeta'}$, $\xi' \le \xi$, то $\tilde{u}(\xi')f(\xi') \le u_*(\zeta')\varphi(\zeta')$ (по определению функций $\tilde{u}$ и u_* и (31)), так что

$$\sum_{\xi'\le\xi} \tilde{u}(\xi')f(\xi') \le \sum_{\zeta'\le\zeta} u_*(\zeta')\varphi(\zeta').$$

Отсюда и из определения функций $\tilde{u}$, $\widetilde{w}$, u_*, w_* и (30) получаем

$$\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\widetilde{\mathscr{D}})} \widetilde{w}^q(\xi)\Big(\sum_{\xi'\le\xi} \tilde{u}(\xi')f(\xi')\Big)^q \overset{(32)}{\underset{a,d,c_0}{\lesssim}} \sum_{\zeta\in\mathbf{V}(\widehat{\mathscr{D}})} w_*^q(\zeta)\Big(\sum_{\zeta'\le\zeta} u_*(\zeta')\varphi(\zeta')\Big)^q \le \big[\mathfrak{S}^{p,q}_{\widehat{\mathscr{D}},u_*,w_*}\big]^q.$$

Остается воспользоваться тем, что $\widehat{\mathscr{D}} \subset \mathscr{D}_* := \widehat{\mathscr{A}}_{\zeta_{j_0,i_0}} \cap [\widehat{\mathscr{A}}]_{\le N}$. $\square$

Из этой леммы и теорем B, C, предложения 1 и теоремы Б. Леви получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $p \ge q$, $\xi_* \in \mathbf{V}^{\mathscr{A}}_{j_0}(\xi_0)$, функции u, w на $\mathbf{V}(\mathscr{A})$ определены формулой* (14). *Положим*

$$\widehat{w}_j = w_j \cdot \left(\frac{h(2^{-\bar{s}j_0})}{h(2^{-\bar{s}j})}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \hat{u}_j = u_j \cdot \left(\frac{h(2^{-\bar{s}j})}{h(2^{-\bar{s}j_0})}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad j_0 \le j < N+1.$$

Пусть

$$M_{\hat{u},\widehat{w}}(j_0) := \sup_{j_0 \le j < \infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \widehat{w}_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j_0}^{j} \hat{u}_i^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \quad 1 < p = q < \infty,$$

$$M_{\hat{u},\widehat{w}}(j_0) := \left(\sum_{j=j_0}^{\infty} \left(\left(\sum_{i=j}^{\infty} \widehat{w}_i^q\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=j_0}^{j} \hat{u}_i^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right)^{\frac{pq}{p-q}} \widehat{w}_j^q\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} < \infty, \quad q < p.$$

Тогда $W^r_{p,g}(\Omega[\mathscr{A}_{\xi_*}]) \subset L_{q,v}(\Omega[\mathscr{A}_{\xi_*}])$ и существует линейный непрерывный оператор $P : L_{q,v}(\Omega) \to \mathscr{P}_{r-1}(\Omega)$ такой, что для любого поддерева $\mathscr{D} \subset \mathscr{A}_{\xi_*}$ с минимальной вершиной ξ_* и для любой функции $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$ выполнено

$$\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega[\mathscr{D}])} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} M_{\hat{u},\widehat{w}}(j_0) \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\Omega[\mathscr{D}])}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
2. *Решетняк Ю. Г.* Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 6. С. 108–116.
3. *Решетняк Ю. Г.* Замечание об интегральных представлениях дифференцируемых функций многих переменных // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 5. С. 198–200.
4. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
5. *Kufner A.* Weighted Sobolev spaces. Leipzig: Teubner, 1980. (Teubner-Texte Math.; V. 31).
6. *Edmunds D. E., Triebel H.* Function spaces, entropy numbers, differential operators. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. (Cambridge Tracts Math.; V. 120).
7. *Triebel H.* Theory of function spaces III. Basel: Birkhäuser Verl., 2006.
8. *Edmunds D. E., Evans W. D.* Hardy operators, Function spaces and embeddings. Berlin: Springer-Verl., 2004.
9. *Мынбаев К. Т., Отелбаев М. О.* Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. М.: Наука, 1988.
10. *Кудрявцев Л. Д., Никольский С. М.*, Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 26. С. 5–157. (Итоги науки и техники).
11. *Кудрявцев Л. Д.* Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1959. Т. 55. С. 3–182.
12. *Nečas J.* Sur une méthode pour résoudre les equations aux dérivées partielles dy type elliptique, voisine de la varitionelle // Ann. Scuola Sup. Pisa. 1962. V. 16, N 4. P. 305–326.
13. *Gurka P., Opic B.* Continuous and compact imbeddings of weighted Sobolev spaces. I // Czech. Math. J. 1988. V. 38, N 4. P. 730–744.
14. *Бесов О. В.* Интегральные оценки дифференцируемых функций на нерегулярных областях // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 12. С. 69–82.
15. *Caso L., D'Ambrosio R.* Weighted spaces and weighted norm inequalities on irregular domains // J. Appr. Theory. 2013. V. 167. P. 42–58.
16. *Vasil'eva A. A.* Embedding theorem for weighted Sobolev classes on a John domain with weights that are functions of the distance to some h-set // Russ. J. Math. Phys. 2013. V. 20, N 3. P. 360–373.

17. *Bricchi M.* Existence and properties of h-sets // Georgian Math. J. 2002. V. 9, N 1. P. 13–22.
18. *Vasil'eva A. A.* Embedding theorem for weighted Sobolev classes on a John domain with weights that are functions of the distance to some h-set // Russ. J. Math. Phys. 2014. V. 21, N 1. P. 112–122.
19. *Vasil'eva A. A.* Estimates for norms of two-weighted summation operators on a tree under some conditions on weights // arXiv:1311.0375.
20. *Evans W. D., Harris D. J., Pick L.* Weighted Hardy and Poincaré inequalities on trees // J. London Math. Soc. 1995. V. 52, N 1. P. 121–136.
21. *Andersen K. F., Heinig H. P.* Weighted norm inequalities for certain integral operators // SIAM J. Math. Anal. 1983. V. 14, N 4. P. 834–844.
22. *Heinig H. P.* Weighted norm inequalities for certain integral operators. II // Proc. Amer. Math. Sos. 1985. V. 95, N 3. P. 387–395.
23. *Bennett G.* Some elementary inequalities. III // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1991. V. 42, N 166. P. 149–174.
24. *Leoni G.* A first course in Sobolev spaces. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2009. (Graduate Stud. Math.; V. 105).
25. *Васильева А. А.* Поперечники весовых классов Соболева на области, удовлетворяющей условию Джона // Тр. МИАН. 2013. Т. 280. С. 97–125.
26. *Christ M.* A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral // Colloq. Math. 1990. V. 60/61, N 2. P. 601–628.

Статья поступила 2 июня 2014 г.

Васильева Анастасия Андреевна
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, Москва 119992 ГСП-2
`vasilyeva_nastya@inbox.ru`