Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2015. Том 56, № 1

УДК 517.55+519.111.1

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА И МОНОМИАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ ФАКТОРОВ В КОЛЬЦЕ ПОЛИНОМОВ

Е. К. Лейнартас, М. С. Рогозина

Аннотация. Найдены условия разрешимости задачи Коши для полиномиального разностного оператора, в частности, приведено легко проверяемое достаточное условие через коэффициенты главного символа разностного оператора. Показано, что разрешимость задачи Коши эквивалентна существованию мономиального базиса в фактор-кольце кольца полиномов по идеалу, порожденному характеристическим многочленом.

Ключевые слова: полиномиальный разностный оператор, задача Коши, мономиальный базис фактор-кольца.

§ 1. Введение

Для комплекснозначных функций $f(x)$ целочисленных переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ определим операторы δ_j сдвига по переменным x_j: $\delta_j f(x) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, \dots, x_n)$, и рассмотрим полиномиальный разностный оператор порядка m

$$P(\delta) = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \delta^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\delta^\alpha = \delta_1^{\alpha_1} \dots \delta_n^{\alpha_n}$, c_α — коэффициенты разностного оператора.

Будем рассматривать разностные уравнения вида

$$P(\delta) f(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{1}$$

где $f(x)$ — неизвестная, а $g(x)$ — заданная на $\mathbb{Z}_+^n = \mathbb{Z}_+ \times \dots \times \mathbb{Z}_+$ функции и $\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел.

Разностные уравнения возникают в различных областях математики. В комбинаторном анализе они в сочетании с методом производящих функций дают мощный аппарат исследования перечислительных задач. Другой источник появления разностных уравнений — дискретизация дифференциальных. Так, дискретизация уравнения Коши — Римана привела к созданию теории

Работа выполнена в Сибирском федеральном университете при поддержке гранта Правительства РФ (договор № 14.У26.31.0006) для научных исследований под руководством ведущих ученых. Кроме того, работа первого автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 14–01–00–544).

дискретных аналитических функций, которая нашла применение в теории римановых поверхностей и комбинаторном анализе (см., например, [1, 2]). Методы дискретизации дифференциальной задачи являются важной составной частью теории разностных схем и также приводят к разностным уравнениям (см., например, [3]).

Для $n > 1$ пространство решений уравнения (1) бесконечномерно, для выделения из него единственного решения требуются дополнительные условия. Эти условия можно сформулировать различными способами (см., например, [4, 5]). В данной работе определим их следующим образом.

Для двух точек x, y целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$ неравенство $x \geqslant y$ означает, что $x_i \geqslant y_i$ для $i = 1, \ldots, n$, а запись $x \not\geqslant y$ — что найдется $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что $x_{i_0} < y_{i_0}$.

Фиксируем мультииндекс β такой, что

$$|\beta| = m, \quad c_\beta \neq 0. \tag{$*$}$$

Обозначим $X_{0,\beta} = \big\{x \in \mathbb{Z}^n_+ : x \not\geqslant \beta\big\}$ и сформулируем задачу: *найти решение $f(x)$ уравнения* (1), *которое для $x \in X_{0,\beta}$ совпадает с заданной функцией $\varphi(x)$, т. е. удовлетворяет условию*

$$f(x) = \varphi(x), \quad x \in X_{0,\beta}. \tag{2}$$

Задачу (1), (2) будем называть *задачей Коши для полиномиального разностного оператора* $P(\delta)$, а функцию $\varphi(x)$ — *начальными данными* этой задачи.

Нас интересуют условия на разностный оператор $P(\delta)$, обеспечивающие разрешимость задачи (1), (2), т. е. существование и единственность решения для любых начальных данных $\varphi(x)$ и правых частей $g(x)$. Эти условия очевидны для $n = 1$, а также при $n > 1$ и $\beta = (m, 0, \ldots, 0)$ или $\beta = (0, 0, \ldots, m)$. Значительное место в работе [4], посвященной многомерным рекуррентным уравнениям с постоянными коэффициентами и их применению в комбинаторном анализе, уделено проблеме разрешимости задачи (1), (2). Если воспользоваться понятием многогранника Ньютона N_P характеристического многочлена $P(z) = \sum\limits_{\|\alpha\| \leqslant m} c_\alpha z^\alpha$, то одно из полученных в этой работе эквивалентных условий разрешимости означает (см. [5]), что β — вершина многогранника Ньютона такая, что $N_P \cap \big\{\beta + \mathbb{R}^n_+\big\} = \big\{\beta\big\}$. Следующая теорема существенно ослабляет это условие.

Теорема 1. *Если для коэффициентов полиномиального разностного оператора $P(\delta)$ выполнено условие*

$$|c_\beta| > \sum_{|\alpha| = m,\, \alpha \neq \beta} |c_\alpha|, \tag{3}$$

то задача (1), (2) *имеет единственное решение.*

Отметим, что условие, аналогичное условию (3), использовалось в [6] для доказательства разрешимости в классе аналитических функций варианта обобщенной задачи Коши для полиномиального дифференциального оператора $P(D)$ с начально-краевыми условиями типа Рикье. Коэффициенты разложения в степенной ряд аналитических решений этой задачи удовлетворяют соотношениям вида (1), (2). Отметим также работы [7, 8], в которых отыскание аналитических решений дифференциальных уравнений приводит к соотношениям вида (1), (2) для коэффициентов разложения в ряд этих решений.

Условие (3) теоремы 1 является легко проверяемым достаточным условием разрешимости задачи (1), (2). Необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (1), (2) (теорема 2) даны в § 2 и там же показано, что разрешимость определяется только коэффициентами однородной составляющей старшей степени разностного оператора $P(\delta)$ (теорема 4).

В § 3 доказано, что условия теоремы 2, обеспечивающие разрешимость задачи (1), (2), также являются необходимыми и достаточными для существования мономиального базиса в фактор-кольце $\mathbb{C}[z]/\langle P(z)\rangle$, где $\langle P(z)\rangle$ — идеал, порожденный характеристическим многочленом $P(z)$ в кольце многочленов $\mathbb{C}[z]$ (теорема 5).

§ 2. Разрешимость задачи Коши

В данном параграфе работы для фиксированного мультииндекса β, удовлетворяющего условию $(*)$, и произвольных $p \in \mathbb{Z}_+$ строится набор $\Delta_{\beta,p}$ определителей, зависящих от коэффициентов разностного оператора $P(\delta)$, и утверждается (теорема 2), что их невырожденность для всех $p = 0, 1, 2, \ldots$ равносильна разрешимости задачи (1), (2). В случае разрешимости важную роль играет понятие фундаментального решения, поскольку через него можно выразить любое решение задачи. Соответствующие формулы приведены в теореме 3. Кроме того, показано, что на разрешимость задачи (1), (2) на самом деле влияют только коэффициенты однородной составляющей старшей степени главного символа разностного оператора $P(\delta)$ (теорема 4).

Система уравнений (1), (2) представляет собой бесконечную систему уравнений относительно бесконечного числа переменных $f(x)$, $x \in \mathbb{Z}^n_+$. Важной особенностью этой системы является то, что каждое уравнение в ней зависит от конечного числа неизвестных. Известно (см. [9, лемма 6.3.7]), что такая система совместна тогда и только тогда, когда любая система из конечного числа этих уравнений совместна. Для исследования вопроса об условиях на оператор $P(\delta)$, при выполнении которых задача (1), (2) разрешима, прежде всего упорядочим уравнения этой системы так, чтобы число неизвестных в каждом следующем уравнении было больше или равно числу неизвестных в предыдущем.

Возьмем произвольное $p \in \mathbb{Z}_+$. Неизвестные будем «нумеровать» элементами множества $J_p = \{y \in \mathbb{Z}^n_+ : |y| \leqslant p\}$ и упорядочим это множество однородно-лексикографическим способом. Уравнения «занумеруем» элементами двух множеств $I_p = \{x \in \mathbb{Z}^n_+ : |x| \leqslant p - m\}$ и $I_{\beta,p} = \{\mu \in X_{0,\beta} : |\mu| \leqslant p\}$. Если обозначить через $\#M$ число элементов конечного множества M, то нетрудно видеть, что $\#I_p + \#I_{\beta,p} = \#J_p$. Так как $I_{\beta,p} + \{\beta + I_p\} = J_p$, элементам множества $I_{\beta,p}$ присвоим те же «номера», с которыми они входят в множество J_p, а элементам x множества I_p — те «номера», с которыми $\beta + x$ входят в J_p.

Обозначим через L_p систему уравнений относительно конечного числа неизвестных $f(y)$, $y \in J_p$, вида

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha f(x + \alpha) = g(x), \quad x \in I_p, \tag{4}$$

$$f(\mu) = \varphi(\mu), \quad \mu \in I_{\beta,p}. \tag{5}$$

Число уравнений $\#(I_p \sqcup I_{\beta,p})$ этой системы равно числу неизвестных $\#J_p$ (и равно числу N_p целых неотрицательных решений y неравенства $|y| \leqslant p$). Отметим, что все уравнения из системы L_p входят в систему уравнений L_{p+1}.

Обозначим через $\Delta_{\beta,p}$ определитель системы уравнений (4), (5). Его порядок равен N_p, и по построению в строках, соответствующих уравнениям (5), все элементы, кроме стоящей на главной диагонали единицы, равны нулю. В строках, соответствующих уравнениям (4), на главной диагонали стоит коэффициент c_β.

Пример 1. Рассмотрим для $n = 2$ разностный оператор $P(\delta_1, \delta_2) = c_{2,0}\delta_1^2 + c_{1,1}\delta_1\delta_2 + c_{0,2}\delta_2^2 + c_{1,0}\delta_1 + c_{0,1}\delta_2 + c_{0,0}$, где $m = 2$, $\beta = (1, 1)$. Для $p = 3$ система уравнений (4), (5) примет вид

$$\begin{gathered} c_{2,0}f(x+2,y) + c_{1,1}f(x+1,y+1) + c_{0,2}f(x,y+2) \\ + c_{1,0}f(x+1,y) + c_{0,1}f(x,y+1) + c_{0,0}f(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in I_3, \end{gathered} \tag{4'}$$

$$f(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in I_{(1,1),3}. \tag{5'}$$

В ней десять неизвестных $f(y_1, y_2)$, $(y_1, y_2) \in J_p = \{(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2), (3,0), (2,1)(1,2), (3,0)\}$. Уравнения (4′) нумеруются элементами множества $I_3 = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{1},\bar{0})(\bar{0},\bar{1})\}$, а уравнения (5′) — элементами множества $I_{(1,1),3} = \{(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (0,2), (3,0), (0,3)\}$. Так как объединение $I_3 \sqcup I_{(1,1),3}$ дизъюнктное, точки с координатами (x,y) и $(\bar{x},\bar{y})$ считаются различными.

Определитель $\Delta_{(1,1),3}$ этой системы равен

$$\Delta_{(1,1),3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{0,0} & c_{1,0} & c_{0,1} & c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{0,0} & 0 & c_{1,0} & c_{0,1} & 0 & c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{0,0} & 0 & c_{1,0} & c_{0,1} & 0 & c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теорема 2. *Задача* (1), (2) *для всех* $\varphi(x)$ *и* $g(x)$ *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда* $\Delta_{\beta,p} \neq 0$ *для всех* $p = 0, 1, 2, \dots$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\Delta_{\beta,p_0} = 0$ для некоторого $p_0 \in \mathbb{Z}_+$. Это означает, что найдется нетривиальная линейная комбинация левых частей уравнений системы L_{p_0}, равная нулю, т. е.

$$\sum_{x \in I_{p_0}} A_x \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha f(x+\alpha) + \sum_{\mu \in I_{\beta,p_0}} B_\mu f(\mu) = 0.$$

Но тогда для любых правых частей $g(x)$ и $\varphi(\mu)$ этой системы получим

$$\sum_{x \in I_{p_0}} A_x g(x) + \sum_{\mu \in I_{\beta,p_0}} B_\mu \varphi(\mu) = 0,$$

а в силу произвольности выбора $g(x)$ и $\varphi(\mu)$ все коэффициенты A_x и B_μ равны нулю.

Достаточность. Так как $\Delta_{\beta,p} \neq 0$ для любого $p \in \mathbb{Z}_+$, любая подсистема системы уравнений (1), (2) из конечного числа уравнений совместна. Используя упомянутую выше лемму 6.3.7 из [9], получим, что решение задачи (1), (2) существует. Если предположить, что оно не единственное, то для некоторого p окажется, что система уравнений L_p с правой частью, равной нулю, имеет нетривиальное решение, т. е. $\Delta_{\beta,p} = 0$; противоречие. $\square$

В случае разрешимости задачи (1), (2) важную роль играет фундаментальное решение, так как через него можно выразить любое решение (см., например, [5, 10, 11]).

Определение 1. *Фундаментальным решением* задачи (1), (2) называется решение $\mathscr{P}_\beta(x)$ уравнения $P(\delta)\mathscr{P}_\beta(x) = \delta_0(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $\mathscr{P}_\beta(x) = 0$ для $x \in X_{0,\beta}$, где $\delta_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

Теорема 3. *Если задача* (1), (2) *для любых* $g(x)$ *и* $\varphi(x)$ *имеет единственное решение* $f(x)$, *то для любого* $x \in \mathbb{Z}_+^n$ *его можно записать в виде*

$$f(x) = \sum_{y \geqslant 0,\, y \ngeqslant \beta} \varphi(y) \sum_{\nu \nleqslant y} c_\nu \mathscr{P}_\beta(x+\nu-y) + \sum_{y \geqslant 0} g(y)\mathscr{P}_\beta(x-y), \tag{6}$$

где $\mathscr{P}_\beta$ — *фундаментальное решение задачи* (1), (2). *При этом для любого фиксированного* $x \in \mathbb{Z}_+^n$ *число слагаемых в суммах правой части формулы* (6) *конечно.*

Доказательство. Обозначим

$$f_0(x) = \sum_{y \geqslant 0,\, y \ngeqslant \beta} \varphi(y) \sum_{\nu \nleqslant y} c_\nu \mathscr{P}_\beta(x+\nu-y), \quad f^*(x) = \sum_{y \geqslant 0} g(y)\mathscr{P}_\beta(x-y).$$

Покажем, что в формуле для $f_0(x)$ сумма конечна. По определению фундаментального решения $\mathscr{P}_\beta(x) = 0$ для $x \ngeqslant \beta$, поэтому в выражении для $f_0(x)$ суммируем по y, ν таким, что $x+\nu-y \geqslant \beta$, т. е. $y \leqslant x+\nu-\beta$. При фиксированных x, β система неравенств $y \geqslant 0$, $y \leqslant x+\nu-\beta$, $0 \leqslant \|\nu\| \leqslant m$ определяет ограниченное множество в $\mathbb{R}_y^n \times \mathbb{R}_\nu^n$. Что касается конечности числа слагаемых в выражении для $f^*(x)$, то это также следует из того, что $\mathscr{P}_\beta(\nu) = 0$ для $\nu \ngeqslant \beta$. Действительно, тогда $\mathscr{P}_\beta(x-y) \neq 0$ для $0 \leqslant y \leqslant x-\beta$, а таких y конечное число.

Проверим, что функция $f(x)$, определенная формулой (6), удовлетворяет разностному уравнению (1). Действительно, для $x \geqslant 0$ имеем

$$P(\delta)f(x) = \sum_{y \geqslant 0,\, y \ngeqslant \beta} \varphi(y) \sum_{\nu \nleqslant y} c_\nu \delta_0(x+\nu-y) + \sum_{y \geqslant 0} g(y)\delta_0(x-y).$$

Так как $\nu \nleqslant y$, найдется j такое, что $\nu_j - y_j > 0$, поэтому $x_j + \nu_j - y_j > 0$ и тогда $\delta_0(x+\nu-y) = 0$. Таким образом,

$$P(\delta)f(x) = \sum_{y \geqslant 0} g(y)\delta_0(x-y) = g(x).$$

Осталось убедиться, что функция $f(x)$, определенная равенством (6), удовлетворяет начальным данным (2).

Возьмем $x \geqslant 0$ и $x \ngeqslant \beta$, тогда $x - \beta \ngeqslant 0$, поэтому $\mathscr{P}_\beta(x-y) = 0$, т. е. $f^*(x) = 0$.

Для $\nu \leqslant y$ имеем $x+\nu-y \leqslant x$, а так как $x \ngeqslant \beta$, то $\mathscr{P}_\beta(x+\nu-y)=0$, тогда $f(x)$ можно записать в виде

$$f(x)=\sum_{y\geqslant 0,\, y\ngeqslant\beta}\varphi(y)\sum_{0\leqslant\|\nu\|\leqslant m}c_\nu\mathscr{P}_\beta(x+\nu-y)=\sum_{y\geqslant 0,\, y\ngeqslant\beta}\varphi(y)\delta_0(x-y)=\varphi(x). \quad \square$$

В определителях $\Delta_{\beta,p}$, $p=0,1,2,\ldots$, отвечающих за разрешимость задачи Коши, присутствуют все коэффициенты c_α характеристического многочлена $P(z)$. Покажем, что разрешимость задачи (4), (5) зависит в действительности только от коэффициентов однородной составляющей старшей степени этого многочлена, т. е. определяется главным символом разностного оператора.

Обозначим $I'_q=\{x\in\mathbb{Z}^n_+ : |x|=q-m\}$, $I'_{\beta,q}=\{\mu\in X_{0,\beta} : |\mu|=q\}$ и $J'_q=\{y\in\mathbb{Z}^n_+ : |y|=q\}$. Нетрудно видеть, что $\#I'_q+\#I'_{\beta,q}=\#J'_q=N'_q$, где N'_q — число целых неотрицательных решений уравнения $y_1+\cdots+y_n=q$. Заметим, что $N'_0+N'_1+\cdots+N'_p$ равно N_p — числу целых неотрицательных решений неравенства $y_1+\cdots+y_n\leqslant p$.

Для $q=0,1,\ldots,p$ обозначим через $D_{\beta,q}$ миноры определителя $\Delta_{\beta,p}$, составленные из его строк, соответствующих уравнениям

$$P(\delta)f(x)=g(x), \quad x\in I'_q, \tag{7}$$

$$f(\mu)=\varphi(\mu), \quad \mu\in I'_{\beta,q}, \tag{8}$$

и столбцов, соответствующих неизвестным $f(y)$, где $y\in J'_q$.

Отметим, что в определителях $D_{\beta,q}$ присутствуют только коэффициенты однородной составляющей старшей степени многочлена $P(z)$.

Пример 2. Для разностного оператора $P(\delta_1,\delta_2)$, рассмотренного в примере 1, для $q=0,1,2,3$ имеем

$$D_{(1,1),0}=1, \quad D_{(1,1),1}=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}, \quad D_{(1,1),2}=\begin{vmatrix}1&0&0\\c_{2,0}&c_{1,1}&c_{0,2}\\0&0&1\end{vmatrix},$$

$$D_{(1,1),3}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\c_{2,0}&c_{1,1}&c_{0,2}&0\\0&c_{2,0}&c_{1,1}&c_{0,2}\\0&0&0&1\end{vmatrix}.$$

Замечание. Если в определителе $D_{\beta,q}$ вычеркнуть строки и столбцы, соответствующие уравнениям (5), то получим определитель ленточной матрицы (см, например, [12]), которая использовалась в [10] для доказательства разрешимости задачи (1), (2) в случае $n=2$.

Связь между определителями $\Delta_{\beta,p}$ и $D_{\beta,q}$ дается следующей леммой.

Лемма 1. *Для всякого $p\in\mathbb{Z}_+$ справедливо равенство $\Delta_{\beta,p}=D_{\beta,0}\cdot D_{\beta,1}\cdot\ldots\cdot D_{\beta,p}$.*

Доказательство. Будем последовательно преобразовывать определитель $\Delta_{\beta,p}$, пользуясь теоремой Лапласа (см., например, [13]).

На первом шаге ($q=0$) разложим определитель $\Delta_{\beta,p}$ по строкам с номерами $x\in I'_0$, $\mu\in I'_{\beta,0}$. Единственный отличный от нуля минор порядка $N'_0=1$ обозначим через $D_{\beta,0}$, очевидно, что $D_{\beta,0}=1$.

Определитель, полученный из $\Delta_{\beta,p}$ вычеркиванием этой строки и столбца, соответствующего неизвестной $f(0)$, обозначим через $\Delta^1_{\beta,p}$. Очевидно, что $\Delta_{\beta,p} = D_{\beta,0} \cdot \Delta^1_{\beta,p}$.

На втором шаге $q = 1$ разложим определитель $\Delta^1_{\beta,p}$ по строкам с номерами из множеств I'_1 и $I'_{\beta,1}$. Среди миноров порядка N'_1 не содержит нулевых строк только определитель, составленный из столбцов с номерами $y \in J'_1$. Обозначим этот минор через $D_{\beta,1}$, тогда

$$\Delta^1_{\beta,p} = D_{\beta,1} \cdot \Delta^2_{\beta,p},$$

где определитель $\Delta^2_{\beta,p}$ получен из определителя $\Delta^1_{\beta,p}$ вычеркиванием строк с номерами $x \in I'_1$ и $\mu \in I'_{\beta,1}$ и столбцов с номерами $y \in J'_1$.

Продолжая процедуру, на $(q+1)$-м шаге среди миноров порядка N'_q определителя $\Delta^q_{\beta,p}$, соответствующих строкам с номерами из множеств I'_q и $I'_{\beta,q}$, не содержит нулевой строки только определитель, составленный из столбцов с номерами $y \in J'_q$, т. е. $D_{\beta,q}$. Таким образом, $\Delta^q_{\beta,p} = D_{\beta,q} \cdot \Delta^{(q+1)}_{\beta,p}$.

Так как на последнем p-м шаге $\Delta^p_{\beta,p} = D_{\beta,p}$, то

$$\Delta_{\beta,p} = D_{\beta,0} \cdot D_{\beta,1} \cdot \ldots \cdot D_{\beta,p}. \quad \square$$

Пример 3. Для оператора $P(\delta_1, \delta_2)$ из примеров 1, 2 в соответствии с леммой 1 имеем

$$D_{(1,1),0} = 1, \quad \Delta^1_{(1,1),3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{1,0} & c_{0,1} & c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{0,0} & 0 & c_{1,0} & c_{0,1} & 0 & c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} & 0 \\ 0 & c_{0,0} & 0 & c_{1,0} & c_{0,1} & 0 & c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$D_{(1,1),1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta^2_{(1,1),3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{1,0} & c_{0,1} & 0 & c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} & 0 \\ 0 & c_{1,0} & c_{0,1} & 0 & c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$D_{(1,1),2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta^3_{(1,1),3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} & 0 \\ 0 & c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = D_{(1,1),3}.$$

Таким образом, $\Delta_{(1,1),3} = D_{(1,1),0} D_{(1,1),1} D_{(1,1),2} D_{(1,1),3}$.

Из теоремы 2 и леммы 1 сразу следует

Теорема 4. *Задача* (4), (5) *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда* $D_{\beta,k} \neq 0$ *для всех* $k = 0, 1, 2, \dots$.

Доказательство теоремы 1. У определителя $\Delta_{\beta,p}$ на главной диагонали стоят единицы и выделенный коэффициент c_β. Согласно лемме 1 имеем $\Delta_{\beta,p} = D_{\beta,0} \cdot D_{\beta,1} \cdot \ldots \cdot D_{\beta,p}$, где $D_{\beta,q}$ — главные миноры определителя $\Delta_{\beta,p}$ порядка N'_q. Определители $D_{\beta,q}$ зависят только от коэффициентов c_α однородной составляющей старшей степени. Если выполнено условие (3), то $D_{\beta,q}$ являются определителями матриц с диагональным преобладанием (говорят, что квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|$ *обладает свойством диагонального преобладания*, если $|a_{ii}| \geqslant \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|$, $i = 1, 2, \dots$, причем хотя бы одно неравенство строгое), поэтому $D_{\beta,q} \neq 0$ (см. например, [14]). По теореме 4 задача (4), (5) имеет единственное решение. $\square$

§ 3. Мономиальный базис фактор-кольца $\mathbb{C}[z]/\langle P(z)\rangle$ и разрешимость задачи Коши

В этом параграфе покажем, что разрешимость задачи (1), (2) тесно связана с наличием подходящего мономиального базиса фактор-кольца $\mathbb{C}[z]/\langle P(z)\rangle$, где $\langle P(z)\rangle$ — главный идеал в кольце многочленов $\mathbb{C}[z]$. Точнее, докажем, что условие $\Delta_{\beta,p} \neq 0$, $p = 0, 1, 2, \dots$, на построенные в § 2 определители необходимо и достаточно для существования такого базиса (теорема 5). Таким образом, разрешимость задачи Коши (1), (2) эквивалентна существованию мономиального базиса в факторе $\mathbb{C}[z]/\langle P(z)\rangle$.

Прежде всего приведем простое утверждение, показывающее связь между разрешимостью задачи Коши (1), (2) для полиномиального разностного оператора $P(\delta)$ и существованием мономиального базиса фактор-кольца $\mathbb{C}[z]/\langle P(z)\rangle$. Отметим, что для систем разностных уравнений $P_j(\delta)f(x) = 0$, $i = 1, \dots, n$, аналогичное утверждение доказано в [15].

Существование мономиального базиса в фактор-кольце можно рассматривать как некоторое правило «деления с остатком» на многочлен $P(z)$. При изучении уравнений в частных производных преобразование Фурье — Лапласа сводит вопрос о существовании и единственности решения к наличию такого рода правила (см., например, [16, гл. 2, § 4]) и связанного с ним «фундаментального принципа» Эренпрайса — Паламодова. Отметим работу [17], в которой для доказательства «фундаментального принципа» вместо преобразования Фурье — Лапласа использовались методы теории z-преобразований (производящих функций).

Предложение 1. *Если выполнено условие* $(*)$ *и набор мономов* $\{z^\mu\}_{\mu \in X_{0,\beta}}$ *образует базис фактор-кольца* $\mathbb{C}[z]/\langle P(z)\rangle$, *то всякое решение* $f(x)$ *уравнения* (1) *однозначно определяется своими значениями на множестве* $X_{0,\beta}$.

Доказательство. Возьмем $y \in \mathbb{Z}^n_+ \setminus X_{0,\beta}$, тогда по условию предложения найдутся константы $a_\mu(y)$, зависящие от y, и многочлен $A(z, y)$ с зависящими от y коэффициентами такие, что

$$z^y = \sum_{\mu \in X_{0,\beta}} a_\mu(y) z^\mu + A(z; y) P(z). \tag{9}$$

Обозначим через $F(z) = \sum\limits_{x \geqslant 0} \frac{f(x)}{z^x}$ производящую функцию (производящий ряд) решения $f(x)$. Умножив тождество (9) на ряд $F(z) = \sum\limits_{x\geqslant 0} \frac{f(x)}{z^x}$, получим

$$z^y F(z) = \sum_{\mu\in X_{0,\beta}} a_\mu(\mu) z^\mu F(z) + A(z,y)P(z)F(z). \tag{10}$$

С другой стороны, умножение ряда $F(z)$ на мономы z^y и z^μ дает соответственно

$$z^y F(z) = \sum_x \frac{f(x+y)}{z^x}, \quad z^\mu F(z) = \sum_x \frac{f(x+\mu)}{z^x}.$$

Произведение $P(z)F(z)$ в правой части тождества (10) можно записать следующим образом:

$$P(z)F(z) = \Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m} c_\alpha z^\alpha\Big)\Big(\sum_{x\geqslant 0}\frac{f(x)}{z^x}\Big) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} c_\alpha z^\alpha \Big(\sum_{x\geqslant\alpha}\frac{f(x)}{z^x} + \sum_{x\ngeqslant\alpha}\frac{f(x)}{z^x}\Big)$$

$$= \sum_{x\geqslant 0}\frac{P(\delta)f(x)}{z^x} + \sum_{|\alpha|\leqslant m} c_\alpha z^\alpha \sum_{x\ngeqslant\alpha}\frac{f(x)}{z^x} = \sum_{x\geqslant 0}\frac{g(x)}{z^x} + \sum_{|\alpha|\leqslant m} c_\alpha z^\alpha \sum_{x\ngeqslant\alpha}\frac{f(x)}{z^x}.$$

Таким образом, тождество (10) можно записать в виде

$$\sum_{x\geqslant 0}\frac{f(x+y)}{z^x} = \sum_{\mu\in X_{0,\beta}} a_\mu(y) \sum_{x\geqslant 0}\frac{f(x+\mu)}{z^x} + A(z,y)\Big(\sum_{x\geqslant 0}\frac{g(x)}{z^x} + \sum_{|\alpha|\leqslant m} c_\alpha z^\alpha \sum_{x\ngeqslant\alpha}\frac{f(x)}{z^x}\Big). \tag{11}$$

В сумме $\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} c_\alpha z^\alpha \sum\limits_{x\ngeqslant\alpha}\frac{f(x)}{z^x}$ любой моном имеет положительную степень хотя бы по одной переменной, поэтому, приравнивая в (11) коэффициенты при z^0, получим

$$f(y) = \sum_{\mu\in X_{0,\beta}} a_\mu(y) f(\mu) + A(\delta;y)g(0).$$

Здесь воспользовались тем, что коэффициент при z^0 произведения многочлена $A(z,y) = \sum\limits_s d_s(y) z^s$ на ряд $\sum\limits_{x\geqslant 0}\frac{g(x)}{z^x}$ равен $\sum\limits_s d_s(y)g(y) = A(\delta,y)g(0)$. Это и означает, что для всех $y\in\mathbb{Z}^n_+\setminus X_{0,\beta}$ значения решения $f(y)$ уравнения (1) в любой точке $y\in\mathbb{Z}^n_+\setminus X_{0,\beta}$ выражаются через его значения в точках $\mu\in X_{0,\beta}$. $\square$

Приведем способ построения определителей $\Delta_{\beta,p}$, аналогичный в некотором смысле конструкции результанта двух многочленов.

Множества I_p, $I_{\beta,p}$, J_p те же, что в § 2, и упорядочены они тем же способом.

Рассмотрим два тождества относительно $z = (z_1,\ldots,z_n)$:

$$\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha = P(z) \ \text{ и } \ 1 = 1.$$

Умножив эти тождества на z^x, $x\in I_p$, и на z^μ, $\mu\in I_{\beta,p}$, соответственно, получим набор тождеств вида

$$\sum_\alpha c_\alpha z^{\alpha+x} = z^x P(z), \quad x\in I_p, \tag{12}$$

$$z^\mu = z^\mu, \quad \mu\in I_{\beta,p}. \tag{13}$$

Если рассматривать (12), (13) как систему уравнений относительно «неизвестных» z^y, $y\in J_p$, то у этой системы будет тот же определитель, что и у системы (4), (5), т. е. $\Delta_{\beta,p}$.

Следующая теорема, показывает, что наличие мономиального базиса фактор-кольца $\mathbb{C}[z]/\langle P(z)\rangle$ эквивалентно разрешимости задачи (1), (2).

Теорема 5. *Набор мономов* $\{z^\mu\}_{\mu\in X_{0,\beta}}$ *образует базис фактор-кольца* $\mathbb{C}[z]/\langle P(z)\rangle$ *тогда и только тогда, когда* $\Delta_{\beta,p}\neq 0$ *для всех* $p=0,1,2,\ldots$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\Delta_{\beta,p_0}=0$ для некоторого p_0. Это означает, что существует нетривиальная линейная комбинация левых частей соотношений (12) и (13), тождественно равная нулю:

$$\sum_{x\in I_{p_0}} A_x\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m} c_\alpha z^{\alpha+x}\Big)+\sum_{\mu\in I_{\beta,p_0}} B_\mu z^\mu\equiv 0.$$

Но тогда и для правых частей уравнений системы (12), (13) получим

$$\Big(\sum_{x\in I_{p_0}} A_x z^x\Big)P(z)+\sum_{\mu\in I_{\beta,p_0}} B_\mu z^\mu\equiv 0.$$

Если в последнем тождестве найдется μ такое, что $B_\mu\neq 0$, то это противоречит независимости элементов базиса. Если же все коэффициенты B_μ равны 0, то найдется $x\in I_{p_0}$ такое, что $A_x\neq 0$, но это означает, что $P(z)\equiv 0$; противоречие.

Достаточность. Нужно доказать, что для любого $y\in\mathbb{Z}^n_+\setminus X_{0,\beta}$ моном z^y выражается через мономы набора $\{z^\mu\}_{\mu\in X_{0,\beta}}$ и что эти мономы независимы.

Пусть $y\in\mathbb{Z}^n_+\setminus X_{0,\beta}$, обозначим $p=|y|$ и рассмотрим соответствующую систему уравнений (12), (13). Обозначим через $\Delta_{\beta,p}[y]$ определитель, полученный из определителя $\Delta_{\beta,p}$ заменой столбца, соответствующего неизвестной z^y, столбцом правых частей уравнений (12), (13). Поскольку $\Delta_{\beta,p}\neq 0$, то $z^y=\frac{\Delta_{\beta,p}[y]}{\Delta_{\beta,p}}$ и, разлагая $\Delta_{\beta,p}[y]$ по столбцу, составленному из правых частей системы (12), (13), получим, что z^y выражается через элементы базиса.

Независимость элементов мономиального базиса $\{z^\mu\}_{\mu\in X_{0,\beta}}$ докажем от противного. Предположим, что найдутся конечное множество $M\subset X_{0,\beta}$ и многочлен $B(z)=\sum\limits_s b_s z^s$ такие, что

$$\sum_{\mu\in M} a_\mu z^\mu+\Big(\sum_s b_s z^s\Big)P(z)\equiv 0.$$

Но это означает, что соответствующая комбинация левых частей системы уравнений (12), (13) тождественно равна нулю и, следовательно, для подходящего p получим $\Delta_{\beta,p}=0$; противоречие. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Duffin R. J.* Basic properties of discrete analytic functions // Duke Math. J. 1956. V. 23. P. 335–363.
2. *Данилов О. А., Медных А. Д.* Дискретные аналитические функции многих переменных и формула Тейлора // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, № 2. С. 38–46.
3. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
4. *Bousquet-Melou M., Petkovšek M.* Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case // Discrete Math. 2000. V. 225, N 2. P. 51–75.
5. *Лейнартас Е. К.* Кратные ряды Лорана и фундаментальные решения линейных разностных уравнений // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 335–341.
6. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.
7. *Гюнтер Н. М.* О распространении теоремы Коши на любую систему уравнений в частных производных // Мат. сб. 1925. Т. 32, № 2. С. 367–447.
8. *Казаков А. Л.* Обобщенная задача Коши с данными на двух поверхностях для квазилинейной аналитической системы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1041–1055.

9. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
10. *Рогозина М. С.* О разрешимости задачи Коши для полиномиального разностного оператора // Вестн. НГУ. Математика, механика, информатика. 2014. Т. 14, № 3. С. 83–94.
11. *Рогозина М. С.* Устойчивость многослойных разностных схем и амебы алгебраических гиперповерхностей // Журн. СФУ. Математика и физика. 2012. Т. 5, № 2. С. 256–263.
12. *Ильин В. П., Лиснянский И. М.* О решении алгебраических уравнений с ленточными теплицевыми матрицами // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 1. С. 44–48.
13. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2005.
14. *Шарый С. П.* Курс вычислительных методов. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2012.
15. *Лейнартас Е. К., Пассаре М., Цих А. К.* Многомерные версии теоремы Пуанкаре для разностных уравнений // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 10. С. 87–104.
16. *Паламодов В. П.* Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967.
17. *Zeilberger D.* A new proof to Ehrenpreis's semilocal quotient structure theorem // Amer. J. Math. 1978. V. 100, N 6. P. 1317–1332.

Статья поступила 3 июня 2014 г.

Лейнартас Евгений Константинович, Рогозина Марина Степановна
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
`lein@mail.ru`, `rogozina.marina@mail.ru`