Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2015. Том 56, № 1

УДК 517.982.22+517.983.23

ПРОСТРАНСТВА ПЭЛИ

С. В. Асташкин, Е. М. Семенов

Аннотация. Пусть x — суммируемая на $[0,1]$ функция и Px — функция Пэли, построенная по разложению x в ряд Фурье — Хаара. Если E — симметричное пространство на $[0,1]$, то через $P(E)$ обозначается пространство с нормой $\|Px\|_E$. Наряду с другими результатами доказано, что $P(E)$ рефлексивно тогда и только тогда, когда рефлексивно E.

Ключевые слова: симметричное пространство, функции Хаара, функция Пэли, вещественный метод интерполяции.

§ 1. Введение

Банахово пространство E измеримых на $[0,1]$ функций называется *симметричным* (кратко *с. п.*) или *перестановочно-инвариантным,* если

1) из $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ для всех $t \in [0,1]$ и $y \in E$ вытекает $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$;

2) из *равноизмеримости* функций x и y, т. е. равенства

$$\operatorname{mes}\{t \in [0,1] : |y(t)| > u\} = \operatorname{mes}\{t \in [0,1] : |x(t)| > u\} \quad (u > 0),$$

где $\operatorname{mes} a$ — мера Лебега множества $a \subset \mathbb{R}$, и $y \in E$ следует $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Следуя [1, § 2.a], будем также предполагать, что с. п. E сепарабельно или сопряжено к сепарабельному пространству. Без ограничения общности $\kappa_{[0,1]} \in E$ и $\|\kappa_{[0,1]}\|_E = 1$, где через $\kappa_e(t)$ обозначается характеристическая функция измеримого подмножества $e \subset [0,1]$. В этом случае $L_\infty \subset E \subset L_1$ и

$$\|x\|_{L_1} \leqslant \|x\|_E \leqslant \|x\|_{L_\infty}$$

для всех $x \in L_\infty$. Через E' обозначается двойственное к E пространство с нормой

$$\|x\|_{E'} = \sup_{\|y\|_E \leqslant 1} \int_0^1 x(t)y(t)\,dt.$$

Пространство E' также является с. п., и если E сепарабельно, то $E' = E^*$. Для любого с. п. E через E_0 будет обозначаться замыкание L_∞ в E. Если $E \neq L_\infty$, то E_0 — сепарабельное с. п. Пространство E сопряжено к сепарабельному с. п. тогда и только тогда, когда оно *максимально*, т. е. из того, что $x_n \in E$ $(n = 1, 2, \dots)$, $\sup\limits_{n=1,2,\dots} \|x_n\|_E < \infty$ и $x_n \to x$ п. в. на $[0,1]$, вытекает $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_E$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12–01–00198а, 11–01–00614а).

В каждом с. п. E ограниченно действуют *операторы растяжения*

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x(t/\tau), & 0 \leqslant t \leqslant \min(1,\tau), \\ 0, & \min(1,\tau) < t \leqslant 1, \end{cases}$$

где $\tau > 0$. Числа

$$\alpha_E = \lim_{\tau\to 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}, \quad \beta_E = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}$$

называются *индексами Бойда* с. п. E. Всегда $0 \leqslant \alpha_E \leqslant \beta_E \leqslant 1$. Например, $\alpha_{L_p} = \beta_{L_p} = \frac{1}{p}$ для всех $p \in [1,\infty]$.

Приведем наиболее важные примеры с. п. Если $\varphi(t)$ — возрастающая вогнутая функция на $[0,1]$, $\varphi(0) = 0$, то через $\Lambda(\varphi)$ обозначается *пространство Лоренца* с нормой

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} = \int_0^1 x^*(t)\, d\varphi(t),$$

где $x^*(t)$ — перестановка $|x(t)|$ в убывающем порядке. Если $\varphi(t)$ непрерывна в 0, то сопряженным к $\Lambda(\varphi)$ является *пространство Марцинкевича* $M(\varphi)$, норма которого определяется следующим образом:

$$\|x\|_{M(\varphi)} = \sup_{0<s\leqslant 1} \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s x^*(t)\, dt.$$

Всякая возрастающая выпуклая на $[0,\infty)$ функция $M(u)$, $M(0) = 0$, порождает *пространство Орлича* L_M с нормой

$$\|x\|_{L_M} = \inf\left\{\lambda : \lambda > 0,\ \int_0^1 M\left(\frac{|x(t)|)}{\lambda}\right) dt \leqslant 1\right\}.$$

Пространство Орлича L_M, где $M(u) = e^{u^2} - 1$ (соответственно $M(u) = u\ln(1+u)$), будет обозначаться через $\exp L_2$ (соответственно через $L \log L$).

Пусть $\Delta_{n,k} = ((k-1)2^{-n}, k2^{-n})$ $(1 \leqslant k \leqslant 2^n, n = 0,1,\dots)$ — *двоичные* интервалы из $[0,1]$. Последовательность функций

$$\chi_0^0(t) = 1, \quad \chi_n^k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_{n+1}^{2k-1}, \\ -1, & t \in \Delta_{n+1}^{2k}, \\ 0 & \text{для остальных } t \in [0,1], \end{cases}$$

где $1 \leqslant k \leqslant 2^n$, $n = 0,1,2,\dots$, называется *системой Хаара*. Формула $m = 2^n + k$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством $\Omega := \{(0,0),(n,k) : 1 \leqslant k \leqslant 2^n, n = 0,1,\dots\}$ и множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$, позволяя тем самым записывать эту систему с использованием лишь одного индекса: $\{\chi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$. Функции $2^{n/2}\chi_n^k$ $((n,k) \in \Omega)$ образуют полную ортонормированную систему, являющуюся монотонным базисом в любом сепарабельном с. п. Для того чтобы система Хаара была безусловным базисом в сепарабельном с. п. E, необходимо и достаточно, чтобы

$$0 < \alpha_E \leqslant \beta_E < 1 \tag{1}$$

(см. [1, теорема 2.c.6] или [2, теорема 2.9.6]).

Если $x \in L_1[0,1]$ представима в виде

$$x = \sum_{(n,k)\in\Omega} c_{n,k}\chi_n^k \quad (\text{сходимость в } L_1),$$

то соответствующая *функция Пэли* определяется равенством

$$Px(t) = \Big(\sum_{(n,k)\in\Omega} \big(c_{n,k}\chi_n^k(t)\big)^2\Big)^{1/2}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Если E — с. п. на $[0,1]$, то через $P(E)$ обозначается пространство функций $x \in L_1[0,1]$ таких, что $Px \in E$, с нормой

$$\|x\|_{P(E)} := \|Px\|_E.$$

Будем называть $P(E)$ *пространством Пэли.* Наиболее известными в анализе среди пространств этого типа являются пространства $P(L_1)$ и $P(L_\infty)$.

В данной работе продолжено начатое авторами в [3] изучение пространств Пэли. Так как $P(E) = E$ с совпадением (соответственно эквивалентностью) норм тогда и только тогда, когда $E = L_2$ (соответственно выполнено (1)) [3, теорема 1], основное внимание будет уделено пространствам, для которых соотношение (1) не выполнено. Главным результатом работы является критерий рефлексивности пространств Пэли (теорема 7). Более подробно о с. п. и системе Хаара и, в частности, о пространствах $P(L_1)$, $P(L_\infty)$ см. [1, 2, 4–6].

§ 2. Вложения пространств Пэли

Теорема 1. *Пусть E — с. п. Следующие условия эквивалентны:*
(i) $L_\infty \subset P(E)$;
(ii) $\sup\limits_{e\subset[0,1]} \|\kappa_e\|_{P(E)} < \infty$;
(iii) $\exp L_2 \subset E$.

Доказательство. (i)→(ii) Если выполнено (i), то существует такое $C > 0$, что $\|x\|_{P(E)} \leqslant C\|x\|_{L_\infty}$ для всех $x \in L_\infty$. Отсюда $\|\kappa_e\|_{P(E)} \leqslant C\|\kappa_e\|_{L_\infty} = C$ для любого $e \subset [0,1]$.

(ii)→(iii) Пусть $\|\kappa_e\|_{P(E)} \leqslant C$ для некоторого $C > 0$ и всех $e \subset [0,1]$. Функция

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \big(\chi_{2n}^1(t) - \chi_{2n+1}^1(t)\big)$$

принимает значения -1 и 2 на $[0,1]$. Поэтому $\|x\|_{P(E)} \leqslant 3C$. Так как

$$Px(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \big(\chi_n^1(t)\big)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \kappa_{(0,2^{-n})}(t)\right)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\,\kappa_{(2^{-n},2^{-n+1})}(t),$$

то $0 \leqslant \log_2^{1/2}(1/t) \leqslant Px(t)$ для всех $t \in (0,1]$. Отсюда $\ln^{1/2}(1/t) \in E$. В силу теоремы Лоренца [7] пространство $\exp L_2$ совпадает с пространством Марцинкевича $M(\varphi)$, построенным по функции $\varphi(t) = t\ln^{1/2}(e/t)$. Поскольку по определению нормы в пространстве Марцинкевича для любой функции $x \in \exp L_2$

$$x^*(t) \le \frac{1}{t}\int_0^t x^*(s)\,ds \le C\|x\|_{\exp L_2} \ln^{1/2}(e/t), \quad 0 < t \le 1,$$

в итоге $E \supset \exp L_2$.

(iii)→(i) В [5, следствие 1.3.7] показано, что оператор P ограниченно действует из L_∞ в $\exp L_2$, т. е. $\|Px\|_{\exp L_2} \leqslant C\|x\|_{L_\infty}$ для некоторого $C > 0$ и всех $x \in L_\infty$. Отсюда по условию

$$\|x\|_{P(E)} = \|Px\|_E \leqslant C_1\|Px\|_{\exp L_2} \leqslant C_1 C\|x\|_{L_\infty}, \quad x \in L_\infty.$$

Следовательно, $L_\infty \subset P(E)$. $\square$

Обозначим через Sx мажоранту частичных сумм Фурье — Хаара функции x, т. е.

$$Sx(t) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{n} c_k(x)\chi_k(t)\right|, \quad \text{где } c_k(x) := (\operatorname{mes}\Delta_k)^{-1}\int_0^1 x(s)\chi_k(s)\,ds$$

(Δ_k — носитель функции χ_k), а через H — оператор Харди — Литтльвуда,

$$Hx(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds.$$

Лемма 2. *Если* $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots$ *и*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \kappa_{(2^{-k},2^{-k+1})}(t), \tag{2}$$

то $Sx(t/2) \geqslant Hx(t) \geqslant Sx(t)$ *для всех* $t \in (0,1]$.

Доказательство. Ввиду известных соотношений для частичных сумм Фурье — Хаара (см., например, [4, § 3.1, формулы (10) и (11)]), а также монотонности $x(t)$ функция $Sx(t)$ принимает на интервале $(2^{-n}, 2^{-n+1})$, $n \in \mathbb{N}$, постоянное значение, равное

$$2^{n-1}\int_0^{2^{-n+1}} x(s)\,ds = 2^{n-1}\sum_{k=n}^{\infty} x_k 2^{-k} = \sum_{k=n}^{\infty} x_k 2^{-k+n-1}.$$

Так как

$$Hx(2^{-n+1}) = 2^{n-1}\int_0^{2^{-n+1}} x(s)\,ds = \sum_{k=n}^{\infty} x_k 2^{-k+n-1}$$

и $Hx(t)$ не возрастает на $(0,1]$, то

$$Sx(t/2) \geqslant Hx(t) \geqslant Sx(t)$$

для всех $t \in (0,1]$. $\square$

Хорошо известно [4, теоремы 3.10, 3.11], что $P(L_1) \subsetneqq L_1$.

Теорема 3. *Для того чтобы с. п. E было вложено в $P(L_1)$, необходимо и достаточно, чтобы $E \subset L\log L$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $E \subset P(L_1)$. В силу теоремы 3.11 из [4] функционалы $\|Px\|_{L_1}$ и $\|Sx\|_{L_1}$ эквивалентны на L_1. Поэтому

$$\|Sx\|_{L_1} \leqslant C\|x\|_E$$

для некоторого $C>0$ и всех $x\in E$. В частности, в силу леммы 2 для функций вида (2) имеем

$$\|Hx\|_{L_1}\leqslant C\|x(t/2)\|_E\leqslant 2C\|x\|_E.$$

Так как

$$\|Hx\|_{L_1}=\int\limits_0^1\frac{1}{t}\int\limits_0^t x(s)\,dsdt=\int\limits_0^1 x(s)\int\limits_s^1\frac{dt}{t}\,ds=\int\limits_0^1 x(s)\ln\frac{1}{s}\,ds,$$

то $\|x\|_{\Lambda(\varphi)}\leqslant 2C\|x\|_E$, где $\varphi(s)=\int\limits_0^s\ln(1/t)\,dt$ и $\Lambda(\varphi)$ — соответствующее пространство Лоренца. Для любой функции $y=y^*$ найдется такая функция x вида (2), что $y(t/2)\geqslant x(t)\geqslant y(t)$ для всех $t\in(0,1]$. Отсюда

$$\|y\|_{\Lambda(\varphi)}\leqslant 4C\|y\|_E$$

для любой $y=y^*\in E$. Так как E симметрично, последнее неравенство справедливо для всех $y\in E$. Пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$, где $\varphi(s)=\int\limits_0^s\ln(1/t)\,dt$, совпадает с точностью до эквивалентности норм с пространством Орлича $L\log L$ [7]. Отсюда $E\subset L\log L$.

Достаточность. Покажем, что

$$\|x\|_{P(L_1)}=\|Px\|_{L_1}\leqslant C\|x\|_{L\log L}.$$

Как отмечалось при доказательстве необходимости, $\|Px\|_{L_1}$ и $\|Sx\|_{L_1}$ эквивалентны на L_1 [4, теорема 3.11], а пространства Лоренца $\Lambda(\varphi)$, $\varphi(s)=\int\limits_0^s\ln(1/t)\,dt$, и Орлича $L\log L$ совпадают с точностью до эквивалентности норм [7]. Поэтому достаточно получить оценку

$$\|Sx\|_{L_1}\leqslant C\|x\|_{\Lambda(\varphi)}.$$

Оператор S имеет слабый тип $(1,1)$ с константой 5 и действует в L_∞ с константой 1 [4, теорема 3.4]. Поэтому для любого измеримого подмножества $e\subset[0,1]$ имеем

$$(S\kappa_e)^*(t)\leqslant 5\min(1,(\operatorname{mes}e)/t).$$

Отсюда

$$\|S\kappa_e\|_{L_1}\leqslant 5\int\limits_0^1\min\left(1,\frac{\operatorname{mes}e}{t}\right)dt=5\left(\operatorname{mes}e+\operatorname{mes}e\int\limits_{\operatorname{mes}e}^1\frac{dt}{t}\right)$$
$$=5\operatorname{mes}e\left(1+\ln\frac{1}{\operatorname{mes}e}\right).$$

Так как

$$\varphi(s)=\int\limits_0^s\ln\frac{1}{t}\,dt=s\left(1+\ln\frac{1}{s}\right),$$

то $\|S\kappa_e\|_{L_1}\leqslant 5\|\kappa_e\|_{\Lambda(\varphi)}$ для любого измеримого $e\subset[0,1]$. Тогда ввиду леммы 2.5.2 из [2]

$$\|Sx\|_{L_1}\leqslant 10\|x\|_{\Lambda(\varphi)}\tag{3}$$

для любой ступенчатой функции x. Поскольку множество ступенчатых функций всюду плотно в $\Lambda(\varphi)$, из (3) и оценки слабого типа $(1,1)$ вытекает справедливость неравенства (3) для всех $x\in\Lambda(\varphi)$. Отсюда, как уже отмечалось, следует ограниченность P из $L\log L$ в L_1. $\square$

§ 3. Критерий рефлексивности пространств Пэли

Пусть E — с. п. на $[0,1]$, $\delta>0$. Следуя хорошо известному подходу Кадеца — Пелчинского [8], для $f\in E$ положим

$$S_{E,\delta}(f):=\{t\in[0,1]:|f(t)|>\delta\|f\|_E\}.$$

Пусть также

$$M_{E,\delta}:=\{f\in E:\operatorname{mes}(S_{E,\delta}(f))\geqslant\delta\}.$$

Лемма 4. *Если сепарабельное с. п. E содержит подпространство H, изоморфное l_1, то существуют функции $g_n\in E$, $n\in\mathbb{N}$, с дизъюнктными носителями такие, что их замкнутая линейная оболочка $[g_n]$ изоморфна l_1.*

Доказательство. Предположим сначала, что $H\subset M_{E,\delta}$ при некотором $\delta>0$. Тогда ввиду [8] нормы пространств E и L_1 эквивалентны на H. Так как H изоморфно l_1, по теореме Данфорда — Петтиса [9, теорема 5.2.9] функции множества $\{f\in H:\|f\|_E=1\}$ имеют не равностепенно непрерывные нормы в L_1. Следовательно, для некоторого $\varepsilon_0>0$ найдутся функции $f_n\in H$, $\|f_n\|_E=1$, и множества $e_n\subset[0,1]$, $n=1,2,\dots$, такие, что

$$\operatorname{mes}e_n\to 0 \quad \text{и} \quad \|f_n\kappa_{e_n}\|_{L_1}\geqslant\varepsilon_0.$$

Стандартные рассуждения показывают, что ввиду абсолютной непрерывности интеграла можно считать множества e_n попарно дизъюнктными. Таким образом, с одной стороны, для $g_n:=f_n\cdot\kappa_{e_n}$, $n=1,2,\dots$, и $c_n\in\mathbb{R}$ имеем

$$\left\|\sum_{n=1}^\infty c_ng_n\right\|_E\geqslant\left\|\sum_{n=1}^\infty c_ng_n\right\|_{L_1}=\sum_{n=1}^\infty|c_n|\|g_n\|_{L_1}\geqslant\varepsilon_0\|(c_n)\|_{l_1},$$

а с другой —

$$\left\|\sum_{n=1}^\infty c_ng_n\right\|_E\leqslant\sum_{n=1}^\infty|c_n|\|g_n\|_E\leqslant\|(c_n)\|_{l_1}.$$

Пусть $H\not\subset M_{E,\delta}$ для любого $\delta>0$. Обозначим через $\{h_n\}$ последовательность в H, эквивалентную каноническому базису l_1. Так как E сепарабельно, действуя так же, как в [1, предложение 1.c.8] или [9, лемма 5.2.1], можно выделить подпоследовательность $\{h_{n_k}\}\subset\{h_n\}$ такую, что для некоторой последовательности попарно дизъюнктных множеств $d_k\subset[0,1]$, $k=1,2,\dots$, выполнено

$$\sum_{k=1}^\infty\|h_{n_k}\cdot\kappa_{[0,1]\setminus d_k}\|_E<\frac{1}{2C},$$

где C — базисная константа последовательности $\{h_n\}$ в E. В силу теоремы об устойчивости базисности [10, теорема 1.a.9] подпространство $[g_k]$, где $g_k:=h_{n_k}\cdot\kappa_{d_k}$, изоморфно l_1. $\square$

Лемма 5. *Если сепарабельное с. п. E содержит подпространство H, изоморфное c_0, то существуют функции $g_n\in E$, $n\in\mathbb{N}$, с дизъюнктными носителями такие, что подпространство $[g_n]$ изоморфно c_0.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность из H, эквивалентная каноническому базису c_0. Хорошо известно, что c_0 нельзя изоморфно вложить в L_1. Это следует, например, из того факта, что L_1 имеет котип 2 (см., например, [10, с. 73]). Поэтому, как и в доказательстве предыдущей леммы, существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ такая, что для некоторой последовательности попарно дизъюнктных множеств $d_k \subset [0,1]$, $k = 1, 2, \dots$, выполнено

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_k} \cdot \kappa_{[0,1]\setminus d_k}\|_E < \frac{1}{2C},$$

где C — базисная константа последовательности $\{f_n\}$ в E. Применяя в очередной раз теорему об устойчивости базисности [10, теорема 1.a.9], заключаем, что подпространство $[g_k]$, где $g_k := f_{n_k} \cdot \kappa_{d_k}$, изоморфно c_0. $\square$

Теорема 6. *Если сепарабельное с. п. E содержит подпространство, изоморфное l_1 (соответственно c_0), то и $P(E)$ содержит подпространство, изоморфное l_1 (соответственно c_0).*

Доказательство. Так как доказательство в обоих случаях совершенно одинаково, ограничимся рассмотрением лишь случая l_1. Согласно лемме 4 существуют функции $g_n \in E$ с дизъюнктными носителями такие, что подпространство $[g_n]$ изоморфно l_1. Поскольку множество ступенчатых функций, интервалы постоянства которых двоичные, плотно в E, пользуясь снова теоремой об устойчивости базисных последовательностей, можно считать, что g_n для каждого $n \in \mathbb{N}$ — ступенчатая функция с двоичными интервалами постоянства. Пусть

$$|g_n| = \sum_{(i,j)\in Q_n} c_{i,j}\kappa_{\Delta_i^j}, \quad \text{где } Q_n \subset \Omega.$$

Рассмотрим последовательность функций

$$h_n = \sum_{(i,j)\in Q_n} c_{i,j}\chi_i^j.$$

В силу дизъюнктности носителей g_n, $n \in \mathbb{N}$, подпространства $[g_n]$ и $[h_n]$ изометричны и, следовательно, $[h_n]$ изоморфно l_1. Так как

$$\Big\| \sum a_n h_n \Big\|_{P(E)} = \Big\| \sum a_n g_n \Big\|_E$$

для любой финитной последовательности (a_n), подпространство $P(E)$, порожденное системой $\{h_n\}$, также изоморфно l_1. $\square$

Докажем главный результат работы.

Теорема 7. *Пространство Пэли $P(E)$ рефлексивно тогда и только тогда, когда с. п. E рефлексивно.*

Доказательство. Как обычно, через $\widetilde{E(l_2)}$ обозначим банахово пространство всех последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, $x_n \in E$, таких, что

$$\|x\|_{\widetilde{E(l_2)}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2} \right\|_E < \infty.$$

Замкнутое подпространство $\widetilde{E(l_2)}$, порожденное финитными последовательностями $x = (x_1, x_2, \dots)$, обозначим через $E(l_2)$. Как легко видеть, если E сепарабельно и максимально, то $E(l_2) = \widetilde{E(l_2)}$. Каждой функции $f \in P(E)$ сопоставим ее ряд Фурье — Хаара $\sum\limits_{(n,k)\in\Omega} c_{n,k}(f)\chi_n^k$. Полагая

$$x_1 := \int_0^1 f(s)\,ds, \quad x_n := \sum_{k=1}^{2^{n-2}} c_{n-2,k}(f)\chi_{n-2}^k, \quad n = 2, 3, \dots,$$

определим отображение $Uf := \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, являющееся изометрическим вложением $P(E)$ в $\widetilde{E(l_2)}$.

Если E рефлексивно, то E сепарабельно, $E^* = E'$ и $E'' = E$. Тогда ввиду [10, с. 46, 47] $(E(l_2))^* = \widetilde{E'(l_2)} = E'(l_2)$. Иначе для любого $L \in (E(l_2))^*$ существует последовательность $\{y_n\} \in E'(l_2)$ такая, что

$$L(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x_n y_n \, dt \quad \text{для любой } \{x_n\} \in E(l_2), \quad \|L\| = \|\{y_n\}\|_{E'(l_2)}.$$

Таким образом, $(E(l_2))^{**} = E(l_2)$, при этом изометрией из $E(l_2)$ в $(E(l_2))^{**}$ является каноническое вложение первого пространства во второе. Тем самым $E(l_2)$ рефлексивно. Ввиду того, что $P(E)$ изометрично подпространству $E(l_2)$, оно также рефлексивно.

Докажем обратное утверждение. Так как любая последовательность $\{\kappa_{I_k}\}_{k=1}^{\infty}$, где I_k — попарно дизъюнктные двоичные интервалы из $[0,1]$, порождает в L_∞ подпространство, изометричное c_0, точно так же, как в теореме 6, можно показать, что $P(L_\infty)$ содержит подпространство, изометричное c_0, и, значит, не рефлексивно.

Пусть E отлично от L_∞ и не рефлексивно. Тогда пространство E_0 (замыкание L_∞ в E) сепарабельно и не рефлексивно. В силу [10, теорема 1, с. 12] E_0 содержит изоморфную копию c_0 или l_1. Тем самым по теореме 6 $P(E_0)$ также содержит соответственно копию c_0 или l_1 и, значит, не рефлексивно. Так как $P(E_0)$ — подпространство $P(E)$, то и $P(E)$ не рефлексивно. $\square$

Теорема 8. *Существует такое с. п. E, что пространство $P(E)$ рефлексивно, $L_\infty \not\subset P(E)$ и $E \not\subset P(L_1)$.*

Доказательство. Пусть φ — возрастающая вогнутая функция на $[0,1]$, удовлетворяющая следующим условиям: $\varphi(0) = 0$,

$$\limsup_{t\to 0} \varphi(t) \ln^{1/2} \frac{1}{t} = \infty, \quad \liminf_{t\to 0} \varphi(t) t^{-1} \ln^{-1} \frac{1}{t} = 0.$$

Эти условия гарантируют, что для любого с. п. E, удовлетворяющего условию $\|\kappa_{[0,s]}\|_E = \varphi(s)$, $0 \le s \le 1$, выполнено $\exp L_2 \not\subset E$ и $E \not\subset L \log L$. Тогда в силу теорем 1 и 3 имеем $L_\infty \not\subset P(E)$ и $E \not\subset P(L_1)$.

Рассмотрим пространство $E = (\Lambda(\varphi), M(\psi))_{\theta,p}$, где $\psi(t) = t/\varphi(t)$, $0 < \theta < 1 < p < \infty$, т. е. пространство, построенное с помощью вещественного метода интерполяции [11, § 3.1] по пространствам $\Lambda(\varphi)$ и $M(\psi)$ с параметрами θ и p. Из очевидных равенств

$$\|\kappa_{[0,s]}\|_{\Lambda(\varphi)} = \|\kappa_{[0,s]}\|_{M(\psi)} = \varphi(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant 1,$$

и свойств вещественного метода интерполяции [11, теорема 3.4.1] вытекает, что

$$\|\kappa_{[0,s]}\|_E = \varphi(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

Так как $\Lambda(\varphi) \subset M(\psi)$ [2, теорема 2.5.7] и это вложение слабо компактно, в силу теоремы Бозами [12, теорема 3.1] E рефлексивно. Тогда согласно теореме 7 пространство $P(E)$ будет также рефлексивно. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. II. Function spaces. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1979.

2. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

3. *Асташкин С. В., Семенов Е. М.* Пространства, определяемые функцией Пэли // Мат. сб. 2013. Т. 204, № 7. С. 3–24.

4. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999.

5. *Müller P. F.* Isomorphisms between H^1 Spaces. Basel: Birkhäuser, 2005. (Math. Monogr. (New Ser.); V. 66).

6. *Голубов Б. И.* Ряды Фурье по системе Хаара // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1971. С. 109–146. (Итоги науки и техники).

7. *Lorentz G. G.* Relations between function spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. P. 127–132.

8. *Kadec M. I., Pełczyński A.* Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p // Stud. Math. 1962. V. 21. P. 161–176.

9. *Albiac F., Kalton N. J.* Topics in Banach space theory. New York: Springer-Verl., 2006. (Grad. Texts Math.; V. 233).

10. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. I. Sequence spaces. Berlin; New York: Springer-Verl., 1977.

11. *Берг Й., Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.

12. *Beauzamy B.* Espaces d'interpolation Reels: topologie et geometrie. Berlin; New York: Springer-Verl., 1978. (Lect. Notes Math.; V. 666).

Статья поступила 25 декабря 2013 г.

Асташкин Сергей Владимирович
Самарский гос. университет,
ул. Академика Павлова, 1, Самара 443011
astash@samsu.ru

Семенов Евгений Михайлович
Воронежский гос. университет,
Университетская пл., 1, Воронеж 394006
nadezhka_ssm@geophys.vsu.ru