Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2015. Том 56, № 1

УДК 517.97

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

Н. Мамадалиев

Аннотация. Одной из интересных задач теории дифференциальных игр является задача преследования при интегральных ограничениях на управляющие параметры игроков. Получены достаточные условия для разрешимости линейной задачи преследования с интегральными ограничениями на управления игроков при наличии запаздывания.

Ключевые слова: преследование, убегание, терминальное множество, управление, запаздывание, дифференциальная игра.

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается линейная дифференциальная игра, описываемая системой уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - Cu(t) + Dv(t), \tag{1}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, $n \geq 1$, h — фиксированное действительное число, A, B, C, D — постоянные прямоугольные матрицы, порядки которых $n \times n$, $n \times n$, $n \times p$, $n \times q$ соответственно. Функции $u(\cdot)$, $v(\cdot)$, определенные на $[0, \infty)$, называются *управлениями* преследующего и убегающего игроков соответственно. Они выбираются из класса измеримых функций, удовлетворяющих ограничениям

$$\int_0^\infty |u(t)|^2\,dt \leq \rho^2, \quad \int_0^\infty |v(t)|^2\,dt \leq \sigma^2, \tag{2}$$

где ρ и σ — неотрицательные константы.

Измеримые функции $u = u(t)$, $v = v(t)$, $0 \leq t < \infty$, удовлетворяющие ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков соответственно.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено терминальное множество M в виде $M = M_0 + M_1$, где M_0 — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1 — выпуклое компактное подмножество подпространства L, ортогонального дополнения к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$ (т. е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$). Игра считается законченной, если $z(t) \in M$ в некоторый конечный момент времени t. Начальным положением для системы (1) является n-мерная вектор-функция $z_0(\cdot) \in X$, где

$$X = \{z_0(\cdot) : z_0(t) \text{ — абсолютно непрерывная функция, определенная на отрезке } [-h, 0],\ z_0(0) \in \mathbb{R}^n \setminus M\}. \tag{3}$$

Пусть $u = u(t)$, $0 \le t < \infty$, и $v = v(t)$, $0 \le t < \infty$, — произвольные допустимые управления в игре (1), (2). Управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ и начальному положению $z_0(\cdot) \in X$ ставится в соответствие решение $z(z_0(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ уравнения (1), выходящее при $t = 0$ из начального положения $z_0(\cdot) \in X$.

Определение. Будем говорить, что в игре (1), (2) из начального положения $z_0(\cdot) \in X$ *возможно завершение преследования* за конечное время $T = T(z_0(\cdot))$, если для любого допустимого управления убегающего $v(t)$, $0 \le t \le T$, существует допустимое управление преследователя $u(t)$, $0 \le t \le T$, такое, что решение $z(t)$, $0 \le t \le T$, уравнения $\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - Cu(t) + Dv(t)$ с учетом начального условия (3) при некотором $t = t' \in [0, T]$ удовлетворяет включению $z(t') \in M$. При этом для построения управления $u(t)$ в каждый момент времени t разрешается использовать значения $v(t)$, $0 \le t \le T$, и $z(s)$, $t - h \le s \le t$. Требуется найти начальное положение $z_0(\cdot) \in X$, из которого в игре (1) возможно завершение преследования за время $T = T(z_0(\cdot))$.

Пусть τ — положительное число и $t \in [0, \tau]$. Пусть допустимые управления $u = u(t)$, $v = v(t)$ выбраны на отрезке $[0, \tau]$, тогда для решения $z(t)$ уравнения (1) при начальном условии $z(t) = z_0(t)$, $-h \le t \le 0$, справедлива формула [1]

$$z(\tau) = K(\tau)z_0(0) + \int\limits_{-h}^{0} K(\tau - h - t)Bz_0(t)\,dt - \int\limits_{0}^{\tau} K(\tau - t)[Cu(t) - Dv(t)]\,dt, \quad (4)$$

где $K(t)$, $-\infty < t \le \tau$, — матричная функция, обладающая следующими свойствами:

(а) $K(t) = \tilde{0}$, $t < 0$, $\tilde{0}$ — нулевая матрица порядка n;

(б) $K(0) = E$, E — единичная матрица порядка n;

(в) элементы матричной функции $K(t)$, $0 \le t \le \tau$, принадлежат классу $C^1[0, \tau]$;

(г) $K(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t-h), \quad 0 < t \le \tau. \quad (5)$$

Существование и единственность матричной функции $K(t)$, удовлетворяющей условиям (а)–(г), могут быть доказаны обычным методом последовательного интегрирования уравнения (5).

2. Формулировки и доказательства основных результатов

Сформулируем предположения, при выполнении которых гарантируется завершение преследования из начальной точки $z_0(\cdot) \in X$ (теоремы 1–4).

(A) Через π обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на L. Рассмотрим линейные отображения $\pi K(t)C : \mathbb{R}^p \to L$, $\pi K(t)D : \mathbb{R}^q \to L$, где $t \ge 0$.

Предположение 1. *Существует матричная функция $F(t)$, $t \in [0, \tau]$, с суммируемыми с квадратом элементами, удовлетворяющая равенству $\pi K(t)CF(t) = \pi K(t)D$.*

В силу предположения 1 получаем $\pi K(t)CF(t)w = \pi K(t)Dw$ для всех $t \in [0, \tau]$ и $w \in \mathbb{R}^q$.

Пусть

$$\xi[\tau, z_0(\cdot)] = \pi K(\tau) z_0(0) + \int\limits_{-h}^{0} \pi K(\tau - h - t) B z_0(t)\, dt - m_1.$$

Положим

$$\eta[\tau, z_0(\cdot)] = \begin{cases} \frac{\xi[\tau, z_0(\cdot)]}{|\xi[\tau, z_0(\cdot)]|}, & \text{если } \xi[\tau, z_0(\cdot)] \neq 0, \\ \eta^0, & \text{если } \xi[\tau, z_0(\cdot)] = 0, \end{cases}$$

где η^0 — произвольный единичный вектор из L. С помощью матричной функции $F(t)$, $t \geq 0$, построим функцию

$$\chi^2(\tau) = \sup \left\{ \int\limits_0^{\tau} |F(t) w(t)|^2\, dt : \|w(\cdot)\|_{L_2[0,\tau]} \leq 1 \right\}.$$

С учетом функции $\chi^2(\tau)$ определим величину $\chi^2 = \sup\{\chi^2(\tau) : \tau > 0\}$.

Предположение 2. *Имеет место неравенство* $\rho^2 > \chi^2\sigma^2$.

Обозначим через γ константу $\rho^2 - \chi^2\sigma^2$, через $R(t, w, \lambda)$ — функцию $[|F(\tau - t)w|^2 + \lambda|\xi[\tau, z_0(\cdot)]|^{-1}\gamma]^{1/2}$, $0 \leq t \leq \tau$, $w \in \mathbb{R}^q$, $\lambda \geq 0$, и через $U(t, w, \lambda)$ — множество вида $R(t, w, \lambda)\pi K(\tau - t) CS - \pi K(\tau - t) D w$, где S — замкнутый единичный шар пространства $\mathbb{R}^p$ с центром в нуле.

Пусть $\lambda(t, \tau, w) = \sup\{\lambda \geq 0 : \lambda\eta[\tau, z_0(\cdot)] \in U(t, w, \lambda)\}$, при этом если $\xi[\tau, z_0(\cdot)] = 0$, то считается $\eta[\tau, z_0(\cdot)] = 0$, $\lambda(t, \tau, w) \equiv 0$.

Предположение 3. *Существует положительное число* $\tau = \tau_0$ *такое, что*

(а) *суперпозиция* $\lambda(t, \tau_0, v(t))$, $0 \leq t \leq \tau_0$, *функции* $\lambda(t, \tau_0, v)$, $0 \leq t \leq \tau_0$, $v \in \mathbb{R}^q$, *и произвольной суммируемой с квадратом функции* $v = v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_0$, *для которой* $\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_0]} \leq \sigma$, *суммируема* [2, 3];

(б) *выполнено неравенство*

$$|\xi[\tau_0, z_0(\cdot)]| - \inf \left\{ \int\limits_0^{\tau_0} \lambda(t, \tau_0, v(t))\, dt : \|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_0]} \leq \sigma \right\} \leq 0. \qquad (6)$$

Теорема 1. *Если выполнены сформулированные выше предположения* 1–3, *то в игре* (1) *при ограничениях* (2) *возможно завершение преследования из заданного начального положения* $z_0(\cdot) \in X$ *за время* $T(z_0(\cdot)) = \tau_0$.

Доказательство. Для произвольной суммируемой с квадратом функции $v = v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_0$, $\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_0]} \leq \sigma$, рассмотрим функцию $\rho(t; v(r), 0 \leq r \leq t)$, $0 \leq t \leq \tau_0$, определенную следующим образом [4]:

$$\rho(t) = \rho(t; v(r), 0 \leq r \leq t) = |\xi[t, z_0(\cdot)]| - \int\limits_0^{t} \lambda(r, \tau_0, v(r))\, dr.$$

В силу п. (б) предположения 3 существует момент времени $t = t_0 \in [0, \tau_0]$ такой, что $\rho(t_0) = 0$. Если $\xi[t_0, z_0(\cdot)] = 0$, то можно считать $t_0 = 0$. Пусть

$\xi[t_0, z_0(\cdot)] \neq 0$ и $\rho(t) > 0$ на отрезке $[0, \tau_0]$. В этом случае имеем

$$0 < \rho(\tau_0; v(t), 0 \leq t \leq \tau_0) = |\xi[\tau_0, z_0(\cdot)]| - \int\limits_0^{\tau_0} \lambda(t, \tau_0, v(t))\, dt$$

$$\leq |\xi[\tau_0, z_0(\cdot)]| - \inf\left\{ \int\limits_0^{\tau_0} \lambda(t, \tau_0, v(t))\, dt : \|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_0]} \leq \sigma \right\},$$

что противоречит неравенству (6). Таким образом, $\rho(t_0; v(r), 0 \leq r \leq t_0) = 0$. Учитывая установленный факт, значение $u(t)$ параметра u для каждого t, $0 \leq t \leq \tau_0$, рекомендуется выбрать как наименьшее в лексикографическом смысле решение системы уравнений

$$\pi K(\tau_0 - t)Cu = \pi K(\tau_0 - t)Dv(t) + \lambda(t, \tau_0, v(t))\eta[t_0, z_0(\cdot)], \tag{7}$$

$$|u| = R(t, v(t), \lambda(t, \tau_0, v(t))), \quad 0 \leq t \leq t_0;$$

$$\pi K(\tau_0 - t)Cu = \pi K(\tau_0 - t)Dv(t), \tag{8}$$

$$|u| = R(t, v(t), 0), \quad t_0 < t \leq \tau_0.$$

Для решения $z(t)$, $0 \leq t \leq \tau_0$, уравнения (1) при начальном условии (3) имеем ((7), (8))

$$\pi z(\tau_0) = H(\tau_0)z_0(\cdot) - \int\limits_0^{\tau_0} \pi K(\tau_0 - t)[Cu(t) - Dv(t)]\, dt$$

$$= m_1 + \xi[t_0, z_0(\cdot)] - \int\limits_0^{t_0} \lambda(t, \tau_0, v(t))\eta[t_0, z_0(\cdot)]\, dt = m_1,$$

где

$$H(\tau_0)z_0(\cdot) = \pi K(\tau_0)z_0(0) + \int\limits_{-h}^{0} \pi K(\tau_0 - h - t)Bz_0(t)\, dt,$$

ибо, как установлено выше,

$$\xi[t_0, z_0(\cdot)] - \int\limits_0^{t_0} \lambda(t, \tau_0, v(t))\eta[t_0, z_0(\cdot)]\, dt$$

$$= \left[|\xi[t_0, z_0(\cdot)]| - \int\limits_0^{t_0} \lambda(t, \tau_0, v(t))\, dt \right] \eta[t_0, z_0(\cdot)] = \rho(t_0) = 0.$$

Следовательно, $\pi z(\tau_0) = m_1 \in M_1$, что эквивалентно включению $z(\tau_0) \in M$. Теперь покажем, что выбранная в соответствии с системой уравнений (7), (8) функция $u(t)$, $0 \leq t \leq \tau_0$, удовлетворяет неравенству $\|u(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_0]} \leq \rho$. Имеем

$$\int\limits_0^{\tau_0} |u(t)|^2\, dt = \int\limits_0^{t_0} R^2(t, v(t), \lambda(t, \tau_0, v(t)))\, dt + \int\limits_{t_0}^{\tau_0} R^2(t, v(t), 0)\, dt$$

$$= \int_0^{t_0} [|F(t)v(t)|^2 + |\xi[t_0, z_0(\cdot)]|^{-1}\lambda(t, \tau_0, v(t))\gamma]\, dt + \int_{t_0}^{\tau_0} |F(t)v(t)|^2\, dt$$

$$\le \int_0^{\tau_0} |F(t)v(t)|^2\, dt + |\xi[t_0, z_0(\cdot)]|^{-1}\gamma \int_0^{t_0} \lambda(t, \tau_0, v(t))\, dt$$

$$\le \chi^2\sigma^2 + |\xi[t_0, z_0(\cdot)]|^{-1}|\xi[t_0, z_0(\cdot)]|\gamma = \chi^2\sigma^2 + \gamma = \rho^2,$$

ибо, очевидно, что

$$\int_0^{\tau_0} |F(t)v(t)|^2\, dt \le \chi^2\sigma^2, \quad \int_0^{t_0} \lambda(t, \tau_0, v(t))\, dt = |\xi[t_0, z_0(\cdot)]|.$$

Теорема 1 доказана.

(Б) Пусть $M(t)$, $0 \le t \le \tau$, — произвольное компактнозначное многозначное отображение такое, что $\int_0^{\tau} M(t)\, dt \subset M_1$.

Введем множество

$$U(M(t), v, \lambda, t) = [M(\tau - t) + R(t, v, \lambda)\pi K(\tau - t)CS] - \pi K(\tau - t)Dv,$$

$0 \le t \le \tau$, $v \in \mathbb{R}^q$, $\lambda \ge 0$. Положим

$$\xi[\tau, z_0(\cdot)] = \pi K(\tau)z_0(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau - t - h)Bz_0(t)\, dt - \int_0^{\tau} \widetilde{w}(\tau - t)\, dt,$$

$$\eta[\tau, z_0(\cdot)] = \begin{cases} \frac{\xi[\tau, z_0(\cdot)]}{|\xi[\tau, z_0(\cdot)]|}, & \text{если } \xi[\tau, z_0(\cdot)] \ne 0, \\ \eta^0, & \text{если } \xi[\tau, z_0(\cdot)] = 0, \end{cases}$$

где $\widetilde{w}(t)$, $0 \le t \le \tau$ — произвольная суммируемая функция, $\widetilde{w}(t) \in U(M(t), v, \lambda, t)$ для всех $t \in [0, \tau]$, η^0 — произвольный единичный вектор из L.

Определим функцию $\lambda(t, \tau, v)$ следующим образом:

$$\lambda(t, \tau, v) = \sup\{\lambda \ge 0 : \lambda\eta[\tau, z_0(\cdot)] \in U(M(t), v, \lambda, t) - \widetilde{w}(\tau - t)\}.$$

Предположение 4. *Существуют положительное число $\tau = \tau_1$, многозначное отображение $M(t)$, $t \in [0, \tau_1]$, и суммируемая функция $\widetilde{w}(t)$, $0 \le t \le \tau_1$, такие, что*

(а) *суперпозиция $\lambda(t, \tau_1, v(t))$, $0 \le t \le \tau_1$, функции $\lambda(t, \tau_1, v)$, $0 \le t \le \tau_1$, $v \in \mathbb{R}^q$, и произвольной суммируемой с квадратом функции $v = v(t)$, $0 \le t \le \tau_1$, для которой $\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_1]} \le \sigma$, суммируема* [2, 3];

(б) *выполнено неравенство*

$$|\xi[\tau_1, z_0(\cdot)]| - \inf\left\{ \int_0^{\tau_1} \lambda(t, \tau_1, v(t))\, dt : \|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_1]} \le \sigma \right\} \le 0. \tag{9}$$

Теорема 2. *Если выполнены сформулированные выше предположения* 1, 2, 4, *то в игре* (1) *при ограничениях* (2) *возможно завершение преследования из заданного начального положения* $z_0(\cdot) \in X$ *за время* $T(z_0(\cdot)) = \tau_1$.

Доказательство. Аналогично (A) введем в рассмотрение функцию

$$\rho(t) = |\xi[t, z_0(\cdot)]| - \int\limits_0^t \lambda(r, \tau_1, v(r))\, dr, \quad 0 \le r \le t,\ 0 \le t \le \tau_1,$$

где $v(t)$, $0 \le t \le \tau_1$, — произвольная суммируемая с квадратом функция, $\|v(\cdot)\| \le \sigma$. Ясно, что существует момент времени $t = t_1 \in [0, \tau_1]$ такой, что $\rho(t_1) = 0$ (9). Действительно, в этом случае

$$0 < \rho(\tau_1) = |\xi[\tau_1, z_0(\cdot)]| - \int\limits_0^{\tau_1} \lambda(t, \tau_1, v(t))\, dt$$
$$\le |\xi[\tau_1, z_0(\cdot)]| - \inf\left\{ \int\limits_0^{\tau_1} \lambda(t, \tau_1, v(t))\, dt : \|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_1]} \le \sigma \right\},$$

что противоречит неравенству (9). Таким образом, пусть $\rho(t_1) = 0$. С учетом этого факта значение $u(t)$ параметра u для каждого t, $0 \le t \le \tau_1$, рекомендуется выбрать как решения уравнений

$$m + \pi K(\tau_1 - t)[Cu - Dv(t)] = w(\tau_1 - t) + \lambda(t, \tau_1, v(t))\eta[t_1, z_0(\cdot)], \tag{10}$$
$$|u| = R(t, v(t), \lambda(t, \tau_1, v(t))), \quad 0 \le t \le t_1,$$

$$\begin{gathered} \pi K(\tau_1 - t)[Cu - Dv(t)] = w(\tau_1 - t), \\ |u| = R(t, v(t), 0), \quad t_1 < t \le \tau_1, \end{gathered} \tag{11}$$

относительно u и $m \in M$. Как обычно, за решение $(u(t), m(t))$ системы (10), (11) принимается наименьшее в лексикографическом смысле среди всех решений системы (10), (11). Ясно, что $u(t)$, $m(t)$, $0 \le t \le \tau_1$, — суммируемые функции [2, 3]. Убедимся, что траектория $z(t)$, $0 \le t \le \tau_1$, уравнения (1) при начальном условии (3) попадает на множество M до момента времени τ_1. Действительно, в силу (10), (11) имеем

$$\xi[t_1, z_0(\cdot)] = H(\tau_1)z_0(\cdot) - \int\limits_0^{\tau_1} \widetilde{w}(\tau_1 - t)\, dt,$$

$$H(\tau_1)z_0(\cdot) = \xi[t_1, z_0(\cdot)] + \int\limits_0^{\tau_1} \widetilde{w}(\tau_1 - t)\, dt$$
$$= \xi[t_1, z_0(\cdot)] + \int\limits_0^{t_1} \{m(t) + \pi K(\tau_1 - t)[Cu(t) - Dv(t)]\, dt - \lambda(t, \tau_1, v(t))\eta[t_1, z_0(\cdot)]\}\, dt$$
$$+ \int\limits_{t_1}^{\tau_1} \{m(t) + \pi K(\tau_1 - t)[Cu(t) - Dv(t)]\}\, dt$$

$$= \xi[t_1, z_0(\cdot)] - \int\limits_0^{t_1} \lambda(t, \tau_1, v(t))\eta[t_1, z_0(\cdot)]\,dt + \int\limits_0^{\tau_1} m(t)\,dt$$

$$+ \int\limits_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t)[Cu(t) - Dv(t)]\,dt, \quad (12)$$

ибо, как установлено выше,

$$\xi[t_1, z_0(\cdot)] - \int\limits_0^{t_1} \lambda(t, \tau_1, v(t))\eta[t_1, z_0(\cdot)]\,dt$$

$$= \left[|\xi[t_1, z_0(\cdot)]| - \int\limits_0^{t_1} \lambda(t, \tau_1, v(t))\,dt\right]\xi[t_1, z_0(\cdot)]|\xi[t_1, z_0(\cdot)]|^{-1} = 0.$$

Следовательно, в силу (12) имеем

$$\pi z(\tau_1) = H(\tau_1)z_0(\cdot) - \int\limits_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t)[Cu(t) - Dv(t)]\,dt = \int\limits_0^{\tau_1} m(t)\,dt,$$

и так как $m(t) \in M(t)$ на отрезке $[0, \tau_1]$, то $\pi z(\tau_1) = \int\limits_0^{\tau_1} m(t)\,dt \in \int\limits_0^{\tau_1} M(t)\,dt \subset M_1$.

Таким образом, получаем включение $\pi z(\tau_1) \in M_1$, что эквивалентно попаданию $z(\tau_1)$ на M: $z(\tau_1) \in M$. Отсюда вытекает справедливость утверждения теоремы. Допустимость управления $u(t)$, $0 \le t \le \tau_1$, можно показать так же, как при доказательстве теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Лемма. *Имеет место включение* $0 \in U(t, v, \lambda)$ *при всех* t, v, λ, $0 \le t \le \tau$, $v \in \mathbb{R}^q$ *и* $\lambda \ge 0$.

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение

$$U(t, v, \lambda) = R(t, v, \lambda)\pi K(\tau - t)CS - \pi K(\tau - t)Dv, \quad (13)$$

где $R(t, v, \lambda) = [|F(\tau - t)v|^2 + \lambda|\xi[\tau, z_0(\cdot)]|^{-1}\gamma]^{1/2}$, $0 \le t \le \tau$, $\gamma = \rho^2 - \chi^2\sigma^2$, $v \in \mathbb{R}^q$, $\lambda \ge 0$, S — замкнутый единичный шар пространства $\mathbb{R}^p$ с центром в начале координат.

При $\lambda = 0$ имеем

$$U(t, v, 0) = R(t, v, 0)\pi K(\tau - t)CS - \pi K(\tau - t)Dv,$$

так как $R(t, v, 0) = |F(\tau - t)v|$. Тогда

$$U(t, v, 0) = |F(\tau - t)v|\pi K(\tau - t)CS - \pi K(\tau - t)Dv.$$

В силу предположения 1 следует $\pi K(\tau - t)CF(\tau - t)v = \pi K(\tau - t)Dv$.

Отсюда находим, что

$$U(t, v, 0) = |F(\tau - t)v|\pi K(\tau - t)CS - \pi K(\tau - t)CF(\tau - t)v$$

$$= \begin{cases} |F(\tau - t)v|\pi K(\tau - t)C(S - \frac{F(\tau - t)v}{|F(\tau - t)v|}), & \text{если } F(\tau - t)v \ne 0, \\ 0, & \text{если } F(\tau - t)v = 0. \end{cases}$$

Из того, что $F(\tau-t)v\in\mathbb{R}^q$ и $\frac{F(\tau-t)v}{|F(\tau-t)v|}\in S$, видно, что $0\in U(t,v,0)$ при всех $0\le t\le\tau$, $v\in\mathbb{R}^q$.

Нетрудно проверить, что при $\gamma>0$ многозначное отображение (13) является монотонно возрастающим по параметру $\lambda\ge 0$, т. е. из $\lambda_1>\lambda_2$ следует включение $U(t,v,\lambda_2)\subset U(t,v,\lambda_1)$

Следовательно, $0\in U(t,v,0)\subset U(t,v,\lambda)$, которые верны для всех $\lambda\ge 0$, $0\le t\le\tau$ и $v\in\mathbb{R}^q$. Лемма доказана.

(B) Пусть $\alpha\in[0,\rho/\sigma)$ — произвольная константа, $\mu(t)$, $0\le t\le\tau$ — суммируемая с квадратом неотрицательная скалярная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\tau \mu^2(t)\,dt\le(\rho-\alpha\sigma)^2. \tag{14}$$

Предположение 5. *Для начального положения $z_0(\cdot)\in X$ существуют число $\tau=\tau_2>0$, матричная функция $F_1(t):L\to L$, $t\in[0,\tau_2]$ полунепрерывно сверху зависящая от t, функция $\mu(t)$, $0\le t\le\tau_2$, выпуклое компактное множество $M_2\subset L$, $M_1\underline{*}M_2\neq\varnothing$, $G(\tau_2)\overset{*}{\subset}M_2$, где множество $G(\tau_2)$ имеет вид*

$$G(\tau_2)=\left\{\int_0^{\tau_2}[E-F_1(\tau_2-t)]\pi K(\tau_2-t)Dv(t)\,dt:\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_2]}\le\sigma\right\},$$

(для $X,Y\subset\mathbb{R}^n$ считается $X\overset{*}{\subset}Y$, если $Y\underline{*}X\neq\varnothing$) и произвольное измеримое замкнутозначное многозначное отображение $M^*(t)\subset L$, $0\le t\le\tau_2$, удовлетворяющее условию $\int_0^{\tau_2}M^*(t)\,dt\subset M_2\underline{*}G(\tau_2)$ такие, что для всех $t\in[0,\tau_2]$ непусто множество

$$\widehat{w}(t)=\bigcap\{[M^*(\tau_2-t)+\pi K(\tau_2-t)CS_{\alpha|v|+\mu(\tau_2-t)}]-F_1(\tau_2-t)\pi K(\tau_2-t)Dv\},$$

где пересечение берется по всем векторам $v\in\mathbb{R}^q$, $S_{\alpha|v|+\mu(\tau_2-t)}$ — p-мерный замкнутый шар радиуса $\alpha|v|+\mu(\tau_2-t)$ с центром в начале координат, $\underline{*}$ — означает геометрическую разность [5].

Введем множество

$$\widehat{W}(t)=\int_0^t\widehat{w}(r)\,dr,\quad 0\le t\le\tau_2.$$

Из предположения 5 следует, что множество $\widehat{w}(t)$ измеримо по Борелю. Значит, существует измеримая по Борелю ветвь $w(t)\in\widehat{w}(t)$, $0\le t\le\tau_2$.

Используя результаты из [2, 4, 6], легко показать, что если $\xi[\tau,z_0(\cdot)]=0$ для некоторого положительного $\tau\le\tau_2$, то разрешима задача преследования к моменту τ. Поэтому в дальнейшем предполагается, что $\xi[\tau,z_0(\cdot)]\neq 0$ для всех $\tau\le\tau_2$.

Пусть $M_3(\subset M_1\underline{*}\,M_2)$ — выпуклое замкнутое множество и $m\in M_3$. Определим числовую функцию $\lambda(z_0(\cdot),\tau_2,t,v)$ следующим образом:

$$\lambda(z_0(\cdot),\tau_2,t,v)=\begin{cases}\sup\{\lambda\ge0:\lambda[\xi[\tau_2,z_0(\cdot)]-m]\in M^*(\tau_2-t)\\ +\pi K(\tau_2-t)CS_{\alpha|v|+\mu(\tau_2-t)}\\ -F_1(\tau_2-t)\pi K(\tau_2-t)Dv+w(\tau_2-t)\} & \text{при } \xi[\tau_2,z_0(\cdot)]\neq m,\\ (\tau_2-t)^{-1} & \text{при } \xi[\tau_2,z_0(\cdot)]=m.\end{cases}$$

Предположение 6. *Для начального положения* $z_0(\cdot) \in X$ *и числа* $\tau_2 > 0$ *выполнено неравенство*

$$1 - \inf_{\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_2]} \le \sigma} \int_0^{\tau_2} \lambda(z_0(\cdot), \tau_2, t, v(t))\, dt < 0. \tag{15}$$

Теорема 3. *Если для начального положения* $z_0(\cdot) \in X$ *выполнены предположения* 5, 6, *то в игре* (1), (2) *из заданного начального положения* $z_0(\cdot) \in X$ *возможно завершение преследования за время* $T(z_0(\cdot)) = \tau_2$.

Доказательство. Для произвольной измеримой функции $v(t)$, $0 \le t < \infty$, рассмотрим функцию $\rho(t; v(r), 0 \le r \le t)$, $0 \le t \le \tau_2$, определенную следующим образом:

$$\rho(t; v(r), 0 \le r \le t) = 1 - \int_0^t \lambda(z_0(\cdot), \tau_2, r, v(r))\, dr.$$

В силу предположения 6 существует момент времени $t = t_2 \in [0, \tau_2]$ такой, что $\rho(t_2; v(t), 0 \le t \le t_2) = 0$. Ясно, что если $\xi[t, z_0(\cdot)] = 0$, то можно считать $t_2 = 0$. Пусть $\xi[t, z_0(\cdot)] \ne 0$ и $\rho(t; v(r), 0 \le r \le t) > 0$ на отрезке $[0, \tau_2]$. Действительно, в этом случае

$$0 < \rho(\tau_2; v(t), 0 \le t \le \tau_2) = 1 - \int_0^{\tau_2} \lambda(z_0(\cdot), \tau_2, t, v(t))\, dt$$
$$\le 1 - \inf_{\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_2]} \le \sigma} \int_0^{\tau_2} \lambda(z_0(\cdot), \tau_2, t, v(t))\, dt,$$

что противоречит неравенству (15). Таким образом, пусть $\rho(t_2; v(t), 0 \le t \le t_2) = 0$. С учетом этого факта выберем функции $u(t) \in S_{\alpha|v(t)|+\mu(\tau_2-t)}$, $m^*(t) \in M^*(t)$, в момент времени $t \in [0, t_2]$ как решения уравнения

$$\begin{aligned} m^*(\tau_2 - t) + \pi K(\tau_2 - t)Cu(t) - F_1(\tau_2 - t)\pi K(\tau_2 - t)Dv(t) \\ = w(\tau_2 - t) + \lambda(z_0(\cdot), \tau_2, t, v(t))(\xi[\tau_2, z_0(\cdot)] - m), \end{aligned} \tag{16}$$

а в момент времени $t \in (t_2, \tau_2]$ как решения уравнения

$$m^*(\tau_2 - t) + \pi K(\tau_2 - t)Cu(t) - F_1(\tau_2 - t)\pi K(\tau_2 - t)Dv(t) = w(\tau_2 - t),\ u(t) = 0,\ t \ge \tau_2. \tag{17}$$

В силу предположения 5 существует одно или много решений уравнений (16), (17). Согласно утверждению п. 2 из [2] функция $\lambda(z_0(\cdot), \tau_2, t, v(t))$ является измеримой функцией по t. Следовательно, в силу теоремы Филиппова (см. п. 7 из [2]) уравнения (16), (17) разрешимы в классе измеримых функций. Покажем, что при таком способе управления параметром u преследователь может гарантировать окончание преследования к моменту τ_2.

Используя формулу Коши (см.(4)) (после его проектирования на L), приходим к следующему соотношению:

$$\pi z(\tau) = \pi K(\tau) z_0(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau - h - t) B z_0(t)\, dt - \int_0^{\tau} \pi K(\tau - t)[Cu(t) - Dv(t)]\, dt. \tag{18}$$

Прибавляя и вычитая величину $\int\limits_0^{\tau_2} w(\tau_2 - t)\,dt$ и учитывая закон выбора управлений (16), (17) из формулы (18) при $\tau = \tau_2$ получаем

$$\pi z(\tau_2) = \pi K(\tau_2)z_0(0) + \int\limits_0^{\tau_2} w(\tau_2 - t)\,dt - \int\limits_0^{\tau_2} w(\tau_2 - t)\,dt + \int\limits_{-h}^{0} \pi K(\tau_2 - h - t)Bz_0(t)\,dt$$

$$- \int\limits_0^{\tau_2} [\pi K(\tau_2 - t)Cu(t) - F_1(\tau_2 - t)\pi K(\tau_2 - t)Dv(t)]\,dt$$

$$+ \int\limits_0^{\tau_2} [E - F_1(\tau_2 - t)]\pi K(\tau_2 - t)Dv(t)\,dt = \xi[\tau_2, z_0(\cdot)] + \int\limits_0^{\tau_2} w(\tau_2 - t)\,dt$$

$$- \int\limits_0^{t_2} [w(\tau_2 - t) - m^*(\tau_2 - t) + \lambda(z_0(\cdot), \tau_2, t, v(t))(\xi[\tau_2, z_0(\cdot)] - m)]\,dt$$

$$- \int\limits_{t_2}^{\tau_2} [w(\tau_2 - t) - m^*(\tau_2 - t)]\,dt + \int\limits_0^{\tau_2} [E - F_1(\tau_2 - t)]\pi K(\tau_2 - t)Dv(t)\,dt$$

$$= \xi[\tau_2, z_0(\cdot)] + \int\limits_0^{\tau_2} w(\tau_2 - t)\,dt - \int\limits_0^{t_2} w(\tau_2 - t)\,dt - \int\limits_0^{t_2} \lambda(z_0(\cdot), \tau_2, t, v(t))\xi[\tau_2, z_0(\cdot)]\,dt$$

$$+ \int\limits_0^{t_2} m^*(\tau_2 - t)\,dt + \int\limits_0^{t_2} \lambda(z_0(\cdot), \tau_2, t, v(t))m\,dt - \int\limits_{t_2}^{\tau_2} w(\tau_2 - t)\,dt + \int\limits_{t_2}^{\tau_2} m^*(\tau_2 - t)\,dt$$

$$+ \int\limits_0^{\tau_2} [E - F_1(\tau_2 - t)]\pi K(\tau_2 - t)Dv(t)\,dt = \int\limits_0^{t_2} \lambda(z_0(\cdot), \tau_2, t, v(t))m\,dt$$

$$+ \int\limits_0^{\tau_2} m^*(\tau_2 - t)\,dt + \int\limits_0^{\tau_2} [E - F_1(\tau_2 - t)]\pi K(\tau_2 - t)Dv(t)\,dt, \qquad (19)$$

ибо, как установлено выше,

$$\xi[\tau_2, z_0(\cdot)] - \int\limits_0^{t_2} \lambda(z_0(\cdot), \tau_2, t, v(t))\xi[\tau_2, z_0(\cdot)]\,dt$$

$$= \left[1 - \int\limits_0^{t_2} \lambda(z_0(\cdot), \tau_2, t, v(t))\,dt\right]\xi[\tau_2, z_0(\cdot)] = 0.$$

Следовательно, из (19) имеем

$$\pi z(\tau_2) = \int\limits_0^{t_2} \lambda(z_0(\cdot), \tau_2, t, v(t))m\,dt + \int\limits_0^{\tau_2} m^*(\tau_2 - t)\,dt$$

$$+ \int\limits_0^{\tau_2} [E - F_1(\tau_2 - t)]\pi K(\tau_2 - t)Dv(t)\,dt \in \int\limits_0^{t_2} \lambda(z_0(\cdot), \tau_2, t, v(t))M_3\,dt + \int\limits_0^{\tau_2} M^*(\tau_2 - t)\,dt$$

$$+ G(\tau_2) \subset M_3 + [M_2 \underline{*} G(\tau_2)] + G(\tau_2) \subset [M_1 \underline{*} M_2] + M_2 \subset M_1.$$

Таким образом, для начального положения $z_0(\cdot) \in X$ имеет место включение $\pi z(\tau_2) \in M_1$, это эквивалентно тому, что $z(\tau_2) \in M$, т. е. преследование заканчивается за время τ_2. Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что управление $u(t)$, $0 \le t \le \tau_2$, является допустимым. Действительно, в силу (14) и неравенства Коши — Буняковского справедлива следующая оценка:

$$\int_0^{\tau_2} |u(t)|^2\,dt \le \alpha^2 \int_0^{\tau_2} |v(t)|^2\,dt + 2\alpha \int_0^{\tau_2} \mu(\tau_2 - t)|v(t)|\,dt$$

$$+ \int_0^{\tau_2} \mu^2(\tau_2 - t)\,dt \le \left(\alpha\sigma + \sqrt{\int_0^{\tau_2} \mu^2(\tau_2 - t)\,dt}\right)^2 \le \rho^2,$$

что и означает допустимость управления $u(t)$, $0 \le t \le \tau_2$. Теорема 3 доказана.

Предположение 7. *Существуют число $\tau_3 > 0$, константа $\delta \in [0, 1)$ и измеримое замкнутозначное многозначное отображение $M(t) \subset L$, $0 \le t \le \tau_3$, удовлетворяющее условию $\int_0^{\tau_3} M(t)\,dt \subset \delta M_1$, такие, что для всех $t \in [0, \tau_3]$ непусто множество*

$$\widehat{w}(t) = \bigcap_{v \in \mathbb{R}^q} \{[M(\tau_3 - t) + \pi K(\tau_3 - t) C S_{\alpha|v| + \mu(\tau_3 - t)}] - F_1(\tau_3 - t)\pi K(\tau_3 - t) D v\},$$

где $S_{\alpha|v|+\mu(\tau_3-t)}$ — p-мерный замкнутый шар радиуса $\alpha|v| + \mu(\tau_3 - t)$ пространства $\mathbb{R}^p$ с центром в начале координат.

Введем множество

$$\widehat{W}(t) = \int_0^t \widehat{w}(r)\,dr, \quad 0 \le t \le \tau_3.$$

Зафиксируем некоторое начальное положение $z_0(\cdot) \in X$. Для произвольных векторов $\eta \in L$, $v \in \mathbb{R}^q$ при $0 \le t \le \tau_3$ положим

$$\zeta[\tau_3, \eta, z_0(\cdot)] = \pi K(\tau_3) z_0(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau_3 - h - t) B z_0(t)\,dt + \eta - f,$$

где $f \in \widehat{W}(t)$, $0 \le t \le \tau_3$. Далее, в соответствии с определением интеграла $\int_0^{\tau_3} \widehat{w}(t)\,dt$ существует измеримый по Борелю суммируемый селектор $w(t) \in \widehat{w}(t)$, $0 \le t \le \tau_3$, такой, что выполнено равенство $f = \int_0^{\tau_3} w(\tau_3 - t)\,dt$, зафиксируем его. Тогда $\zeta[\tau_3, \eta, z_0(\cdot)]$ имеет вид

$$\zeta[\tau_3, \eta, z_0(\cdot)] = \pi K(\tau_3) z_0(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau_3 - h - t) B z_0(t)\,dt + \eta - \int_0^{\tau_3} w(\tau_3 - t)\,dt.$$

Определим числовую функцию $\lambda(z_0(\cdot), \eta, \tau_3, t, v)$ следующим образом:

$$\lambda(z_0(\cdot), \eta, \tau_3, t, v) \\ = \begin{cases} \sup\{\lambda \geq 0 : \lambda\zeta[\tau_3, \eta, z_0(\cdot)] \in [M(\tau_3 - t)\pi K(\tau_3 - t)CS_{\alpha|v|+\mu(\tau_3-t)}] \\ -F_1(\tau_3 - t)\pi K(\tau_3 - t)Dv - w(\tau_3 - t)\} \quad \text{при } \zeta[\tau_3, \eta, z_0(\cdot)] \neq 0, \\ (\tau_3 - t)^{-1} \quad \text{при } \zeta[\tau_3, \eta, z_0(\cdot)] = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Предположение 8. (а) *Для начального положения $z_0(\cdot) \in X$ и числа $\tau_3 > 0$ справедливо неравенство*

$$\inf_{\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_3]} \leq \sigma} \int_0^{\tau_3} \lambda(z_0(\cdot), \tau_3, \eta, t, v(t))\, dt > 1;$$

(б) *для допустимого управления $v = v(t)$, $0 \leq t < \infty$, убегающего игрока существует вектор $\eta \in L$ такой, что выполнено включение*

$$\int_0^{\tau_3} [E - F(\tau_3 - t)]\pi K(\tau_3 - t)Dv(t)\, dt \in \eta + (1 - \delta)M_1.$$

Теорема 4. *Если для начального положения $z_0(\cdot) \in X$ выполнены предположения 7, 8, то в игре (1), (2) возможно завершение преследования из заданного начального положения $z_0(\cdot) \in X$ за время $T(z_0(\cdot)) = \tau_3$.*

Доказательство. Пусть для игры (1) с начальным положением $z_0(\cdot) \in X$ выполнены предположения 7, 8. Можно показать, что функция $\lambda(z_0(\cdot), \eta, \tau_3, t, v)$, определенная соотношением (20), является полунепрерывной сверху по v при фиксированном t и измеримой по Борелю по t при фиксированном v (см. [2]). Теперь для произвольной измеримой функции $v(t)$, $0 \leq t < \infty$, определим функцию $\rho(t; v(r), 0 \leq r \leq t)$, $0 \leq t \leq \tau_3$, следующим образом:

$$\rho(t; v(r), 0 \leq r \leq t) = 1 - \int_0^t \lambda(z_0(\cdot), \tau_3, \eta, r, v(r))\, dr.$$

Пусть $t_3 (\leq \tau_3)$ — первый момент времени, когда выполняется равенство $\rho(t_3; v(r), 0 \leq r \leq t_3) = 0$. (В силу п. (а) предположения 8 такой момент существует для начального положения $z_0(\cdot) \in X$).

Функции $u(t) \in S_{\alpha|v(t)|+\mu(\tau_3-t)}$, $m(t) \in M(t)$ определяются в момент времени $t \in [0, t_3]$ как решения уравнения

$$m(\tau_3 - t) + \pi K(\tau_3 - t)Cu(t) - F_1(\tau_3 - t)\pi K(\tau_3 - t)Dv(t) \\ = w(\tau_3 - t) + \lambda(z_0(\cdot), \tau_3, \eta, t, v(t))\zeta[\tau_3, \eta, z_0(\cdot)], \tag{21}$$

а в момент времени $t \in (t_3, \tau_3]$ функции $u(t) \in S_{\alpha|v(t)|+\mu(\tau_3-t)}$, $m(t) \in M(t)$ определяются как решения уравнения

$$m(\tau_3 - t) + \pi K(\tau_3 - t)Cu(t) - F_1(\tau_3 - t)\pi K(\tau_3 - t)Dv(t) = w(\tau_3 - t). \tag{22}$$

Далее, в силу предположения 7 существует одно или много решений уравнений (21), (22). Через $\Omega_1(t, v)$, $\Omega_2(t, v)$ обозначим множества решений уравнений

(21), (22) соответственно. В силу (20) и из $w(t) \in \widehat{w}(t)$, $0 \le t \le \tau_3$, следует, что множества $\Omega_1(t, v(t))$, $\Omega_2(t, v(t))$ непусты и являются компактами. Через

$$q^1(t, v(t)) = \mathrm{col}[m(t, v(t)), U_1(t, v(t))], q^2(t, v(t)) = \mathrm{col}[m(t, v(t)), U_2(t, v(t))]$$

обозначим решения уравнений (21), (22) с наименьшими в лексикографическом смысле компонентами $U_1(t, v(t)), U_2(t, v(t)), m(t, v(t))$, $t \in [0, \tau_3]$. По свойству числовой функции $\lambda(z_0(\cdot), \eta, \tau_3, t, v(t))$ и C-свойству многозначных отображений [3], можно показать, что функции $q^1(t, v(t)), q^2(t, v(t))$, $t \in [0, \tau_3]$, являются B-измеримыми. Следовательно, для произвольной измеримой функции $v(t)$, $0 \le t < \infty$, $\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \le \sigma$, функции $q^1(t, v), q^2(t, v)$, $m(t, v)$, $t \in [0, \tau_3]$, измеримы [3]. По выбору $q^1(t, v(t)), q^2(t, v(t))$, $t \in [0, \tau_3]$, они единственны.

Таким образом, управление преследователя на отрезке $[0, \tau_3]$ определяется следующим образом. Если $\rho(t; v(r), 0 \le r \le t)$ положительно в момент времени $t \in [0, \tau_3]$, то $u(t) = U_1(t, v(t))$. При $t \in (t_3, \tau_3]$ положим $u(t) = U_2(t, v(t))$. Далее, при $t > \tau_3$ положим $u(t) = 0$. Теперь покажем, что при таком способе управления параметром $u(t)$ преследователь гарантирует завершение преследования за время $T(z_0(\cdot)) = \tau_3$. Тогда для решения $z(t)$, $0 \le t < \infty$, уравнения (1) при начальном условии $z(t) = z_0(t)$, $-h \le t \le 0$, из формулы Коши (после его проектирования на L) получаем (см. (4))

$$\pi z(\tau) = \pi K(\tau) z_0(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau - h - t) B z_0(t)\, dt - \int_{0}^{t} \pi K(\tau - t)[Cu(t) - Dv(t)]\, dt. \tag{23}$$

Учитывая уравнения (21), (22) и считая $\tau = \tau_3$, преобразуем (23) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\pi z(\tau_3) &= \pi K(\tau_3) z_0(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau_3 - h - t) B z_0(t)\, dt + \int_{0}^{\tau_3} w(\tau_3 - t)\, dt \\
&\quad - \int_{0}^{\tau_3} w(\tau_3 - t)\, dt - \int_{0}^{\tau_3} [\pi K(\tau_3 - t) C u(t) - F_1(\tau_3 - t) \pi K(\tau_3 - t) D v(t)]\, dt \\
&\quad + \int_{0}^{\tau_3} [E - F_1(\tau_3 - t)] \pi K(\tau_3 - t) D v(t)\, dt = \pi K(\tau_3) z_0(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau_3 - h - t) B z_0(t)\, dt \\
&\quad - \int_{0}^{t_3} [w(\tau_3 - t) - m(\tau_3 - t) + \lambda(z_0(\cdot), \eta, \tau_3, t, v(t)) \zeta[\tau_3, \eta, z_0(\cdot)]]\, dt \\
&\quad - \int_{t_3}^{\tau_3} [w(\tau_3 - t) - m(\tau_3 - t)]\, dt + \int_{0}^{\tau_3} [E - F_1(\tau_3 - t)] \pi K(\tau_3 - t) D v(t)\, dt \\
&\quad + \int_{0}^{\tau_3} w(\tau_3 - t)\, dt - \int_{0}^{\tau_3} w(\tau_3 - t)\, dt = \Bigg(\pi K(\tau_3) z_0(0) \\
&\quad + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau_3 - h - t) B z_0(t)\, dt - \int_{0}^{\tau_3} w(\tau_3 - t)\, dt \Bigg) \Bigg(1 - \int_{0}^{t_3} \lambda(z_0(\cdot), \eta, \tau_3, t, v(t))\, dt \Bigg)
\end{aligned}$$

$$-\int\limits_0^{t_3}\lambda(z_0(\cdot),\eta,\tau_3,t,v(t))\eta\,dt+\int\limits_0^{\tau_3}m(\tau_3-t)\,dt+\int\limits_0^{\tau_3}[E-F_1(\tau_3-t)]\pi K(\tau_3-t)Dv(t)\,dt$$

$$=-\eta\int\limits_0^{t_3}\lambda(z_0(\cdot),\eta,\tau_3,t,v(t))\,dt+\int\limits_0^{\tau_3}[E-F_1(\tau_3-t)]\pi K(\tau_3-t)Dv(t)\,dt$$

$$+\int\limits_0^{\tau_3}m(\tau_3-t)\,dt=-\eta+\int\limits_0^{\tau_3}[E-F_1(\tau_3-t)]\pi K(\tau_3-t)Dv(t)\,dt+\int\limits_0^{\tau_3}m(\tau_3-t)\,dt.$$

В силу п. (б) предположения 8 выполнено включение

$$-\eta+\int\limits_0^{\tau_3}[E-F_1(\tau_3-t)]\pi K(\tau_3-t)Dv(t)\,dt\in(1-\delta)M_1. \tag{24}$$

Кроме того, имеет место включение

$$\int\limits_0^{\tau_3}m(\tau_3-t)\,dt\in\int\limits_0^{\tau_3}M(\tau_3-t)\,dt\subset\delta M_1. \tag{25}$$

Отсюда и из (24), (25) получаем, что $\pi z(\tau_3)\in M_1$. Последнее включение эквивалентно включению $z(\tau_3)\in M$. Следовательно, преследование заканчивается за время τ_3. Теорема 4 доказана.

Для иллюстрации условия теорем 1–4 рассмотрим примеры простого преследования.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальную игру, описываемую системой уравнений [4]

$$\begin{cases}\dot{z_1}(t)=z_1(t)-u(t),\\ \dot{z_2}(t)=z_2(t-1)+v(t),\end{cases} \tag{26}$$

где $z_1(t),z_2(t)\in\mathbb{R}^n, t\geq 0$, $n\geq 1$, $u(t),v(t)$ — n-мерные измеримые векторные функции, управления преследующего и убегающего игрока, определенные на отрезке $[0,\infty)$ и удовлетворяющие ограничениям

$$\|u(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)}\leq\rho,\quad \|v(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)}\leq\sigma,$$

где $\rho,\sigma>0$ — неотрицательные константы.

В качестве терминального множества M в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ берется линейное подпространство, состоящее из векторов $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^{2n}$, удовлетворяющих условию $z_1=z_2$. Нетрудно видеть, что ортогональное дополнение L к множеству M_0 состоит из векторов $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^{2n}$, удовлетворяющих условию $z_1=-z_2$.

Начальным положением для системы (26) является $g(t)=(g_1(t),g_2(t))$, где $g_1(t)$, $g_2(t)$ — n-мерные абсолютно непрерывные векторные функции, определенные на отрезке $[-1,0]$.

В качестве ортогонального базиса подпространства L выберем такие векторы e_i из $\mathbb{R}^{2n}$, у которых i-й координатой является 1, $n+i$-й координатой является -1, а остальные координаты нули, т. е.

$$e_1=(1,0,\dots,0,-1,0,\dots,0),\quad e_2=(0,1,0,\dots,0,0,-1,\dots,0),$$

$$\ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, -1).$$

Тогда легко видеть, что векторы e_i составляют ортогональный базис подпространства L и что координаты вектора πz в этом базисе составляют n-мерный вектор $\frac{1}{2}(z_1 - z_2)$. Условимся в дальнейшем все векторы πz рассматривать только в этом базисе.

Если заданы допустимые управления $u(t), v(t)$, то решением уравнения (26) при начальном условии $z_1(s) = g_1(s)$, $z_2(s) = g_2(s)$, $-1 \le s \le 0$, являются функции

$$z_1(t) = K_1(t-1)g_1(0) - \int_0^t K_1(t-1-s)u(s)\,ds,$$

$$z_2(t) = K_2(t-1)g_2(0) - \int_{-1}^0 K_2(t-2-s)g_2(s)\,ds - \int_0^t K_2(t-1-s)v(s)\,ds,$$

где $K_1(t) = \varphi(t)E$, $K_2(t) = \psi(t)E$,

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -1, \\ e^{(t+1)} & \text{при } t > -1, \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -1, \\ \sum\limits_{i=0}^{N} \frac{(t+1-i)^i}{i!} & \text{при } N-1 \le t \le N,\ N = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

E — единичная матрица порядка n. В данном примере векторы $\pi K(t-1)Cu$, $\pi K(t-1)Dv$ в базисе e_i запишутся в виде

$$\pi K(t-1)Cu = -\frac{1}{2}\varphi(t-1)u, \quad \pi K(t-1)Dv = \frac{1}{2}\psi(t-1)v. \tag{27}$$

Тогда вектор πz имеет вид

$$\pi z(t) = \frac{1}{2}[\varphi(t-1)g_1(0) - \psi(t-1)g_2(0)]$$
$$- \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \psi(t-2-s)g_2(s)\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t [\varphi(t-1-s)u(s) - \psi(t-1-s)v(s)]\,ds.$$

С учетом (27) матричная функция $F(t)$, $t \ge 0$, имеет вид

$$F(t) = \frac{\psi(t-1)}{\varphi(t-1)}E, t \ge 0.$$

Ясно, что $F(t)$, $0 \le t \le \tau$, — сколь угодно гладкая функция, удовлетворяющая соотношению

$$\pi K(t-1)CF(t) = \pi K(t-1)D$$

при всех $t \ge 0$. Отсюда находим, что

$$\chi^2(\tau) = \sup_{\int_0^\tau |w(t)|^2\,dt \le 1} \int_0^\tau f^2(t)|w(t)|^2\,dt,$$

где $f(t)=\frac{\psi(t-1)}{\varphi(t-1)}$, $0\le t\le\tau$. Теперь вычислим функцию $\chi^2(\tau)$. Имеем

$$\int\limits_0^\tau |F^2(t)w(t)|^2\,dt=\int\limits_0^\tau\left[\frac{\psi(t-1)}{\varphi(t-1)}\right]^2|w(t)|^2\,dt\le\max\left\{1,\frac{\rho^2}{\sigma^2}\right\}.$$

Ясно, что $\chi^2\le\frac{\rho^2}{\sigma^2}$. Поэтому предположение 2 выполнено, если $\rho>\sigma$. Далее, положим $m_1=0$. Кроме того, будем считать

$$\xi[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau]=\frac{1}{2}[\varphi(t-1)g_1(0)-\psi(t-1)g_2(0)]-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^0\psi(t-2-r)g_2(r)\,dr\ne0.$$

Вычислим функцию $\lambda(t,\tau,v)$. Для рассматриваемого примера

$$R(t,v,\lambda)=\left[\frac{\psi(t-1)}{\varphi(t-1)}\right]^2|v|^2+[|\xi[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau]|^{-1}\gamma\lambda]^{\frac12},$$

$$U(t,v,\lambda)=[\psi^2(t-1-r)|v|^2+\varphi^2(t-1-r)|\xi[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau]|^{-1}\gamma\lambda]^{\frac12}S-\psi(t-1-r)v,$$

где $0\le r\le\tau$, $\gamma=\rho^2-\max\{1,\frac{\rho^2}{\sigma^2}\}$, $v\in\mathbb{R}^n$. Функция $R(t,v,\lambda)$ по переменной λ монотонно возрастающая. Из уравнения

$$\lambda^2|\eta[g_1(\cdot),g_2(\cdot),t]|^2+[2\psi(t-1-r)(\eta[g_1(\cdot),g_2(\cdot),t],v)\\ -\varphi^2(t-1-r)|\xi[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau]|^{-1}\gamma]\lambda=0$$

путем несложных вычислений нетрудно показать, что при выполнении неравенств

$$0\le\lambda\le\frac{1}{|\eta[g_1(\cdot),g_2(\cdot),t]|^2}\max\{0,\varphi^2(t-1-r)|\xi[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau]|^{-1}\gamma\\ -2\psi(t-1-r)(\eta[g_1(\cdot),g_2(\cdot),t],v)\}$$

справедливо включение

$$\lambda\eta[g_1(\cdot),g_2(\cdot),t]+\psi(t-1-r)v\in[\psi^2(t-1-r)|v|^2\\ +\varphi^2(t-1-r)|\xi[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau]|^{-1}\gamma\lambda]^{\frac12}S.$$

Следовательно,

$$\lambda(t,\tau,v)=\frac{1}{|\eta[g_1(\cdot),g_2(\cdot),t]|^2}\max\{0,\varphi^2(\tau-1-t)|\xi[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau]|^{-1}\gamma\\ -2\psi(\tau-1-t)(\eta[g_1(\cdot),g_2(\cdot),t],v)\}.$$

Пусть $v=v(t)$ — произвольная суммируемая с квадратом функция, $0\le t\le\tau$, $\|v(\cdot)\|\le\sigma$. В дальнейшем рассматривается уравнение

$$|\xi[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau]|-\inf_{\int\limits_0^\tau|v(t)|^2\,dt\le\sigma^2}\int\limits_0^\tau\lambda(t,\tau,v(t))\,dt=0$$

относительно $\tau\ge0$. Имеем

$$\int\limits_0^\tau\lambda(t,\tau,v(t))\,dt\\ \ge\max\left\{0,\int\limits_0^\tau[\varphi^2(\tau-1-t)|\xi[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau]|^{-1}\gamma-2\psi(\tau-1-t)(\eta[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau],v)]\,dt\right\},$$

ибо, очевидно, для произвольной суммируемой функции $g(t)$, $0 \le t \le \tau$, справедливо неравенство

$$\max\int_0^\tau \{0, g(t)\}\,dt \ge \max\left\{0, \int_0^\tau g(t)\,dt\right\}.$$

Из этого неравенства получаем

$$\max\int_0^\tau \{0, \varphi^2(\tau-1-t)|\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau]|^{-1}\gamma - 2\psi(\tau-1-t)(\eta[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau], v)\}\,dt$$
$$\ge \max\left\{0, \int_0^\tau [\varphi^2(\tau-1-t)|\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau]|^{-1}\gamma - 2\psi(\tau-1-t)(\eta[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau], v)]\,dt\right\},$$

$$\int_0^\tau [\varphi^2(\tau-1-t)|\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau]|^{-1}\gamma - 2\psi(\tau-1-t)(\eta[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau], v)]\,dt$$
$$\ge |\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau]|^{-1}\gamma\int_0^\tau \varphi^2(\tau-1-t)\,dt - 2\int_0^\tau \psi(\tau-1-t)(v(t), \eta[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau])\,dt.$$

В силу неравенства Коши — Буняковского из определения функция $\chi^2(\tau)$ имеем

$$\int_0^\tau \left(\frac{\psi(t-1)}{\varphi(t-1)}v(t), \varphi(t-1)\eta[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau]\right)dt \le \left(\int_0^\tau \left[\frac{\psi(t-1)}{\varphi(t-1)}\right]^2 |v(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left(\int_0^\tau \varphi^2(t-1)\,dt\right)^{\frac{1}{2}} |\eta[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau]| \le \sigma\chi\left(\int_0^\tau \varphi^2(t-1)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно,

$$\int_0^\tau \lambda(t, \tau, v(t))\,dt$$
$$\ge \max\left\{0, |\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau]|^{-1}\gamma\int_0^\tau \varphi^2(\tau-1-t)\,dt - 2\sigma\chi\left(\int_0^\tau \varphi^2(t-1)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Ввиду того, что $\gamma = \rho^2 - \chi^2\sigma^2 > 0$, функция $\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau]$ ограничена на $0 \le t \le \tau$ и $\int_0^\tau \varphi^2(t-1)\,dt$ монотонно возрастает по t при $t \ge 0$, получим существование такого момента $\tau = \tau^*$, для которого выполнено равенство

$$\gamma\int_0^{\tau^*} \varphi^2(\tau^*-1-t)\,dt - 2\sigma\chi\left(\int_0^{\tau^*} \varphi^2(t-1)\,dt\right)^{\frac{1}{2}} |\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau^*]| = |\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau^*]|^2.$$

Отсюда вытекает равенство

$$|\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau^*]| = (\rho - \chi\sigma)\left(\int\limits_0^{\tau^*} \varphi^2(t-1)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{\tau^*} \lambda(t, \tau, v(t))\,dt \geq |\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau^*]|.$$

Так как функция $v = v(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, $\|v(\cdot)\| \leq \sigma$, произвольна, выполнено и предположение 3 теоремы 1.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальную игру [5]

$$\dot{z}(t) = z(t-h) - u(t) + v(t), \tag{28}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, $n \geq 1$, $h = \mathrm{const} \geq 0$ — величина запаздывания, $u(t), v(t)$ — управления преследующего и убегающего игроков соответственно, $\|u(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \leq \rho$, $\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \leq \sigma$. Множеством начальных положений для системы (28) является $X = \{z_0(t) : z(t) = z_0(t),\ t \in [-h, 0]\}$. Для игры (28) $A = \tilde{0}, B = C = D = E$, терминальное множество M имеет вид $M = M_0 + M_1$, где $M_0 = \{z : z = 0\}$, $M_1 = \{z : \|z\| \leq l\}$, $\tilde{0}$, E — нулевая и единичная матрицы порядка n соответственно. Преследование считается завершенным, если $\|z\| \leq l$ в некоторый конечный момент времени t, где ρ, σ, l — положительные константы, $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Пусть T — произвольное положительное число, $\alpha \in [0, \rho \setminus \sigma)$ — некоторая константа. Далее, решением уравнения (28) при начальном условии $z_0(\cdot) \in X$ и данном управлении $u(t), v(t)$, $0 \leq t \leq T$, является функция

$$z(T) = K(T-h)z_0(0) + \int\limits_{-h}^{0} K(T-2h-t)z_0(t)\,dt - \int\limits_0^T K(T-h-t)(u(t)-v(t))\,dt.$$

Матричная функция $K(T)$ имеет вид $K(T) = \eta(T)E$, где

$$\eta(T) = \begin{cases} 0 & \text{при } T < -h, \\ \sum\limits_{j=0}^{\nu} \frac{(T+h-j)^j}{j!} & \text{при } \nu - h \leq T \leq \nu,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Матрицу $F_1(t)$ и множества M_2, M_3, $M^*(t)$, $t \in [0, T]$, $G(T)$ определим следующим образом: $F_1(t) = \alpha^2 E$, $M_2 = l_1 S$, $M_3 = \{0\}$, $M^*(t) = a(t)M_2$, $t \in [0, T]$, где $a(t)$ — суммируемая на $[0, T]$ неотрицательная скалярная функция, удовлетворяющая условию $\int\limits_0^T a(t)\,dt = 1$ (например, $a(t) = \frac{1}{T}$), $G(T) = (1 - \alpha^2)\sqrt{\int\limits_0^T K^2(T-t)\,dt}\sigma S$, где E — единичная матрица порядка n, S — n-мерный замкнутый единичный шар пространства $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат. Будем предполагать, что выполнены неравенства

$$l_1 < l, \quad (1-\alpha^2)\sqrt{\int\limits_0^T \eta^2(T-t)\,dt\sigma} < l_1. \tag{29}$$

Положим

$$\mu(t) = (\rho - \alpha\sigma)\eta(t)\left(\sqrt{\int\limits_0^T \eta^2(T-t)\,dt}\right)^{-1}.$$

Далее, положим $m = 0$, $w(t) = 0$, $t \in [0, T]$. Тогда справедливо равенство

$$\xi[T, z_0(\cdot)] = \pi K(T-h)z_0(0) + \int\limits_{-h}^{0} \pi K(T-2h-t)z_0(t)\,dt.$$

Несложные вычисления показывают, что

$$\lambda(z_0(\cdot), T, t, v)\xi[T, z_0(\cdot)] \in a(T-t)l_1 S + \eta(T-t)(\alpha|v| + \mu(T-t))S - \eta(T-t)v,$$

или

$$\lambda(z_0(\cdot), T, t, v)\xi[T, z_0(\cdot)] + \eta(T-t)v \in a(T-t)l_1 S + \eta(T-t)(\alpha|v| + \mu(T-t))S.$$

После элементарных вычислений приходим к следующему уравнению относительно $\lambda(z_0(\cdot), T, t, v)$:

$$\lambda^2(z_0(\cdot), T, t, v)|\xi[T, z_0(\cdot)]|^2 + 2\lambda(z_0(\cdot), T, t, v)\eta(T-t)(\xi[T, z_0(\cdot)], v) + \eta^2(T-t)|v|^2 = [a(T-t)l_1 + \eta(T-t)(\alpha|v| + \mu(T-t))]^2.$$

Следовательно, если $\xi[T, z_0(\cdot)] \neq 0$, то для произвольного вектора $v \in \mathbb{R}^n$ функция $\lambda(z_0(\cdot), T, t, v)$ имеет следующий вид:

$$\lambda(z_0(\cdot), T, t, v) = \frac{1}{|\xi[T, z_0(\cdot)]|}\left[-\eta(T-t)\left(\frac{\xi[T, z_0(\cdot)]}{|\xi[T, z_0(\cdot)]|}, v\right) + \sqrt{A^2 + B^2|\xi[T, z_0(\cdot)]|^2}\right],$$

где

$$A^2 = \eta^2(T-t)\left(\frac{\xi[T, z_0(\cdot)]}{|\xi[T, z_0(\cdot)]|}, v\right)^2,$$

$$B^2 = [a(T-t)l_1 + \eta(T-t)(\alpha|v| + \mu(T-t))]^2 - \eta^2(T-t)|v|^2.$$

Стало быть, для любых $v \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\lambda(z_0(\cdot), T, t, v) \geq \frac{\eta(T-t)\mu(T-t)}{|\xi[T, z_0(\cdot)]|}.$$

Следовательно, если $\rho > \alpha\sigma$, то предположение 5 выполнено. Если для начального положения $z_0(\cdot) \in X$ существует число $T > 0$, для которого выполняется равенство

$$\left|\pi K(T-h)z_0(0) + \int\limits_{-h}^{0} \pi K(T-2h-t)z_0(t)\,dt\right| = (\rho - \alpha\sigma)\sqrt{\int\limits_0^T K^2(T-t)\,dt},$$

то предположение 6 выполнено. Таким образом, если выполнены неравенства $\rho > \alpha\sigma$ и (29), то выполнены условия теорем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Наука, 1967.
2. *Григоренко Н. Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
3. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
4. *Сатимов Н. Ю.* О задаче преследования в квазилинейных дифференциальных играх многих лиц // Неклассические задачи математической физики. Ташкент: ФАН, 1985. С. 154–174.
5. *Никольский М. С.* Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 2. С. 260–267.
6. *Чикрий А. А., Чикрий Г. Ц.* Групповое преследование в дифференциально-разностных играх // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 5. С. 802–810.

Статья поступила 18 ноября 2010 г., окончательный вариант — 15 марта 2014 г.

Мамадалиев Нуманжон
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
механико-математический факультет,
Вузгородок, ул. Университетская, 1, Ташкент 100174, Узбекистан
M_numana59@mail.ru