Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2015. Том 56, № 1

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, У КОТОРЫХ СИЛОВСКУЮ 3–ПОДГРУППУ НОРМАЛИЗУЕТ СИЛОВСКАЯ 3′–ПОДГРУППА

Э. М. Пальчик

Аннотация. Определены возможные композиционные факторы конечных групп, у которых индекс нормализатора силовской 3-подгруппы взаимно прост с простым числом $s > 3$.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, индекс нормализатора силовской 3-подгруппы.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. В [1] А. С. Кондратьев и В. Го описали композиционные факторы конечных групп, у которых нормализаторы силовских 3-подгрупп содержат силовскую 2-подгруппу, и дали обстоятельный обзор результатов об индексах нормализаторов силовских подгрупп.

Их результат следующий.

Теорема A [1, теорема 1]. *Если индекс нормализатора силовской 3-подгруппы в конечной группе взаимно прост с числом 2, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны одной из следующих групп: $L_2(q)$ для $q \equiv \pm 1 \pmod{12}$; $L_n(q)$ для $n \in \{3,4,5\}$ и $q \equiv -1 \pmod{12}$; $U_n(q)$ для $n \in \{3,4,5\}$ и $q \equiv 1 \pmod{12}$; $PSp_4(q)$ для $q \equiv \pm 1 \pmod{12}$; $Sz(q)$; M_{11}.*

В данной работе доказана

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, $s > 3$ — простой делитель порядка группы G. Если $(|G : N_G(G_3)|, s) = 1$, то любой неабелев композиционный фактор $\overline{L}$ группы G такой, что $s \in \pi(\overline{L})$, должен быть изоморфен одной из следующих групп:*

1) $L_2(q)$, $q \equiv \pm 1 \pmod 3$, $e(q,3) = 2$, $e(q,s) = 3$, $(q^2-1)_3 = 3$ *или* $e(q,s) = e(q,3)$;

2) $L_n(q)$, $n = 3,4,5$, $q \equiv -1 \pmod 3$, $e(q,3) = 2$, $e(q,s) = 3$, $(q^2-1)_3 = 3$ *или* $e(q,s) = e(q,3)$;

3) $U_n(q)$, $n = 3,4,5$, $q \equiv \pm 1 \pmod 3$, $e(q,3) = 1$, $e(q,s) = 6$, $(q^2-1)_3 = 3$ *или* $e(q,s) = e(q,3)$ *и при* $s = 5$, $n < 5$;

4) $PSp_4(q)$, $q \equiv \pm 1 \pmod 3$, $e(q,s) = e(q,3)$;

5) ${}^2F_4(q)$, $q \equiv \pm 1 \pmod 3$, $\{3,s\} \subseteq \pi(q^2-1)$;

6) $q = 3^f$, $\overline{L}$ — *простая группа лиева типа,* s *делит* $|\overline{H}|$, *где* $\overline{H}$ — *подгруппа Картана группы* $\overline{L}$, $q \equiv 1 \pmod s$, s *не делит* $|W(\overline{L})|$;

7) J_1, $O'N$ *в обеих группах* $s = 5$.

1. Некоторые обозначения

Обозначения и терминология стандартны, как в [2–4].

Некоторые обозначения приводятся для удобства чтения: π — некоторое подмножество множества всех простых чисел; π' — дополнение к π в множестве всех простых чисел; (m,n) — наибольший общий делитель чисел m и n; $\pi(n)$ — множество всех различных простых делителей целого числа n; n_π — π-часть натурального числа n, т. е. наибольший делитель m числа n такой, что $\pi(m) \subseteq \pi$; $\pi(X) = \pi(|X|)$, $|X|$ — число различных элементов конечного множества X; $|X : H|$ — индекс подгруппы H в группе X; G_p — силовская p-подгруппа группы G порядка $|G|_p$; $\mathrm{Chev}(q)$ ($\mathrm{Chev}(r)$) — конечная группа лиева типа с полем определения $GF(q)$ характеристики r; $\mathrm{Chev} = \bigcup\limits_r \mathrm{Chev}(r)$; $\widehat{G}$ — универсальная накрывающая для $G \in \mathrm{Chev}$ с $Z(G) = 1$; $G' = [G, G]$; $\Phi_i(x)$ — циклотомический многочлен для i-х корней из 1; секция группы — фактор-группа ее некоторой подгруппы; K-свободная группа — группа, которая не имеет секций, изоморфных группе K; $W(G)$ — группа Вейля группы $G \in \mathrm{Chev}$; S_p-подгруппа — силовская p-подгруппа, p — простое число; m-делитель — простой делитель порядка группы $G \in \mathrm{Chev}$, который не делит порядка ни одной собственной параболической подгруппы из G; $e(q,t) = \mathrm{ord}_t(q)$ — наименьшее натуральное число e такое, что $q^e \equiv 1 \pmod t$, где t — нечетное простое число, q — целое число и $(q,t) = 1$ (т. е. t — примитивный простой делитель числа $q^e - 1$); $e(q,2) = 1$, если q — нечетное число и $q \equiv 1 \pmod 4$; $e(q,2) = 2$, если q — нечетное число и $q \equiv 3 \pmod 4$.

2. Предварительные результаты

В этом разделе всюду ниже G — конечная группа из множества $\mathrm{Chev}(q)$, $q = r^f$, $r \neq 3$, s — простой делитель числа $|G|$, $r \neq s > 3$, P и S — ее силовские 3- и s-подгруппы соответственно.

Если G — универсальная группа, то известно [3, с. 110; 4, с. 237], что

$$|G| = q^N \cdot \prod_i \Phi_i(q)^{n_i} \tag{1}$$

для подходящих натуральных чисел N, i, n_i.

Пусть p — простое число, $p > 2$, $(p,q) = 1$, $p \in \pi(G)$, $m_0 = e(q,p)$. В этих обозначениях имеет место следующая

Лемма 1 [3, (10-1), (10-2); 4, теоремы 4.10.2, 4.10.3]. *Пусть P^* — нетривиальная силовская p-подгруппа из G. Если $G = {}^3D_4(q)$, то пусть $p \neq 3$. Пусть ω — множество индексов i вида $i = m_0 \cdot p^a$, $a > 0$ в (1). Тогда*

1) P^* имеет нетривиальную нормальную гомоциклическую абелеву подгруппу P^*_H ранга n_{m_0} (кратность $\Phi_{m_0}(q)$ в (1)) и экспоненты $|\Phi_{m_0}(q)|_p$; $P^* = P^*_H \leftthreetimes P^*_W$, где P^*_W — (возможно, тривиальная) подгруппа порядка p^b, $b = \sum\limits_{pm_0 | i} n_i$, изоморфная подгруппе из $W(G)$;

2) ранг P^* равен n_{m_0}, исключая случаи, когда ранг P^* равен $n_{m_0} - 1$: (1) $G = A_n(q)$, $n > 3$, p делит $(n, q-1)$, $n_p > (q-1)_p$; (2) $G = {}^2A_n(q)$, $n > 3$, p делит $(n, q+1)$, $n_p \geq (q+1)_p$; (3) $G = E_6(q)$, $p = 3$, $(q-1)_3 = 3$; (4) $G = {}^2E_6(q)$, $p = 3$, $(q+1)_3 = 3$.

Лемма 2. *Пусть $G = G_2(q)$. Тогда $P' \neq 1$.*

Доказательство. По [3, табл. 10:2, с. 111]

$$|G|_{r'} = \Phi_1^2(q) \cdot \Phi_2^2(q) \cdot \Phi_3(q) \cdot \Phi_6(q) = (q-1)^2(q+1)^2(q^2+q+1)(q^2-q+1). \quad (2)$$

Если 3 делит $q-1$, то $e(q,3) = 1 = m_0$. По лемме 1 $n_{m_0} = 2$ (показатель степени при $\Phi_1(q)$ в (2)). Множество ω из леммы 1 состоит из одного числа $i = 1 \cdot 3$. Показатель степени при $\Phi_3(q)$ есть $n_3 = 1$. По лемме 1 P изоморфна группе $(Z_m \times Z_m) \rightthreetimes Z_3$ и имеет 3-ранг $n_{m_0} = 2$, где $m = (q-1)_3$. Поэтому $P' \neq 1$.

Аналогично доказывается утверждение леммы и в случае, когда 3 делит $q+1$ с $m_0 = 2$, $n_{m_0} = 2$, $m = 2 \cdot 3$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $G = {}^3D_4(q)$. Тогда $P' \neq 1$.*

Доказательство. По [5, табл. 2] G не $G_2(q)$-свободна. Поэтому $P' \neq 1$. Лемма доказана.

Следующая лемма — это лемма 2.5 в [6]. Нам понадобится ее формулировка в более общем виде. При этом доказательство из [6] дословно сохраняется.

Лемма 4 [6, лемма 2.5]. *Пусть G — универсальная группа из множества $\mathrm{Chev}(q)$, $W = W(G)$, 3 делит $|W|$. Тогда группа G не является $A_2(q)$-свободной группой, где $A_2(q)$ — универсальная группа.*

Лемма 5. *Пусть $G = A_2(q)$ — универсальная группа. Тогда*

1) *если 3 делит $q-1$, то $P' \neq 1$;*

2) *если 3 делит $q+1$, то P — циклическая группа;*

3) *если 3 делит $q-1$, то в G нет холловой нильпотентной $\{3,s\}$-подгруппы, где $s > 3$;*

4) *если $3s$ делит $q-1$, $s > 3$, то в группе $G/Z(G) \cong L_3(q)$ нет абелевой холловой $\{3,s\}$-подгруппы;*

5) *если $3s$ делит $q+1$, $s > 3$, то в группе $U_3(q)$ нет абелевой холловой $\{3,s\}$-подгруппы.*

Доказательство. 1), 2). По [4, (4.10.1), с. 237]

$$|G|_{r'} = \Phi_1(q)^2\Phi_2(q)\Phi_3(q) = (q-1)^2(q+1)(q^2+q+1). \quad (3)$$

Если 3 делит $q-1$, то $e(q,3) = 1 = m_0$, $n_{m_0} = 2$, $|W(G)|_3 = 3$. Пусть $(q-1)_3 = m$. По лемме 1 $P \cong (Z_m \times Z_m) \rightthreetimes Z_3$ и 3-ранг P равен $n_{m_0} = 2$. Поэтому $P' \neq 1$.

Если 3 делит $q+1$, то $e(q,3) = 2 = m_0$, $n_{m_0} = 1$. Среди индексов i при $\Phi_i(q)$ в (3) нет чисел вида $m_0 \cdot 3^a$, $a > 0$. По лемме 1 P — группа 3-ранга 1. Случаи 1) и 2) доказаны.

3) Предположим, что 3 делит $q-1$ и в G есть нильпотентная холлова $\{3,s\}$-подгруппа H. Пусть $H = H_3 \times H_s$ и s не делит $|W(G)|$. Так как $H_3' \neq 1$ по п. 1), согласно [7, теорема 6.9; 8] $\{3,s\} \subseteq \pi(q-1)$. Поэтому $H_s \subseteq K$, где K — подгруппа Картана в группе G. Пусть $t \neq 1$ — элемент порядка s в $H \cap K$.

По [9, (2.9)] $C_G(t) = C$ имеет нормальную подгруппу $Y = K \cdot (D * X)$, где $D = D_1 * \dots * D_k$, $k \geq 0$, $X \subseteq K \cap Z(DX)$, D_i — группа лиева типа с полем определения порядка q^{b_i}, $b_i > 0$, $i = \overline{1,k}$, K индуцирует на D_i внутренне-диагональные автоморфизмы, $i = \overline{1,k}$ [4, теорема 4.2.2]. Так как $3s$ делит $(q-1)|(q^{b_i}-1)$, то $D_i/Z(D_i) \cong PSL_2(q^{b_i})$ [4, теорема 6.5.3]. Если 3-элемент $1 \neq y \in K$ не лежит в D_i, то он индуцирует, как отмечено выше, на D_i диагональный автоморфизм порядка $(2, q^{b_i} - 1)$ [4, теорема 2.5.12]. Но 3 не делит $(2, q^{b_i} - 1)$. Поэтому $K_3 \subseteq DX$. По [4, теорема 4.2.2] C/Y — элементарная абелева s-группа. Тем самым $C_3 \subseteq Y_3 \subseteq DX$. Из строения DX следует, что S_3-подгруппа в группе DX абелева. Так как $H \subseteq C$, это противоречит п. 1). Случай 3) доказан.

4) Утверждения 4) и 5) будем доказывать вместе. Заметим, что по [10, E, 4.3(e)] среди простых делителей чисел $|L_3(q)|$ и $|U_3(q)|$ нет «плохих» в смысле [10, E, 4.1] простых чисел. Тогда из предложения (1.3B)(iii) в [11] следует, что абелева холлова $\{3, s\}$-подгруппа лежит в максимальном торе группы $L_3(q)$ $(U_3(q))$.

У каждой из этих групп есть по три класса максимальных торов, из которых только торы порядков $(q-1)^2/(3, q-1)$ и соответственно $(q+1)^2/(3, q+1)$ содержат силовскую s-подгруппу. Но по [4, теорема 6.5.3(b)] холловы $\{3, s\}$-подгруппы в этих торах не холловы в группах $L_3(q)$ и $U_3(q)$ соответственно. Этим утверждения 4) и 5) доказаны. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть G — универсальная группа лиева типа, $G \in \{A_5(q), {}^2A_5(q), B_3(q), C_3(q)\}$, всюду $q = r^f$, $r \neq 3$. Тогда $G_3' \neq 1$.*

Доказательство. Докажем утверждение для $G = {}^2A_5(q)$. Остальные случаи доказываются аналогично. Исходя из числа $|G|$, имеем

$$|G|_{r'} = (q-1)^3(q+1)^5(q^2+q+1)(q^2+1)(q^2-q+1)^2(q^4-q^3+q^2-q+1) \\ = \Phi_1^3(q)\Phi_2^5(q)\Phi_3(q)\Phi_4(q)\Phi_6(q)\Phi_{10}(q). \quad (4)$$

По теореме Эйлера 3 делит $q^2 - 1$. Если 3 делит $q - 1$, то $e(q, 3) = 1 = m_0$. Так как $\Phi_1^3(q)$ есть в правой части (4), 3-ранг G по лемме 1 равен $n_{m_0} = 3$. Среди индексов i при $\Phi_i(q)$ в правой части (4) вид $i = m_0 \cdot 3^a$, $a > 0$, есть только один: $i = 1 \cdot 3 = 3$. При этом $\Phi_3(q)$ входит в правую часть (4) с показателем $n_3 = 1$. По лемме 1 $G_3 \cong (Z_m \times Z_m \times Z_m) \leftthreetimes Z_3$, где $m = (q-1)_3$, так как $W({}^2A_5(q)) \cong Z_2 \wr S_3$. Поэтому $G_3' \neq 1$, иначе 3-ранг G будет 4, а не 3.

Если 3 делит $q + 1$, то $e(q, 3) = 2 = m_0$, $n_{m_0} = n_2 = 5$ (показатель, с которым $\Phi_2(q)$ входит в правую часть (4)). Это 3-ранг G. Среди индексов i вид $i = m_0 \cdot 3^a$, $a > 0$, при $\Phi_i(q)$ в правой части (4) есть один: $i = 2 \cdot 3 = 6$. Опять $G_3 \cong (Z_k \times Z_k \times Z_k \times Z_k \times Z_k) \leftthreetimes Z_3$, где $k = (q+1)_3$, и $G_3' \neq 1$, иначе 3-ранг G был бы равен $6 \neq r_2 = 5$. Лемма доказана.

Замечание. (1) Если 3 делит $q + 1$, то у универсальных групп $A_3(q)$ и $A_4(q)$ S_3-подгруппа абелева. Это доказывается аналогично заключению 2) в лемме 5 с использованием табл. 10:1 в [3].

(2) Простые группы $L_5(q)$ и $U_5(q)$ также имеют простые неабелевы S_3-подгруппы. Это следует из того, что 3 не делит $(5, q \pm 1)$.

Лемма 7. *Пусть G — универсальная группа лиева типа с полем определения $GF(q)$, $q = r^f$, $r \neq 3$. Пусть $G \in \{G_2(q)$; ${}^3D_4(q)$; $A_n(q)$, $n > 1$, 3 делит $q - 1$; $A_n(q)$, $n > 4$; ${}^2A_n(q)$, $n > 4$; $B_n(q)$, $n > 2$; $C_n(q)$, $n > 2$; $F_4(q)$; $E_i(q)$, $i = 6, 7, 8$; $D_n(q)$, $n \geq 4$; ${}^2D_n(q)$, $n \geq 4$; ${}^2E_6(q)\}$. Тогда $G_3' \neq 1$.*

Доказательство. Для групп $G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$ это следует из лемм 3 и 2. Из лемм 5 и 4 вытекает, что это верно для групп $G = A_n(q)$, $n > 1$, 3 делит $q - 1$, так как в этом случае G не $A_2(q)$-свободна. Если $G = A_n(q)$, $n \geq 5$, то G не $A_5(q)$-свободна [12, табл. 3], и утверждение верно по лемме 6. Если $G = {}^2A_n(q)$ с $n \geq 5$, то G не ${}^2A_5(q)$-свободна [5, табл. 2], и утверждение верно по лемме 6. Пусть $G \in \{B_n(q), C_n(q)\}$ и $n > 2$. Тогда G не $B_3(q)$- или не $C_3(q)$-свободна [12, табл. 3] соответственно, и утверждение следует из леммы 6. Группа $F_4(q)$ не $B_4(q)$-свободна [5, табл. 2], и по предыдущему $G_3' \neq 1$. Группы $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$ не $F_4(q)$-свободны [5, табл. 2], и поэтому у них S_3-подгруппа неабелева. Группы $E_i(q)$ не $A_i(q)$-свободны, $i = 7, 8$ [5, табл. 2]. Тем самым у них S_3-подгруппы неабелевы. Группы $D_n(q)$ и ${}^2D_n(q)$, $n \geq 4$, не $B_{n-1}(q)$-свободны [5, табл. 2], поэтому у них S_3-подгруппа неабелева по предыдущему. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть G — простая группа лиева типа с полем определения $GF(q)$ характеристики $r \neq 3$, $q = r^f$. Пусть H — холлова $\{3, s\}$-подгруппа в группе G, $r \neq s > 3$ и $G_s \subseteq N_G(G_3)$. Тогда*

(1) $H = H_3 \times H_s$;

(2) если $\widehat{G}$ такая группа, что $\widehat{G}/Z(\widehat{G}) \cong G$, то $\widehat{H}_3 \times \widehat{H}_s = \widehat{H}$, где $\widehat{H}$ — холлова $\{3, s\}$-подгруппа в $\widehat{G}$.

Доказательство. (1) По [11, теорема 1] $H_s \lhd H$. Этим п. (1) доказан.

Пусть $\widehat{K}$ — прообраз нильпотентной холловой $\{3, s\}$-подгруппы группы $\widehat{G}/Z$ в группе $\widehat{G}$. Из [2, теоремы III.3.10, III.2.3] следует, что $\widehat{K}$ — нильпотентная группа. Тогда холлова $\{3, s\}$-подгруппа $\widehat{H}$ из $\widehat{K}$ удовлетворяет заключению (2) леммы. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть G — простая спорадическая или знакопеременная группа. Если $(|G : N_G(G_3)|, s) = 1$, где простое число $s > 3$ делит $|G|$, то $s = 5$, $G = J_1$ или $O'N$ и соответственно $G_3 \cdot G_5 = G_3 \times G_5$ или $G_3 \leftthreetimes G_5$ и $G_3' = 1 = G_5'$.*

Доказательство. Утверждение следует из [6, следствие 6.13; 4, гл. V; 13, 14]. Лемма доказана.

Лемма 10 [1, лемма 1.1]. *Пусть G — конечная группа, P и S — ее силовские 3- и s-подгруппы, $s > 3$, $(|G : N_G(P)|, s) = 1$. Если $H \lhd G$, то*

(a) в фактор-группе G/H нормализатор любой S_3-подгруппы имеет индекс, взаимно простой с s;

(b) в H нормализатор любой S_3-подгруппы имеет индекс, взаимно простой с s.

В следующей лемме под группой из множества $\mathrm{Chev}(r)$ понимается как группа с единичным центром, так и любая фактор-группа универсальной группы лиева типа по центральной подгруппе.

Лемма 11. *Пусть $G \in \mathrm{Chev}(r)$. Пусть 3 и s — простые делители числа $|G|$, $s > 3$, $3 \neq r \neq s$. Если G имеет нильпотентную холлову $\{3, s\}$-подгруппу $H = H_3 \times H_s$, то $H_3' = 1 = H_s'$.*

Доказательство. Абелевость H_s следует из теоремы 1 в [11]. Для групп множества $\mathrm{Chev}(r)$ с минимальным значением $|G|$ (равным $r(r^2 - 1) \cdot d^{-1}$, $d = (2, r-1)$) утверждение верно (строение групп $L_2(r)$ хорошо известно [2, теорема II.8.27]).

Используя индукцию по числу $|G|$, покажем, что утверждение верно и для групп множества $\mathrm{Chev}(r)$ большего порядка. Пусть $GF(q)$ с $q = r^f$ есть поле определения для G.

Пусть $1 \neq x$ — элемент порядка s из H_s. По [4, теорема 4.2.2(a), (b), (d), (e)] $C_G(x) = C$ содержит нормальные подгруппы Y и TY такие, что $Y = D_1 * \cdots * D_m$, $m \geq 0$, где $D_i \in \mathrm{Chev}(r)$ с полем определения порядка q^{m_i}, $m_i > 0$, T — абелева r'-подгруппа, индуцирующая на D_i, $i = \overline{1, m}$, внутренне-диагональные автоморфизмы, а C/TY — элементарная абелева s-группа, изоморфная подгруппе из центра, накрывающей группы для $G/Z(G)$. В частности, отсюда следует, что $H_3 \subseteq TY$ в силу $H \subseteq C$. Если $m = 0$, то $Y = 1$ и $H_3' = 1$ ввиду $H_3 \subseteq T$. Поэтому впредь считаем, что $m > 0$.

По [13, теорема 4(2)] $3s$ делит $q-1$ или $q+1$. Из условия леммы следует, что $D_i \ncong {}^2G_2(3^{fm_i})$ ни для одного i. Кроме того, $D_i \ncong {}^2B_2(2^{fm_i})$, так как 3 не делит $|{}^2B_2(2^{fm_i})|$. Поэтому $3s$ делит q^2-1, $q^{2m_i}-1$ и $|D_i|$ для всех $i = \overline{1,m}$ по [10, табл. 6]. Так как $D_i \lhd C$, то $D_i \cap H = H_i$ есть нильпотентная холлова $\{3,s\}$-подгруппа в D_i. Поскольку $|D_i| < |G|$ (или $C = G$), индукция по порядку группы дает нам, что S_3-подгруппа в D_i (в $G/\langle x\rangle$) абелева, $i = \overline{1,m}$. Тогда из строения группы Y следует, что и Y_3 — абелева группа. Если $H_3 \nsubseteq Y$, то $H_3 = T_3 \cdot Y_3$ для некоторых S_3-подгрупп T_3 и Y_3 из T и Y соответственно.

Предположим, что $1 \neq y \in T_3 - Y_3$. Как отмечено выше, $\langle y\rangle D_i \subseteq \mathrm{Inndiag}(D_i)$. Но тогда по [4, теорема 2.5.12] $D_i \in \{A_n(q^{m_i}), {}^2A_n(q^{m_i})$ и 3 делит $n+1$ для некоторого натурального числа $n\}$ или $D_i \in \{E_6(q^{m_i})/Z, {}^2E_6(q^{m_i})/Z$, где $|Z|$ равен 1 или $3\}$. Но из доказательства леммы 7 следует, что у групп $E_6(q^{m_i})/Z$ и ${}^2E_6(q^{m_i})/Z$ S_3-подгруппы неабелевы. Так как $A_5(q)$ вкладывается в $A_n(q)$ с $n \geq 5$ и ${}^2A_5(q)$ вкладывается в ${}^2A_n(q)$ с $n \geq 5$ для всех q [5, табл.2], по лемме 6 и по п. (2) замечания $n < 5$. Поэтому $n = 2$. Если 3 делит $|Z(D_i)|$, то D_i — универсальная группа. Тогда по [3, (10-4)(1)] S_3-подгруппа группы $\langle y\rangle D_i$ абелева. Тем самым $y \in D_i$ по [3, (10-3)] или [9, теорема C]. Поэтому пусть 3 не делит $|Z(D_i)|$ и $D_i \in \{L_3(q^{m_i}), U_3(q^{m_i})\}$. Но по лемме 5 (заключения 4 и 5) в этих группах нет абелевой холловой $\{3,s\}$-подгруппы указанного выше порядка. Лемма доказана.

Из доказательства леммы 1.1 в [1] легко вытекает ее следующее обобщение.

Лемма 12. *Пусть H — нормальная подгруппа конечной группы G, p — простое число и $\pi(G : N_G(G_p)) = \pi$. Тогда*
(a) $\pi(\overline{G} : N_{\overline{G}}(\overline{G}_p)) \subseteq \pi$, где $\overline{G} = G/H$;
(b) $\pi(H : N_H(H_p)) \subseteq \pi$.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть G — контрпример минимального порядка. Ввиду леммы 10 G — простая неабелева группа. Если $G \in \mathrm{Spor} \cup \{A_n / n \geq 5\}$, то по лемме 9 имеем заключение 7) теоремы. Пусть далее G — простая группа лиева типа с полем определения $GF(q)$ характеристики r и порядка $q = r^f$ с $s \in \pi(G)$.

Если $r = 3$, то по [6, теорема 3.2] имеем заключение 6) теоремы.

Пусть далее $r \neq 3$.

По условию и лемме 8(1) в G есть нильпотентная холлова $\{3,s\}$-подгруппа H. Тогда и группа $\widehat{G}$ такая, что $\widehat{G}/Z(\widehat{G}) \cong G$, имеет нильпотентную холлову $\{3,s\}$-подгруппу $\widehat{H}$ по лемме 8(2). По лемме 11 $\widehat{H}_3' = 1 = \widehat{H}_s'$. Из леммы 7 следует, что $\widehat{G} \in \{A_1(q)$; $A_n(q)$, $n = 2,3,4$, и 3 делит $q+1$; ${}^2A_n(q)$, $n = 2,3,4$; $B_2(q)$; ${}^2F_4(q)\}$. Тогда и $G_3' = H_3' = 1$, $H' = 1$.

Так как холлова $\{3,s\}$-подгруппа в группе G является нильпотентной, по [8; 7, следствие 6.7] простые неабелевы композиционные факторы группы G являются D_π-группами с $\pi = \{3,s\}$. По [7, теорема 6.9, с. 39, 40] получаем ограничения на число q в группах из заключений 1)–5) теоремы. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $|G : N_G(G_3)| = p^a \cdot s^b$, где p и s — различные простые делители порядка конечной группы G, $a > 0$, $b > 0$. Тогда каждый неабелев* *композиционный фактор группы G может быть изоморфен только одной из групп лиева типа, указанных в заключениях теорем* 1 *и* A, *либо* $\pi(G) \subseteq \{3, p, s\}$.

Доказательство. Если $N_G(G_3)$ не содержит G_t, где t — простое число и $t \notin \{3, p, s\}$, то $|\pi(G)| \leq 3$. В противном случае утверждение следует из теорем 1, A и [14]. Следствие доказано.

Так как простые конечные группы G с $|\pi(G)| = 4$ известны [15], может быть доказано аналогичное

Следствие 2. *Пусть p, s, r — попарно различные простые делители порядка конечной группы G и $|G : N_G(G_3)| = p^a \cdot s^b \cdot r^c$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. Тогда неабелевы композиционные факторы K группы G являются простыми группами лиева типа из заключений теорем* 1, A *или группами с* $|\pi(K)| \leq 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кондратьев А. С., Го В.* Конечные группы, в которых нормализаторы силовских 3-подгрупп имеют нечетные или примарные индексы // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 344–349.
2. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer-Verl., 1967.
3. *Gorenstein D., Lyons R.* The local structure of finite groups of characteristic 2 type. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 42, N 276).
4. *Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.* The classification of the finite simple groups. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. (Math. Surveys Monogr.; V. 40, N 3).
5. *Кондратьев А. С.* Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 1. С. 57–96.
6. *Gross F.* On a conjecture of Philip Hall // Proc. London Math. Soc. 1986. V. 52, N 3. P. 464–494.
7. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 5. С. 3–46.
8. *Wielandt H.* Zum Satz von Sylow // Math. Z. 1959. Bd 71, Heft 4. S. 461–462.
9. *Gross F.* Automorphisms which centralize a Sylow p-subgroup // J. Algebra. 1982. V. 77, N 1. P. 202–233.
10. Семинар по алгебраическим группам. М.: Мир, 1973.
11. *Liebeck M., Saxl J.* On the orders of maximal subgroups of the finite exceptional groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. 1987. V. 55, N 2. P. 299–330.
12. *Conway I., Curtis R., Norton S., Parker R., Wilson R.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
13. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Холловы подгруппы нечетного порядка в конечных группах // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 1. С. 15–56.
14. *Сыскин С. А.* Абстрактные свойства простых спорадических групп // Успехи мат. наук. 1986. Т. 35, № 5. С. 181–212.
15. *Huppert B., Lempken W.* Simple groups of order divisible by at most four primes // Изв. Гомель. гос. ун-та. Вопросы алгебры. 2000. № 3. С. 64–75.

Статья поступила 19 октября 2012 г.

Пальчик Эдуард Михайлович
Полоцкий гос. университет,
ул. Блохина, 29, Новополоцк 211440, Беларусь
bashunsviat@mail.ru