*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2015. Том 56, № 1*

*УДК 512.5*

# НОРМАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ РАЗРЕШИМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

**Е. И. Тимошенко**

**Аннотация.** Пусть $G$ — группа, являющаяся разрешимым класса $n \geq 2$ произведением нетривиальных свободных абелевых групп. Доказано, что подгруппа всех автоморфизмов группы $G$, тождественных на последнем неединичном коммутанте $G^{(n)}$, совпадает с подгруппой всех внутренних автоморфизмов, соответствующих элементам из $G^{(n)}$. Также доказано, что подгруппа всех нормальных автоморфизмов группы $G$ совпадает с подгруппой всех внутренних автоморфизмов.

**Ключевые слова:** нормальный автоморфизм, разрешимое произведение.

## Введение

Проблема Мальцева об описании группы автоморфизмов свободной разрешимой группы, явно сформулированная М. И. Каргаполовым в [1, проблема 1.33], в целом остается открытой. Пусть $S_{r,n}$ обозначает свободную разрешимую группу ранга $r$ ступени разрешимости $n$. Из известных результатов по этой проблеме отметим следующие.

(1) Бахмут [2] доказал, что все автоморфизмы свободной метабелевой группы $M_2 = S_{2,2}$, индуцирующие тождественное отображение в факторе $M_2/M_2'$ по коммутанту $M_2'$, внутренние. В [3] аналогичное утверждение установлено для любой группы вида $S_{2,n}$, $n \geq 3$.

Эти результаты позволяют говорить о группах $\mathrm{Aut}(S_{2,n})$, $n \geq 2$, как о расширениях подгруппы внутренних автоморфизмов $\mathrm{Inn}(S_{2,n}) \simeq S_{2,n}$ с помощью унимодулярных групп $GL(2, \mathbb{Z})$. Кроме того, из них следует, что все автоморфизмы указанных групп ручные, т. е. индуцированы автоморфизмами свободной группы $F_2$ ранга 2, что позволяет явно выписать конечные множества порождающих элементов этих групп.

(2) Бахмут и Мочизуки [4] и независимо В. А. Романьков [5] доказали, что все автоморфизмы свободных метабелевых групп $M_r = S_{r,2}$ при $r \geq 4$ ручные, что также позволяет выписать их конечные порождающие множества. В [6, 7] дано описание структуры группы $\mathrm{Aut}(M_r)$ для $r \geq 4$ как цепи последовательных расширений и приведено описание факторов.

(3) Группа $\mathrm{Aut}(M_3)$ не конечно порождена [7] (см. также [8]).

(4) А. Л. Шмелькин [9] изучил автоморфизмы свободной разрешимой группы, стабильные относительно ряда коммутантов. Вначале он обнаружил, что

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00084) и Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.B37.21.0359).

это те автоморфизмы, которые оставляют неподвижными элементы последнего неединичного коммутанта. Затем доказал следующую теорему.

**Теорема A** [9]. *Пусть $G$ — свободная разрешимая группа класса $n$ и $\varphi$ — ее автоморфизм, тождественный на $G^{(n-1)}$. Тогда $\varphi$ — внутренний автоморфизм, индуцированный элементом $g \in G^{(n-1)}$.*

При доказательстве этой теоремы А. Л. Шмелькин использовал вложение свободной разрешимой группы в сплетение свободной абелевой группы и свободной разрешимой группы ступени $n-1$ (в настоящее время это вложение называют *вложением Магнуса*).

Мы доказываем аналогичную теорему для разрешимого произведения свободных абелевых групп.

Напомним, что автоморфизм $\varphi$ группы $G$ называется *нормальным*, если он переводит на себя все нормальные подгруппы конечных индексов в $G$.

В. А. Романьковым доказана

**Теорема B** [10]. *Если $G$ — свободная неабелева разрешимая группа, то группа нормальных автоморфизмов $\mathrm{Aut}_n(G)$ группы $G$ совпадает с группой ее внутренних автоморфизмов $\mathrm{Inn}(G)$.*

При доказательстве В. А. Романьков учитывал, в частности, теорему A и результат А. И. Мальцева о строении централизаторов элементов свободной разрешимой группы.

Для исследования разрешимых произведений используется вложение в группу матриц, обобщающее вложение Магнуса. Его принято называть *вложением Шмелькина* [11–13]. При использовании вложения Шмелькина следуем работе Н. С. Романовского [14]. Разрешимые произведения имеют некоторые общие свойства со свободными разрешимыми группами. Важнейшее из них состоит в том, что последний неединичный коммутант разрешимого произведения $S$ свободных абелевых групп, рассматриваемый как модуль над групповым кольцом $\mathbb{Z}[S/S^{(n-1)}]$, не имеет кручения, т. е. группа $S$ является жесткой группой [15]. Но другое замечательное свойство свободной разрешимой группы, состоящее в том, что централизаторы ее элементов, не лежащих в последнем неединичном коммутанте, циклические, для разрешимого произведения свободных абелевых групп не выполняется [16]. Это создает дополнительные трудности в изучении разрешимых произведений абелевых групп.

Сначала докажем теорему 1 (аналог теоремы Шмелькина для разрешимых произведений свободных абелевых групп), а затем получим теорему 2 о том, что все нормальные автоморфизмы разрешимого (неабелева) произведения свободных абелевых групп внутренние.

## § 1. Предварительные результаты

В случае разрешимых произведений групп вложение Шмелькина и обобщенные производные Фокса играют ту же роль, что и обычное вложение Магнуса и производные Фокса в случае свободных разрешимых групп. Кратко напомним эти понятия. Более подробное изложение можно найти в [17–19].

Пусть $G$ — некоторая группа. Обозначим через $\varepsilon$ естественный гомоморфизм группового кольца $\mathbb{Z}[G]$ на $\mathbb{Z}$:

$$\varepsilon : \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

*Дифференцированием $D$ группового кольца* $\mathbb{Z}[G]$ произвольной группы $G$ называется отображение
$$D : \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}[G],$$
удовлетворяющее условиям
$$D(u+v) = D(u) + D(v), \quad D(uv) = D(u)v + \varepsilon(u)D(v)$$
для любых $u, v \in \mathbb{Z}[G]$.

Предположим, что группа $F$ является свободным произведением $F = G_1 * \cdots * G_m$ некоторых групп $G_i$. Для каждого $i$, $1 \leq i \leq m$, определим отображение $D_i$ по правилу $D_i(g) = g - 1$, если $g \in G_i$, и $D_i(g) = 0$, если $g \in G_j$, $i \neq j$. Далее, используя формулы для вычисления производных от произведения и суммы, продолжим отображение $D_i$ на кольцо $\mathbb{Z}[F]$. Получим дифференцирование $D_i$ кольца $\mathbb{Z}[F]$. Для $\gamma \in \mathbb{Z}[F]$ элемент $D_i(\gamma)$ называется *$i$-й обобщенной производной Фокса от элемента $\gamma$*.

Для любых элементов $u, v \in G$ обозначим
$$u^v = v^{-1}uv, \quad [u, v] = u^{-1}v^{-1}uv.$$
Легко получить формулы
$$D_i([u, v]) = D_i(u)(v - [u, v]) + D_i(v)(1 - u^v),$$
$$D_i(u^v) = D_i(v)(1 - u^v) + D_i(u)v.$$

Ядро $D$ естественного отображения свободного произведения групп $G_1 * \cdots * G_m$ на их прямое произведение $G_1 \times \cdots \times G_m$ называется *декартовой подгруппой свободного произведения*. Известно [20], что $D$ является свободной группой.

Следующая теорема является частным случаем вложения Шмелькина, достаточным для наших задач. Приведем ее в формулировке из [14].

**Теорема C** [14]. *Пусть $F = G_1 * \cdots * G_m$ — свободное произведение групп $G_i$, $1 \leq i \leq m$, $R$ — нормальная подгруппа из декартовой подгруппы $D$ группы $F$, $\overline{F} = F/R$, $T$ — свободный правый $\mathbb{Z}[\overline{F}]$-модуль с базой $\{t_1, \ldots, t_m\}$. Отображение*
$$g_i \longmapsto \begin{pmatrix} g_i & 0 \\ t_i(g_i - 1) & 1 \end{pmatrix}, \quad g_i \in G_i,$$
*задает вложение каждой группы $G_i$ в группу матриц*
$$\mathbf{M}(\overline{F}) = \begin{pmatrix} \overline{F} & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}.$$
*Эти вложения определяют гомоморфизм $\sigma : F \to \mathbf{M}(\overline{F})$. Тогда*

1) *образом элемента $g \in F$ является матрица*
$$\begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ t_1 D_1(g) + \cdots + t_m D_m(g) & 1 \end{pmatrix},$$
*где $\bar{g}$ — образ элемента $g$ в группе $\overline{F}$, $D_i(g)$ — значения обобщенных производных Фокса в кольце $\mathbb{Z}[\overline{F}]$;*

2) *ядро отображения $\sigma$ равно коммутанту $R'$ группы $R$;*

3) *матрица*
$$\begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ t_1 u_1 + \cdots + t_m u_m & 1 \end{pmatrix}$$

*из* $\mathbf{M}(\overline{F})$ *лежит в* $F/R'$ *тогда и только тогда, когда*

$$u_i \in \Delta_i \cdot \mathbb{Z}[\overline{F}], \quad u_1 + \dots + u_m = \bar{g} - 1,$$

*где* $\Delta_i$ *— фундаментальный идеал кольца* $\mathbb{Z}[G_i]$, *т. е.* $\Delta_i = \mathbb{Z}[G_i](G_i - 1)\mathbb{Z}[G_i]$.

Из этой теоремы следует, что значения всех обобщенных производных $D_i(g)$ от элемента $g \in F/R'$ в кольце $\mathbb{Z}[F/R]$ равны нулю тогда и только тогда, когда $g = 1$.

Через $S_n(G_1, \dots, G_m)$, $n \geq 1$, обозначим $n$-ступенно разрешимое произведение групп $G_1, \dots, G_m$. По определению $S_n(G_1, \dots, G_m) = F/D^{(n)}$, где $D^{(n)}$ обозначает $n$-й коммутант декартовой подгруппы $D$.

Нас будет интересовать случай, когда все $G_i$ — свободные абелевы группы, которые будем обозначать через $A_i$. Отметим, что тогда декартова подгруппа $D$ совпадает с коммутантом $F'$ $(= F^{(1)})$ группы $F$. В этом случае $S_n(A_1, \dots, A_m) = F/F^{(n+1)}$.

Если группы $A_i$ бесконечные циклические, то $S_n(A_1, \dots, A_m)$ — свободная разрешимая группа ранга $m$ и ступени разрешимости $n + 1$.

В дальнейшем отождествим группы $A_i$ с их образами в разрешимом произведении $S_n(A_1, \dots, A_m)$.

Сделаем еще одно замечание, которое будем постоянно использовать при изучении разрешимых произведений $G = S_n(A_1, \dots, A_m)$ свободных абелевых групп. В группе $G$ последний неединичный коммутант $G^{(n)}$ является $\mathbb{Z}[G/G^{(n)}]$-модулем, а именно группа $G$ действует на абелевой группе $G^{(n)}$ сопряжением: для $c \in G^{(n)}$ и $g \in G$ полагаем $c \cdot g = c^g$. Так как элементы из $G^{(n)}$ действуют на $G^{(n)}$ тождественно, относительно этого действия коммутант $G^{(n)}$ является правым $\mathbb{Z}[G/G^{(n)}]$-модулем.

Известно, что $\mathbb{Z}[G/G^{(n)}]$-модуль $G^{(n)}$ не имеет кручения, если $A_i$ — свободные абелевы группы.

## § 2. Основные результаты

**Теорема 1.** *Пусть* $m \geq 2$, $n \geq 1$, $A_1, \dots, A_m$ *— свободные абелевы группы,* $G = S_n(A_1, \dots, A_m)$ *—* $n$*-ступенно разрешимое произведение,* $\varphi$ *— автоморфизм группы* $G$*, действующий тождественно на последнем неединичном коммутанте* $G^{(n)}$ *группы* $G$*. Тогда* $\varphi$ *— внутренний автоморфизм, индуцированный элементом из* $G^{(n)}$.

Доказательство. Пусть $F = A_1 * \dots * A_m$ — свободное произведение абелевых групп.

Рассмотрим вначале случай метабелева произведения, т. е. предположим, что $n = 1$ (значит, $G = F/F''$).

Заметим, что любой автоморфизм группы $G$, действующий тождественно на коммутанте $G'$, является $IA$-автоморфизмом, т. е. индуцирует тождественное отображение на группе $G_{ab} = G/G'$.

Действительно, пусть $1 \neq a \in A_i$. Обозначим $c = a^{-1} \cdot a\varphi$. В качестве $d$ возьмем любой неединичный элемент из коммутанта $G'$. Имеем

$$[d, a]\varphi = [d, a] = [d, ac].$$

Группа $G_{ab}$ действует сопряжениями на коммутант $G'$. Из вложения Шмелькина следует, что относительно этого действия группа $G'$ является $\mathbb{Z}[G_{ab}]$-модулем без модульного кручения.

При использовании модульной записи элементы из $G$ и их образы в $G_{ab}$ будем обозначать одинаково. Используя модульную запись, перепишем равенство $[d,a]=[d,ac]$:
$$d^{a(1-c)}=1.$$
Так как $\mathbb{Z}[G_{ab}]$-модуль $G'$ не имеет кручения и $d\neq 1$, то $c=1$ в группе $G_{ab}$, т. е. $c\in G'$. Таким образом, $g\varphi\equiv g \pmod{G'}$ для любого элемента $g\in G$. Следовательно, $\varphi\in I\operatorname{Aut}(G)$.

Случай 1: все сомножители $A_i$ — циклические группы. Тогда $G$ — свободная метабелева группа. Утверждение теоремы следует из теоремы A.

Случай 2: ранги всех сомножителей $A_i$ не менее 2. Доказательство утверждения напрямую вытекает из следующего более общего результата, доказанного в [21].

Предположим, что $A_i$ — нециклическая группа. Тогда для каждого $IA$-автоморфизма $\alpha$ группы $G$ существует элемент $u\in G$ такой, что $\alpha$ переводит каждый $a\in A_i$ в $u^{-1}au$.

Так как $\varphi\in I\operatorname{Aut}(G)$ и все группы $A_i$ нециклические, для каждой подгруппы $A_i$ найдется элемент $g_i$ такой, что действие $\varphi$ на $A_i$ совпадает с сопряжением элементом $g_i$.

Пусть $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$ — два неединичных элемента. Имеем
$$a_1\varphi=a_1^{g_1},\quad a_2\varphi=a_2^{g_2}.$$
Поскольку $[a_1,a_2]\varphi=[a_1,a_2]$, то
$$\bigl[a_1^{g_1},a_2^{g_2}\bigr]=[a_1,a_2].$$
Отсюда
$$\bigl[a_1,a_2^{g_2g_1^{-1}}\bigr]=[a_1,a_2]^{g_1^{-1}}. \tag{1}$$
Вычисляя значения обобщенных производных от обеих частей (1), приходим к следующим равенствам в $\mathbb{Z}[G_{ab}]$:
$$\begin{aligned}D_1\bigl(\bigl[a_1,a_2^{g_2g_1^{-1}}\bigr]\bigr)&=D_1(a_1)(a_2-1)+D_1\bigl(a_2^{g_2g_1^{-1}}\bigr)(1-a_1)\\&=(a_1-1)(a_2-1)+D_1\bigl(g_2g_1^{-1}\bigr)(1-a_2)(1-a_1),\end{aligned} \tag{2}$$
$$D_1([a_1,a_2]^{g_1^{-1}})=g_1^{-1}(a_1-1)(a_2-1). \tag{3}$$
Обозначим $h=g_2g_1^{-1}$. Из (2) и (3) в кольце получим
$$D_1h=g_1^{-1}-1. \tag{4}$$
Пусть $\{a_1,\dots,a_r\}$ — базис группы $A_1$. Так как $D_1(h)\in(A_1-1)\mathbb{Z}[G_{ab}]$, из (4) имеем
$$g_1^{-1}-1=(a_1-1)\alpha_1+\dots+(a_r-1)\alpha_r, \tag{5}$$
где $\alpha_1,\dots,\alpha_r\in\mathbb{Z}[G_{ab}]$. Применим к (5) эндоморфизм группы $G_{ab}$, при котором $A_1$ отображается в 1. Получим, что образ элемента $g_1$ в группе $G_{ab}$ принадлежит $A_1$. Значит, $g_1=a'c_1$, где $a'\in A_1$, $c_1\in G'$. Поэтому элемент $g_1$ действует на $A_1$ как элемент из коммутанта $c_1$. Аналогично можно считать, что $g_2\in G'$.

Пусть $c=g_2g_1^{-1}$. Так как $c\in G'$, из (1) следует
$$\bigl[a_1,a_2^c\bigr]=[a_1,a_2[a_2,c]]=[a_1,[a_2,c]][a_1,a_2]=c^{(1-a_1)(1-a_2)}[a_1,a_2]=[a_1,a_2].$$

Значит,
$$c^{(1-a_1)(1-a_2)} = 1.$$
Это равенство возможно лишь при $c = 1$.

Итак, $\varphi$ действует на любых двух сомножителях $A_i$ и $A_j$ сопряжением на один и тот же элемент из $G'$.

Осталось убедиться, что сопрягающий элемент можно выбрать один сразу для всех сомножителей $A_i$.

Пусть автоморфизм $\varphi$ действует на $A_1$ и $A_2$ как сопряжение элементом $c_{12} \in G'$, а на $A_2$ и $A_3$ — сопряжением на элемент $c_{23} \in G'$. Тогда для любого элемента $a \in A_2$ имеем $a^{c_{12}} = a^{c_{23}}$. Отсюда
$$\left(c_{12}c_{23}^{-1}\right)^{1-a} = 1.$$
Значит, $c_{12} = c_{23}$.

Случай 3: сомножитель $A_1$ циклический, а ранг сомножителя $A_2$ больше 1. Пусть $A_1 = \langle a \rangle$, $A_2 = \langle a_1, a_2, \dots \rangle$, $a\varphi = ac$, $c \in G'$, $a_1\varphi = a_1^g$, $g \in G$. Проводя рассуждения, как в случае 2, можно считать, что $g \in G'$.

Имеем
$$\left[ac, a_1^g\right] = [a, a_1]\varphi = [a, a_1],$$
однако
$$\left[ac, a_1^g\right] = \left[a, a_1^g\right]\left[c, a_1^g\right] = g^{(1-a_1)(1-a)}c^{a_1-1}[a, a_1].$$
Значит,
$$g^{(1-a_1)(1-a)} = c^{1-a_1}. \tag{6}$$
Вычислим значения обобщенных производных от обеих частей равенства (6). Для $D_1$ получим равенство
$$(a_1 - 1)(a - 1)D_1(g) = (1 - a_1)D_1c.$$
Положим $\alpha_1 = D_1(g)$. Значит, $D_1(c) = (1 - a)\alpha_1$ и $\alpha_1 \in (A_1 - 1)\mathbb{Z}[G_{ab}]$. При $i \neq 1$ имеем
$$(1 - a_1)(1 - a)D_i(g) = (1 - a_1)D_i(c).$$
Отсюда $D_i(c) = (1 - a)\alpha_i$, причем $\alpha_i \in (A_i - 1)\mathbb{Z}[G_{ab}]$.

Так как $D_1(c) + \dots + D_m(c) = 0$, то $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 0$. Кроме того, при всех $i = 1, \dots, m$ имеем $\alpha_i \in (A_i - 1)\mathbb{Z}[G_{ab}]$. Значит, найдется элемент $d \in G'$ такой, что $\alpha_i = D_i(d)$. Поэтому $c = [a, d]$ и $a\varphi = ac = a[a, d] = a^d$.

Итак, автоморфизм $\varphi$ действует на каждом циклическом сомножителе $A_i$ сопряжением на некоторый элемент $d_i$ из коммутанта $G'$, а на каждый нециклический сомножитель — сопряжением на некоторый элемент $g_i$ из $G'$. Нужно проверить, что все элементы $d_j$ и $g_i$ равны между собой.

Проверим, что $d_1 = d_2$. Имеем
$$a_1\varphi = a_1^{d_1}, \quad a_2\varphi = a_2^{d_2},$$
где $A_1 = \langle a_1 \rangle$, $A_2 = \langle a_2 \rangle$. Тогда
$$[a_1, a_2]\varphi = [a_1, a_2] = \left[a_1^{d_1}, a_2^{d_2}\right] = \left[a_1, a_2^{d_2d_1^{-1}}\right].$$
Пусть $d = d_2d_1^{-1}$. Значит, $\left[a_1, a_2^d\right] = [a_1, a_2]$. Отсюда $d^{(1-a_1)(1-a_2)} = 1$. Следовательно, $d = 1$.

Доказательства равенств $d_j = g_i = g_l$ проводятся аналогично.

Теорема доказана для случая $n = 1$.

Предположим, что $n \geq 2$.

Вначале выясним следующую ситуацию. Пусть автоморфизм $\alpha$ группы $G$ действует тождественно на коммутанте $G'$ и фактор-группе $G/G^{(n)}$. Покажем, что тогда $\alpha$ — тождественный автоморфизм.

Пусть $a$ — некоторый неединичный элемент из группы $A_i$ и $b$ — некоторый неединичный элемент из $A_j$, причем $i \neq j$. Так как $\alpha$ действует тождественно на группе $G/G^{(n)}$, то $b\alpha = bc$, $c \in G^{(n)}$.

Имеем

$$\begin{aligned}[a,b,b]\alpha &= [[a,b],b\alpha] = [a,b,bc] = [a,b,c][a,b,b][a,b,b,c]\\ &= c^{1-[a,b]}[a,b,b]c^{1-[a,b,b]} = [a,b,b]c^{(1-[a,b])[a,b,b]+1-[a,b,b]} = [a,b,b]c^{1-[a,b][a,b,b]}.\end{aligned}$$

Поскольку $[a,b,b]\alpha = [a,b,b]$, то

$$c^{1-[a,b][a,b,b]} = 1. \qquad (7)$$

Группа $G^{(n)}$ является $\mathbb{Z}[G/G^{(n)}]$-модулем без кручения. Следовательно, при $c \neq 1$ получаем

$$[a,b][a,b,b] = 1 \qquad (8)$$

в группе $G/G^{(n)}$. Так как $n \geq 2$, достаточно доказать, что равенство (8) невозможно в группе $S_2(A_1, \ldots, A_m)$. Однако

$$[a,b][a,b,b] = [a,b]^b \neq 1$$

в силу того, что элементы $a$ и $b$ лежат в разных сомножителях. Следовательно, $c = 1$ и $\alpha$ — тождественный автоморфизм.

Пусть автоморфизм $\varphi$ действует тождественно на группе $G^{(n)}$.

Для элемента $g \in G$ обозначим через $\varphi_g$ внутренний автоморфизм

$$\varphi_g : x \mapsto x^g, \quad x \in G.$$

Пусть $a$ — некоторый неединичный элемент из какого-либо множителя $A_i$, $a\varphi = ac$ для некоторого элемента $c \in G$. Покажем, что $c \in G^{(n)}$. Для этого рассмотрим некоторый неединичный элемент $d$ из подгруппы $G^{(n)}$. Имеем

$$[d,a] = [d,a]\varphi = [d,ac] = [d,c][d,a][d,a,c] = [d,a]d^{c-1}d^{(a-1)(c-1)} = [d,a]d^{a(c-1)}.$$

Значит, $d^{a(c-1)} = 1$. Следовательно, $c \in G^{(n)}$. Итак, автоморфизм $\varphi$ действует тождественно на фактор-группе $G/G^{(n)}$.

Как отмечено ранее, декартова подгруппа свободного произведения абелевых групп совпадает с коммутантом группы и является свободной группой. Поэтому $G \cong F/F^{(n+1)}$, а коммутант $G' \cong F'/(F')^{(n)}$ — свободная $n$-ступенно разрешимая группа.

Рассмотрим ограничение автоморфизма $\varphi$ группы $G$ на ее коммутант $G'$. Так как $\varphi$ действует тождественно на последнем неединичном коммутанте свободной разрешимой группы, по теореме А $\varphi$ действует на $G'$ как некоторый внутренний автоморфизм $\varphi_h$, $h \in G^{(n)}$.

Рассмотрим действие автоморфизма $\psi = \varphi\varphi_{h^{-1}}$ на группе $G$. Во-первых, $\psi$ действует тождественно на коммутанте $G'$, а во-вторых, является $IA$-автоморфизмом группы $G$, так как действует тождественно на фактор-группе $G/G^{(n)}$. Таким образом, автоморфизм $\psi$ обладает всеми свойствами автоморфизма $\alpha$, рассмотренного нами при доказательстве данной теоремы сразу после предположения $n \geq 2$. Как показали, автоморфизм $\alpha$ тождественный. Значит, $\psi$ — тождественный автоморфизм, т. е. $\varphi = (\varphi_{h^{-1}})^{-1} = \varphi_h$. Теорема доказана.

Автоморфизм $\varphi$ группы $G$ называется *нормальным*, если он отображает на себя каждую нормальную подгруппу группы $G$ конечного индекса.

Рассмотрим некоторый конечный простой неориентированный граф $\Gamma$. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_r\}$ — множество его вершин и $E$ — множество ребер. Частично коммутативная метабелева группа $S_\Gamma$ задается в многообразии всех метабелевых групп порождающими $X = \{x_1, \dots, x_r\}$ и определяющими соотношениями $[x_i, x_j] = 1$, если $(x_i, x_j) \in E$, т. е.

$$S_\Gamma = \langle x_1, \dots, x_r \mid x_i x_j = x_j x_i, \text{ если } (x_i, x_j) \in E, \ (\forall x, y, u, v)([[x, y], [u, v]] = 1)\rangle.$$

Метабелево произведение конечно порожденных свободных абелевых групп является частным случаем частично коммутативной метабелевой группы, когда каждая компонента связности определяющего графа $\Gamma$ является полным графом.

**Лемма.** *Пусть $\Gamma$ — некоторый граф, $G = S_\Gamma$ — частично коммутативная метабелева (неабелева) группа, определенная графом $\Gamma$. Предположим, что $\varphi$ — нормальный автоморфизм группы $G$. Тогда $\varphi \in I\,\mathrm{Aut}(G)$, т. е. $\varphi$ действует тождественно на фактор-группе $G_{ab} = G/G'$.*

Доказательство. Так как $G$ — конечно порожденная метабелева группа, любая ее нормальная подгруппа замкнута в кофинитной топологии, т. е. топологии, определенной нормальными подгруппами конечных индексов. Это означает, что нормальный автоморфизм группы $G$ отображает на себя любую нормальную подгруппу группы $G$.

Итак, пусть $\varphi$ — автоморфизм группы $G$, отображающий на себя каждую нормальную подгруппу. Автоморфизм $\varphi$ индуцирует нормальный автоморфизм $\bar{\varphi}$ группы $G_{ab} = G/G'$. Как доказано в [9], любой нормальный автоморфизм свободной абелевой группы либо тождествен, либо обращает все ее элементы.

В первом случае $\varphi \in I\,\mathrm{Aut}(G)$. Покажем, что второй случай невозможен. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — множество вершин графа $\Gamma$, $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ — некоторое подмножество из $X$ и $N$ — нормальное замыкание $Y$ в $G$. Тогда $G/N$ — частично коммутативная метабелева группа, определенная подграфом $\Gamma_Y$ графа $\Gamma$, натянутым на множество вершин из $X$, не принадлежащих $Y$. Выберем множество $Y$ так, что $\Gamma_Y$ определяет свободную метабелеву группу $M_2$ ранга 2 с базисом $\{x_i, x_j\}$. Автоморфизм $\varphi$ индуцирует на $M_2$ нормальный автоморфизм, который по теореме B внутренний. Таким образом, автоморфизм $\bar{\varphi}$ не обращает элементы $x_i$, $x_j$. Лемма доказана.

**Вопрос.** *Верно ли что любой нормальный автоморфизм частично коммутативной метабелевой группы является внутренним?*

**Следствие.** *Пусть $m \geq 2$, $A_1, \dots, A_m$ — конечно порожденные свободные абелевы группы, $G = S_1(A_1, \dots, A_m)$ — их метабелево произведение. Тогда любой нормальный автоморфизм группы $G$ действует тождественно на $G_{ab} = G/G'$.*

**Теорема 2.** *Пусть $m \geq 2$, $n \geq 1$, $A_1, \dots, A_m$ — свободные абелевы группы, $G = S_n(A_1, \dots, A_m)$ — $n$-ступенно разрешимое произведение. Тогда любой нормальный автоморфизм группы $G$ внутренний.*

Доказательство. Для каждого элемента $g$ группы $G$, не принадлежащего коммутанту $G'$, существует нормальная подгруппа $N$ группы $G$, содержащая коммутант и имеющая конечный индекс в $G$, такая, что $g$ не принадлежит $N$. Это означает, что коммутант $G'$ замкнут в кофинитной топологии. Поэтому нормальный автоморфизм $\varphi$ индуцирует нормальный автоморфизм на группе $G'$.

Пусть $n \geq 2$. В этом случае $G'$ — свободная разрешимая неабелева группа и $\varphi$ — ее нормальный автоморфизм. По теореме В любой нормальный автоморфизм этой группы внутренний. Значит, можно выбрать элемент $h \in G'$ такой, что ограничение $\varphi|_{G'}$ совпадает с сопряжением элементом $h$. Стало быть, автоморфизм $\varphi\varphi_{h^{-1}}$ действует тождественно на $G'$ и тем более на $(G')^{(n-1)}$. По теореме 1 автоморфизм $\varphi\varphi_{h^{-1}}$ является внутренним автоморфизмом группы $G$, индуцированным некоторым элементом $g \in G^{(n)}$, т. е. $\varphi\varphi_{h^{-1}} = \varphi_g$. Значит, $\varphi = \varphi_g\varphi_h = \varphi_{gh}$.

Пусть $n = 1$. Достаточно рассмотреть случай, когда все группы $A_i$ конечно порождены. По следствию $\varphi$ действует тождественно на $G_{ab}$.

Пусть $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$. Тогда $a_1\varphi = a_1c_1$, $a_2\varphi = a_2c_2$, $c_1, c_2 \in G'$, так как $\varphi \in I\,\mathrm{Aut}(G)$.

Нормальную подгруппу, порожденную элементом $[a_1, a_2]$, нормальный автоморфизм $\varphi$ отображает на себя. Это означает, что

$$[a_1, a_2]\varphi = [a_1, a_2]^{\alpha},$$

где $\alpha$ — некоторый элемент из кольца $\mathbb{Z}[G_{ab}]$. Так как $\varphi^{-1}$ также нормальный автоморфизм, элемент $\alpha$ обратим в кольце $\mathbb{Z}[G_{ab}]$. Следовательно, $\alpha = \pm g$, $g \in G_{ab}$.

Покажем, что $\alpha = g$. Действительно,

$$[a_1, a_2]\varphi = [a_1c_1, a_2c_2] = [a_1, a_2]c_2^{1-a_1}c_1^{a_2-1} \neq [a_1, a_2]^{-g}$$

ни для какого $g \in G_{ab}$. Значит, $[a_1, a_2]\varphi = [a_1, a_2]^g$.

Группа $G'$ — свободная абелева группа. Нормальный автоморфизм $\varphi$ индуцирует на $G'$ нормальный автоморфизм $\bar{\varphi}$, который действует на $G'$ тождественно либо обращает все ее элементы.

Но, как только-что установлено, $\varphi$ не может обращать элементы из $G'$. Таким образом, $\varphi$ действует на $G'$ тождественно. По теореме 1 $\varphi$ — внутренний автоморфизм. Теорема доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. 18-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2014.
2. *Bachmuth S.* Automorphisms of free metabelian groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 118. P. 93–104.
3. *Bachmuth S., Formanek E., Mochizuki H. Y.* IA-automorphism of certain two-generator torsion-free groups // J. Algebra. 1976. V. 40, N 1. P. 19–30.
4. *Bachmuth S., Mochizuki H. Y.* $\mathrm{Aut}(F) \to \mathrm{Aut}(F/F'')$ is surjective for free group $F$ of rank $\geq 4$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 292. P. 81–101.
5. *Романьков В. А.* Группы автоморфизмов свободных метабелевых групп // Проблемы взаимосвязи абстрактной и прикладной алгебры. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1985. С. 53–81.
6. *Романьков В. А.* Группы матриц вычетов // Проблемы взаимосвязи абстрактной и прикладной алгебры. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1985. С. 35–52.
7. *Bachmuth S., Mochizuki H. Y.* The nonfinite generation of $\mathrm{Aut}(G)$, $G$ free metabelian of rank 3 // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 270, N 2. P. 693–700.

**8.** *Романьков В. А.* Примитивные элементы свободных групп ранга 3 // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 7. С. 1074–1085.

**9.** *Шмелькин А. Л.* Два замечания о свободных разрешимых группах // Алгебра и логика. 1967. Т. 6, № 2. С. 95–109.

**10.** *Романьков В. А.* Нормальные автоморфизмы дискретных групп // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 4. С. 138–149.

**11.** *Шмелькин А. Л.* Сплетения и многообразия групп // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 29, № 1. С. 149–170.

**12.** *Шмелькин А. Л.* Замечания к моей работе «Сплетения и многообразия групп» // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. Т. 31, № 2. С. 443–444.

**13.** *Шмелькин А. Л.* О свободных произведениях групп // Мат. сб. 1969. Т. 79, № 4. С. 616–620.

**14.** *Романовский Н. С.* О вложении Шмелькина для абстрактных и проконечных групп // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 5. С. 598–612.

**15.** *Романовский Н. С.* Нётеровость по уравнениям жестких разрешимых групп // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 2. С. 258–279.

**16.** *Тимошенко Е. И.* Описание централизаторов элементов из метабелевых произведений абелевых групп // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 1. С. 212–220.

**17.** *Тимошенко Е. И.* Эндоморфизмы и универсальные теории. Новосибирск: ???, 2011. (Монографии НГТУ).

**18.** *Гупта Ч. К., Тимошенко Е. И.* Критерий для обратимости эндоморфизмов и тестовый ранг метабелева произведения абелевых групп // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 5. С. 561–581.

**19.** *Романовский Н. С.* К теореме о свободе для произведений групп // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 3. С. 354–367.

**20.** *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite groups // Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser. 7. 1957. N 25. P. 29–62.

**21.** *Ushakov P. V.* On embeddings of the Bachmuth type // Commun. Algebra. 2003. V. 31, N 3. P. 1059–1084.


*Статья поступила 14 мая 2014 г.*

Тимошенко Евгений Иосифович
Новосибирский гос. технический университет,
кафедра алгебры и математической логики,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
`algebra@nstu.ru`