Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2015. Том 56, № 1

УДК 512.542

ГРУППЫ, КРИТИЧЕСКИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СПЕКТРОВ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ И СПОРАДИЧЕСКИХ ГРУПП

Ю. В. Лыткин

Аннотация. *Спектром конечной группы* называется множество порядков ее элементов. Конечная группа G называется *критической* относительно подмножества ω натуральных чисел, если ω совпадает со спектром G и не совпадает со спектром любой собственной секции G. Дается полное описание конечных групп, критических относительно спектра знакопеременной группы степени 10 и второй группы Янко.

Ключевые слова: конечная группа, спектр, критическая группа, неабелева простая группа.

1. Введение

Пусть G — конечная группа. Множество порядков всех элементов группы G называется *спектром* и обозначается через $\omega(G)$. Множество $\omega(G)$ замкнуто относительно делимости и однозначно определяется своим подмножеством $\mu(G)$, которое состоит из максимальных по делимости элементов $\omega(G)$. Назовем группы G и H *изоспектральными*, если $\omega(G) = \omega(H)$. Под *секцией* группы G будем понимать фактор-группу H/N, где N, H — произвольные подгруппы группы G и $N \trianglelefteq H$.

Пусть ω — подмножество множества натуральных чисел. Следуя [1], назовем группу G *критической относительно* ω (или ω*-критической*), если $\omega(G) = \omega$ и $\omega(H/N) \neq \omega$ для любой собственной секции H/N группы G.

В [2] доказано, что для любого натурального числа n существует n попарно не изоморфных конечных групп, критических относительно некоторого набора натуральных чисел. Таким образом, не существует общей константы, ограничивающей количество групп, критических относительно произвольного набора натуральных чисел. Гипотеза состоит в том, что если рассматривать только те наборы натуральных чисел, каждый из которых совпадает со спектром некоторой конечной неабелевой простой группы, то такую константу можно найти.

Известно, что если L — конечная неабелева простая группа, а G — конечная группа, изоспектральная L, то, как правило, $L \leq G \leq \operatorname{Aut} L$. Поэтому для групп L, обладающих таким свойством, единственная группа, критическая относительно $\omega(L)$, — это сама L. Особый интерес представляют конечные простые группы, для которых данное свойство не выполняется. Среди простых знакопеременных и спорадических групп существует только три таких группы:

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 13–01–00505 и 14–01–90013).

знакопеременные группы A_6 и A_{10} и вторая группа Янко J_2 (см. [3, 4]). Все критические группы со спектром, как у A_6, описаны в [2].

В этой работе дается полное описание конечных групп, критических относительно $\omega(A_{10})$ и $\omega(J_2)$. А именно, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, критическая относительно $\omega(A_{10})$. Тогда либо $G \simeq A_{10}$, либо G является полупрямым произведением группы $A \times B$ на группу H, где A — элементарная абелева группа порядка 7^8, B — элементарная абелева группа порядка 3^{12}, а H — расширение единственной подгруппы порядка 2 группы H с помощью S_5.*

Более того, $H \simeq \langle c, d \mid c^4 = d^4c^{-2} = (cd)^5 = [c, d]^3 = 1\rangle$, и если рассмотреть A как векторное пространство над полем $\mathbb{F}_7$, а B — как векторное пространство над полем $\mathbb{F}_3$, то можно выбрать базисы A и B так, чтобы действие H на A в выбранном базисе определялось матрицами

$$c \sim \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad d \sim \begin{pmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -2 & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & -1 & 1 & 1 & \cdot \\ -2 & 1 & \cdot & \cdot & -2 & -1 & \cdot & 1 \end{pmatrix},$$

а действие H на B в выбранном базисе определялось матрицами

$$c \sim \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 1 & 2 & \cdot \end{pmatrix},$$

$$d \sim \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа, критическая относительно $\omega(J_2)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$G \simeq J_2$;*

(2) *$G \simeq S_8$;*

(3) *G является полупрямым произведением элементарной абелевой группы V порядка 2^6 на A_8.*

Более того, если рассмотреть V как векторное пространство над полем $\mathbb{F}_2$ и положить $\sigma_1 = (123)$ и $\sigma_2 = (2345678)$, то $A_8 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ и можно выбрать базис V так, чтобы действие A_8 на V в этом базисе определялось следующими матрицами:

$$\sigma_1 \sim \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Из уже известных результатов (см. [2–4]) и теорем 1 и 2 вытекает

Следствие. *Для каждой конечной неабелевой простой знакопеременной или спорадической группы все критические группы с тем же спектром известны; в частности, количество таких попарно не изоморфных групп не превосходит трех.*

Далее под группой всегда подразумевается конечная группа. Через $\mathbb{F}_q$ обозначается поле порядка q. Симметрическая (соответственно знакопеременная) группа подстановок степени n обозначается через S_n (соответственно через A_n), а через $SL_n(q)$ обозначается специальная линейная группа размерности n над полем порядка q. Если H действует автоморфизмами на G, то соответствующее полупрямое произведение групп G и H обозначается через $G \rtimes H$.

2. Доказательство теоремы 1

В этом разделе дается полное описание групп, критических относительно спектра A_{10}. Отметим, что $\mu(A_{10}) = \{8, 9, 10, 12, 15, 21\}$.

Лемма 1 [5]. *Пусть G — группа, изоспектральная A_{10}, но не изоморфная A_{10}. Тогда G является полупрямым произведением абелевой $\{3,7\}$-группы N, содержащей элемент порядка 21, на централизатор H в G некоторой инволюции $z \in G$, которая инвертирует N. Более того, H является расширением $\langle z \rangle$ с помощью S_5, и силовские 2-подгруппы группы H являются обобщенными группами кватернионов порядка 16.*

Пример такой группы G приведен в [6]. Наша цель — доказать, что эта группа является критической и, кроме того, единственной помимо A_{10} группой, критической относительно $\omega(A_{10})$.

Из леммы 1 следует, что если G — критическая группа, изоспектральная A_{10}, то G — это либо A_{10}, либо группа из леммы 1. Поскольку $21 \in \mu(G)$ и $21 \in \omega(N)$, группа N является прямым произведением элементарной абелевой 7-группы A и нетривиальной элементарной абелевой 3-группы B. До конца этого раздела зафиксируем A, B и H.

Лемма 2. *Группа H определена однозначно с точностью до изоморфизма. Более того, $H \simeq H_1 = \langle c, d \mid c^4 = (cd)^5 = [c,d]^3 = 1,\ d^4 = c^2 \rangle$.*

Доказательство. Группа S_5 имеет представление $\langle \bar{c}, \bar{d} \mid \bar{c}^2 = \bar{d}^4 = (\bar{c}\bar{d})^5 = [\bar{c}, \bar{d}]^3 = 1 \rangle$ (см. [7]). Поскольку $S_5 \simeq H/\langle z \rangle$, где z — единственная инволюция в H, можно посчитать отношения между порождающими элементами группы H. Пусть c и d — прообразы $\bar{c}$ и $\bar{d}$. Очевидно, что $H = \langle c, d \rangle$ и $c^4 = 1$, $d^4 = c^2$. Для оставшихся элементов существуют такие возможности:

(1) $(cd)^5 = [c,d]^3 = 1$;

(2) $(cd)^5 = c^2$, $[c,d]^3 = 1$;
(3) $(cd)^5 = 1$, $[c,d]^3 = c^2$;
(4) $(cd)^5 = [c,d]^3 = c^2$.

Вычисления с использованием [8] показывают, что в случаях (3) и (4) порядок группы H равен 120, что невозможно. Также вычисления показывают, что случаи (1) и (2) дают изоморфные группы. Таким образом, отношения между порождающими группы H_1 выполняются для порождающих группы H. Так как порядок H_1 равен 240, то $H \simeq H_1$, т. е. группа H определена единственным образом с точностью до изоморфизма. □

Обозначим через c и d порождающие элементы группы H, для которых выполняются соотношения из леммы 2, и зафиксируем их до конца раздела.

Так как $N = A \times B$, действие группы H на группах A и B определяет действие H на N.

Лемма 3. (1) *Существует единственный с точностью до подобия неприводимый H-модуль V над полем $\mathbb{F}_7$, на котором элемент порядка 3 из H действует без неподвижных точек. Базис V может быть выбран так, чтобы действие H на V определялось следующими матрицами:*

$$c \sim \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad d \sim \begin{pmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -2 & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & -1 & 1 & 1 & \cdot \\ -2 & 1 & \cdot & \cdot & -2 & -1 & \cdot & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $\mu(V \leftthreetimes H) = \{7, 8, 10, 12\}$.

(2) *Существует единственный с точностью до подобия неприводимый H-модуль W над полем $\mathbb{F}_3$ такой, что элемент порядка 5 из H имеет в W неподвижную точку. Базис W может быть выбран так, чтобы действие H на W определялось следующими матрицами:*

$$c \sim \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 1 & 2 & \cdot \end{pmatrix},$$

$$d \sim \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $\mu(W \rtimes H) = \{8, 9, 10, 12, 15\}$.

(3) *Группа* $(V \times W) \rtimes H$ *является критической относительно* $\omega(A_{10})$.

Доказательство. Отметим, что $\mu(H) = \{8, 10, 12\}$.

(1) Поскольку 7 не делит порядок H, любое представление над полем характеристики 7 поднимается до комплексного представления. Согласно таблице характеров группы H (см. [8]) существует лишь одно неприводимое комплексное представление такое, что элементы порядка 3 из H действуют на соответствующем модуле без неподвижных точек. Этот характер представлен в следующей таблице:

g^G	1A	5A	4A	8A	8B	12A	12B	10A	2A	4B	3A	6A
$\chi(g)$	4	-1	0	0	0	0	0	1	-4	0	-2	2

Рассмотрим комплексное представление с данным характером. В этом случае действие группы H может быть определено матрицами

$$c \sim \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot - 1 & \cdot & \end{pmatrix}, \quad d \sim \begin{pmatrix} -1 & \cdot & -i\sqrt{2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ -1 & 1 & \cdot & i\sqrt{2} \\ 1+i\sqrt{2} & \cdot & -1+i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Из этого представления можно получить целочисленное представление, заменив все действительные числа в этих матрицах скалярными матрицами размера 2×2, а число $i\sqrt{2}$ — матрицей $\begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ -2 & \cdot \end{pmatrix}$. В результате получим представление размерности 8. Эти матрицы по модулю 7 дают искомое представление.

$$c \sim \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad d \sim \begin{pmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -2 & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & -1 & 1 & 1 & \cdot \\ -2 & 1 & \cdot & \cdot & -2 & -1 & \cdot & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, вычисления (см. [8]) показывают, что ни один нетривиальный элемент из H не имеет в V неподвижных точек. Таким образом, $\mu(V \rtimes H) = \mu(H) \cup \{7\}$.

(2) С помощью [7, 8] проверяется, что в любом неприводимом H-модуле над полем $\mathbb{F}_3$, не эквивалентном W, элемент порядка 5 из H не имеет неподвижных точек. Если f — линейное преобразование W, соответствующее элементу $[c, d] \in H$, то f подобно жордановой матрице с жордановой клеткой размера 3. Таким образом, $\mu(W \rtimes H) = \mu(H) \cup \{9, 15\}$.

(3) Имеем $\omega((V \times W) \rtimes H) = \omega(V \rtimes H) \cup \omega(W \rtimes H) \cup \{21\} = \omega(A_{10})$. Кроме того, модули V и W неприводимые, поэтому данная группа критическая. $\square$

Лемма 4. *Порядок группы* A *равен* 7^8, *и как* H*-модуль* A *эквивалентна модулю* V *из леммы* 3.

Доказательство. Докажем, что в полупрямом произведении $A \rtimes H$ нет элементов порядка 21. Предположим противное и обозначим через ah этот элемент порядка 21. Далее, существует элемент bh порядка 9 в полупрямом произведении $B \rtimes H$. Элементы ah и bh можно рассматривать как элементы группы G. Так как $a(bh) = b(ah) = (bh)a$, порядок элемента abh равен 63; противоречие.

Таким образом, элементы порядка 3 из H действуют на A без неподвижных точек. Рассмотрим неприводимый H-подмодуль N модуля A. Ясно, что он эквивалентен модулю V из леммы 3. Тогда $\omega(N \leftthreetimes H) = \omega(A \leftthreetimes H)$. Поскольку группа G критическая относительно $\omega(G)$, группа $A \leftthreetimes H$ должна быть также критична относительно своего спектра, откуда имеем $N = A$. $\square$

Лемма 5. *Порядок группы B равен 3^{12}, и как H-модуль B эквивалентна модулю W из леммы 3.*

Доказательство. Рассмотрим B как H-модуль. Так как $15 \in \omega(G)$, один из неприводимых факторов модуля B должен быть изоморфен модулю W. Пусть $L/K \simeq W$, где $L, K \trianglelefteq B \leftthreetimes H$. Тогда по лемме 3 фактор-группа $(L \leftthreetimes H)/K$ имеет тот же спектр, что и $B \leftthreetimes H$. Поскольку группа G критическая относительно $\omega(G)$, группа $B \leftthreetimes H$ критическая относительно $\omega(B \leftthreetimes H)$. Следовательно, $L = B$, $K = 1$ и $B \simeq W$. $\square$

Теперь теорема 1 следует из лемм 2–5.

3. Доказательство теоремы 2

В этом разделе дается полное описание групп, критических относительно спектра J_2. Отметим, что $\mu(J_2) = \{7, 8, 10, 12, 15\}$.

Лемма 6. *Пусть $H = A_8$. Тогда*

(1) *$H = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$, где $\sigma_1 = (123)$, $\sigma_2 = (2345678)$.*

(2) *С точностью до подобия существует единственный неприводимый H-модуль V над полем порядка 2 такой, что σ_2 действует на V без неподвижных точек. Его размерность равна 6, и действие H на V при подходящем выборе базиса определяется следующими матрицами:*

$$\sigma_1 \sim \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}.$$

(3) *Любое расширение V посредством H расщепляется, т. е. является естественным полупрямым произведением $V \leftthreetimes H$;*

(4) *$\omega(V \leftthreetimes H) = \omega(J_2)$;*

(5) *$V \leftthreetimes H$ — критическая группа относительно $\omega = \omega(J_2)$.*

Доказательство. Утверждения (1)–(3) проверяются с помощью [7, 8]. Утверждение (4) доказано в [9].

(5) Пусть K — подгруппа группы $V \leftthreetimes H$ и $\omega(K) = \omega(V \leftthreetimes H)$. Тогда K содержит элементы порядков 5 и 7, и поскольку A_8 порождается любой парой таких элементов (см. [10]), то $KV = VH$. Теперь если $K \cap V = 1$, то $K = H$, что невозможно, так как $\omega(H) \neq \omega(V \leftthreetimes H)$. Поэтому $K \cap V > 1$, и поскольку V — минимальная нормальная подгруппа в $V \leftthreetimes H$, имеем $V \leq K$, откуда $K = KV = VH$. Так как V — минимальная нормальная, любая нормальная подгруппа N группы $V \leftthreetimes H$ содержит V. Фактор-группа N/V изоморфна некоторой нормальной подгруппе группы H, поэтому N/V либо тривиальна и тогда $N = V$, либо совпадает с H и тогда $N = VH$. $\square$

В [4] доказано, что любая группа, изоспектральная J_2, изоморфна либо J_2, либо S_8, либо расширению группы порядка 2^{6t}, где t — некоторое натуральное число, с помощью A_8. Ясно, что группы J_2 и S_8 критические. Таким образом, остается рассмотреть только случай (3).

Пусть G — расширение группы V порядка 2^{6t} с помощью $H \simeq A_8$, где t — натуральное число, т. е. $G/V \simeq H$. Кроме того, пусть группа G критическая относительно $\omega(J_2)$. Пусть M — максимальная G-инвариантная подгруппа группы V. Тогда V/M — неприводимый H-модуль, на котором элементы порядка 7 из H действуют без неподвижных точек. По лемме 6 фактор-группа G/M изоспектральна J_2, поэтому из критичности G следует, что $M = 1$. Таким образом, G — полупрямое произведение из леммы 6, и теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазуров В. Д., Ши В. Дж.* Признак нераспознаваемости конечной группы по спектру // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 2. С. 239–243.

2. *Lytkin Y. V.* On groups critical with respect to a set of natural numbers // Sib. Electron. Math. Rep. 2013. V. 10. P. 666–675.

3. *Горшков И. Б.* Распознаваемость знакопеременных групп по спектру // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, № 1. С. 57–63.

4. *Mazurov V. D., Shi W. J.* A note to the characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloq. 1998. V. 5, N 3. P. 285–288.

5. *Старолетов А. М.* Группы, изоспектральные знакопеременной группе степени 10 // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 638–648.

6. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 651–666.

7. ATLAS of finite group representations (http:/jourbrauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/).

8. GAP: Groups, algorithms, and programming (http:/jourwww/gap-system.org).

9. *Praeger C. E., Shi W. J.* A characterization of some alternating and symmetric groups // Commun. Algebra. 1994. V. 22, N 5. P. 1507–1530.

10. *Conway J. H., et al.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.

Статья поступила 29 сентября 2014 г.

Лыткин Юрий Всеволодович
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090;
Сибирский гос. университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102
jurasicus@gmail.com