Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2015. Том 56, № 1

УДК 517.98

СТРУКТУРНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ УЛЬТРАРАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПОЛУГРУПП

М. Костич, С. Пилипович, Д. Велинов

Аннотация. Рассмотрены экспоненциальные ультрараспределения полугрупп с неплотно определенными генераторами. Приведены структурные теоремы для ультрараспределений полугрупп, а также структурные теоремы для экспоненциальных ультрараспределений полугрупп.

Ключевые слова: ультрараспределение полугрупп, структурные теоремы.

1. Введение и предварительные результаты

В [1] первые два автора провели анализ ультрараспределений полугрупп на основе существования G — фундаментального решения-ультрараспределения $P = \delta' \otimes I - I \otimes A$, $P * G = \delta \otimes I_E$ и $G * P = \delta \otimes I_{D(A)}$, где A — соответствующий оператор с областью $D(A) \subset E$, определенный в силу субэкспоненциальной оценки резольвенты $\|R(\lambda, A)\| \leq Ce^{M(k|\lambda|)}$ в подходящей области определенный соответствующей функцией M. В теоремах 8 и 9 из [1] даны примеры, основанные на этих характеристиках. В данной статье приведем структурную характеристику ультрараспределений полугрупп с целью их полной характеризации и связи с соответствующими задачами Коши.

Работ, посвященных ультрараспределениям полугрупп, довольно много. Они основаны на обобщениях C_0-полугрупп, особенно в различных классах интегрированных полугрупп Арендта [2] и их расширениях [3] (см. также [4–8]). Особо отметим монографию [9] и ссылки в ней. Ультрараспределения полугрупп с плотно определенными генераторами изучались в [10] (см. также работы [6, 11, 12] и ссылки в них), тогда как Комацу в [13] рассмотрел ультрараспределения полугрупп с неплотно определенными генераторами наряду с полугруппами гиперфункций Лапласа. По вопросам относительно теории ω-ультрараспределений полугрупп с плотно определенными генераторами отсылаем читателя к работам [11, 14], а по ультрараспределениям полугрупп с неплотно определенными генераторами и приложениям к абстрактной задаче Коши — к [3, 15–17]. В [1] анализ ультрараспределений полугрупп проведен согласно подходам Кунстмана [18] и Ванга [19] с рассмотрением распределений полугрупп. Последние результаты теории ультрараспределений полугрупп дана в [20].

В разд. 2 напомним некоторые определения и результаты из [1], связанные с ультрараспределениями полугрупп. Ультрадифференцируемые операторы использованы для того, чтобы прояснить связь между экспоненциально ограниченными и умеренными ультрараспределениями полугрупп и сверточных полугрупп.

The research is supported by Ministry of Education, Science and Technological Development of Serbia, Project 174024.

В разд. 3 дадим структурные характеристики для ультрараспределений полугрупп. Основные результаты собраны в теореме 2.7. Приведем пять условий на ультрараспределения полугрупп и соответствующие пять условий для экспоненциальных ультрараспределений полугрупп и покажем, как они связаны между собой.

1.1. Обозначения из теории ультрараспределений. Здесь мы используем обозначения из [1] и следуем подходу Комацу [21] в определении пространств ультрараспределений. Если (M_p) удовлетворяет условиям (M.1)–(M.3), то пространствами Берлинга и Румье ультрадифференцируемых функций являются $\mathscr{D}^{(M_p)}(\mathbb{R})$ и $\mathscr{D}^{\{M_p\}}(\mathbb{R})$ соответственно. Обозначая через $*$ оба вида скобок, определим $\mathscr{D}'^{*}(\mathbb{R}, E) := L(\mathscr{D}^{*}(\mathbb{R}), E)$ как пространство непрерывных линейных функций из $\mathscr{D}^{*}(\mathbb{R})$ в E, при этом $\mathscr{D}^{*}_{0}(\mathbb{R})$ — пространство элементов из $\mathscr{D}^{*}(\mathbb{R})$ с носителем в $[0, \infty)$, тогда как $\mathscr{E}'^{*}_{0}$ — пространство ультрараспределений, носители которых являются компактными подмножествами в $[0, \infty)$. Также используем традиционное обозначение $\mathscr{D}'^{*}_{+}(\mathbb{R}, E)$ для пространства векторнозначных ультрараспределений с носителями в $[0, \infty)$. Основные сведения о пространствах векторнозначных ультрараспределений см. в [22].

Пространства умеренных ультрараспределений типа Берлинга и Румье введены в [23] (см. также [24]) как сопряженные к пространствам пробных функций $\mathscr{S}^{(M_p)}(\mathbb{R})$ и $\mathscr{S}^{\{M_p\}}(\mathbb{R})$ соответственно.

Напомним [21], что целая функция вида $P(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} a_p \lambda^p$, $\lambda \in \mathbb{C}$, принадлежит классу (M_p) или $\{M_p\}$ (т. е. ультраполиномиальная в соответствующем классе), если существуют $k > 0$ и $C > 0$, соответственно для любого $k > 0$ существует постоянная $C > 0$, для которой $|a_p| \le C k^p / M_p$, $p \in \mathbb{N}$. Отвечающий ей ультрадифференциальный оператор $P(d/dt) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} a_p d^p/dt^p$ принадлежит классу (M_p) или $\{M_p\}$. Композиция и сумма ультрадифференциальных операторов класса Берлинга или Румье являются ультрадифференциальными операторами класса Берлинга или Румье соответственно.

В теории ультрараспределений известно следующее утверждение (см. [13, теорема 4.7; 21]).

Пусть $T \in \mathscr{D}'^{*}_{+}(\mathbb{R}, E)$. Тогда для любого $a > 0$ существуют ультрадифференциальный оператор (M_p)-класса вида

$$P_L(d/dt) = \prod_{p=1}^{\infty}\left(1 + \frac{L^2}{m_p^2} d^2/dt^2\right) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p d^p/dt^p, \tag{1.1}$$

где $L > 0$ — некоторая постоянная, или $\{M_p\}$-класса вида

$$P_{L_p}(d/dt) = \prod_{p=1}^{\infty}\left(1 + \frac{L_p^2}{m_p^2} d^2/dt^2\right) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p d^p/dt^p, \tag{1.2}$$

где $(L_p)_p$ — убывающая к нулю последовательность, и непрерывная функция $f : (-a, a) \to E$ такие, что

$$T = P_L(-id/dt) f \ \text{ на } \mathscr{D}^{(M_p)}((-a, a)) \text{ в случае } (M_p),$$

$$T = P_{L_p}(-id/dt) f \ \text{ на } \mathscr{D}^{\{M_p\}}((-a, a)) \text{ в случае } \{M_p\}.$$

В силу теоремы 2 из [23] имеем следующее представление теоремы для умеренных ультрараспределений в случае, когда выполнены (M.1)–(M.3).

Пусть $T \in \mathscr{S}_{+}^{\prime *}(\mathbb{R}, E)$. *Тогда существуют ультрадифференциальный оператор* $P_L(d/dt)$, $L > 0$, (M_p)*-класса вида* (1.1) *или* $P_{L_p}(d/dt)$ $\{M_p\}$*-класса, где* $(L_p)_p$ *— стремящаяся к нулю последовательность, вида* (1.2), *и непрерывная функция* $f : \mathbb{R} \to E$ *такие, что* $\operatorname{supp} f \subset (-a, \infty)$ *для некоторого* $a > 0$, $\|f(t)\| \le Ae^{M(k|t|)}$, $t \in \mathbb{R}$, *для некоторых* $k > 0$ *и* $A > 0$ *или для любого* $k > 0$ *и соответствующего* $A > 0$ *и* $T = P_L(-id/dt)f$ *в случае* (M_p) *на* $\mathscr{S}^{(M_p)}(\mathbb{R})$ *или* $T = P_{L_p}(-id/dt)f$ *в случае* $\{M_p\}$ *на* $\mathscr{S}^{\{M_p\}}(\mathbb{R})$.

2. Ультрараспределения полугрупп

2.1. Некоторые результаты для теории ультрараспределений. Будем рассматривать ультрараспределения полугрупп в рамках экспоненциальных ультрараспределений, которые мы определим через умеренные ультрараспределения. Будем предполагать, что (M_p) удовлетворяет условиям (M.1)–(M.3). Условие (M.3) необходимо для использования теоремы 4.8 из [22].

Определение 2.1. Пусть $a \ge 0$. Тогда $\mathscr{S}\mathscr{E}_a^*(\mathbb{R}) := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}) : e^{a\cdot}\phi \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R})\}$. Определим сходимость в этом пространстве:

$$\phi_n \to 0 \text{ в } \mathscr{S}\mathscr{E}_a^*(\mathbb{R}) \Leftrightarrow e^{a\cdot}\phi_n \to 0 \text{ в } \mathscr{S}^*(\mathbb{R}).$$

Обозначим через $\mathscr{S}\mathscr{E}_a^{\prime *}(\mathbb{R}, E)$ пространство всех непрерывных отображений из $\mathscr{S}\mathscr{E}_a^*(\mathbb{R})$ в E, снабженное сильной топологией.

Имеем

$$F \in \mathscr{S}\mathscr{E}_a^{\prime *}(\mathbb{R}, E) \Leftrightarrow e^{-a\cdot}F \in \mathscr{S}^{\prime *}(\mathbb{R}, E).$$

Теорема 2.2. *Пусть* $G \in \mathscr{S}\mathscr{E}_a^{\prime *}(\mathbb{R}, E)$. *Тогда найдутся ультраполином* P $*$*-класса и функция* $g \in C(\mathbb{R}, E)$ *такие, что либо существуют* $k > 0$ *и* $C > 0$, *либо для любого* $k > 0$ *существует подходящее* $C_k > 0$, *для которых*

$$e^{-ax}\|g(x)\| \le C_k e^{M(k|x|)},\ x \in \mathbb{R}, \quad G = P(d/dt)g.$$

Доказательство. Докажем утверждение в случае класса Берлинга. Поскольку $e^{-a\cdot}G \in \mathscr{S}^{\prime(M_p)}(\mathbb{R}, E)$, можно воспользоваться рассуждениями из [23], чтобы показать существование ультраполинома P (M_p)-класса и функции $g_1 \in C(\mathbb{R}, E)$ таких, что найдутся $k > 0$ и $C_k > 0$, для которых

$$\|g_1(x)\| \le C_k e^{M(k|x|)} \quad \text{и} \quad G = e^{ax}P(d/dt)g_1(x).$$

Положим $g(x) = e^{ax}g_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$. По формуле Лейбница имеем

$$e^{ax}P(d/dt)g_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{j+k}{j}(-1)^k a^k a_{k+j}\right)(e^{ax}g_1(x))^{(j)}.$$

Утверждение будет доказано, если покажем, что $b_j \le C\frac{L^j}{M_j}$, $j \in \mathbb{N}_0$, для некоторых $C, L > 0$, где $b_j = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{k+j}{j}a^k a_{k+j}$, $j \in \mathbb{N}_0$.

Используем неравенство $\binom{j+k}{j} \le 2^{k+1}k^k e^j$, $j, k \in \mathbb{N}$, которое следует из того, что

$$\binom{j+k}{j} \le (j+k)^k \le 2^k j^k + 2^k k^k \le 2^k(k^k e^j + k^k) = 2^k k^k(e^j + 1), \quad j, k \in \mathbb{N},$$

где $j^k \le k^k e^j$, $j,k \in \mathbb{N}$. Для $k \ge j$ неравенство очевидно. Докажем его при $k < j$. Положим $k = \varepsilon j$ и заметим, что если $\varepsilon \in (0,1)$, то $\varepsilon \ln \varepsilon \in (-1,0)$ и

$$\varepsilon j \ln j \le \varepsilon j \ln j + \varepsilon j \ln \varepsilon + j,$$

что влечет $j^k \le k^k e^j$, $k < j$. Оценим b_j с помощью неравенства

$$|a_{k+j}| \le C \frac{h^{k+j}}{M_{k+j}},$$

верного для некоторых $h > 0$, $C > 0$ и того факта, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что $M_j k^k \le C_\varepsilon \varepsilon^{k+j} M_{k+j}$.

Тем самым

$$M_j |b_j| \le 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{k+j} M_j 2^k k^k e^j a^k}{M_{k+j}} \le 2C(he)^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2ha)^k M_j k^k}{M_{k+j}}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Выбирая ε достаточно малым, получаем сходимость последнего ряда. Стало быть, существуют $L > 0$ и $C > 0$ такие, что $|b_j| \le CL^j / M_j$, $j \in \mathbb{N}$. $\square$

Нам понадобятся следующие оценки ультраполиномов.

Лемма 2.3. (a) *Пусть P_L имеем вид* (1.1). *Тогда существуют $C, C_1 > 0$, $L_1, L_2 > 0$ такие, что*

$$e^{2M(L|\zeta|)} \le |P_L(\zeta)| \le C e^{M(L_1|\zeta|)}, \quad \text{если } |\operatorname{Im}\zeta| < \frac{|\operatorname{Re}\zeta|}{2} + \frac{1}{L}$$

и $|a_p| \le C_1 L_2^p / M_p$, $p \in \mathbb{N}_0$.

(b) *Пусть $(L_p)_p$ — строго убывающая бесконечно малая последовательность, а P_{L_p} определены по формуле* (1.2). *Тогда существует $C > 0$ такое, что для любого $k > 0$ найдется $C_k > 0$, для которого*

$$|P_{L_p}(\zeta)| \le C_k e^{M(k|\zeta|)}, \quad |\operatorname{Im}\zeta| < \frac{|\operatorname{Re}\zeta|}{2} + \frac{1}{L_1},$$

и (для другого C_k при фиксированном $k > 0$) $|a_p| \le C_k k^p / M_p$, $p \in \mathbb{N}_0$. Кроме того, существует подчиненная функция $\varepsilon(\rho)$, $\rho \ge 0$, такая, что

$$e^{2M(\varepsilon(|\zeta|))} \le |P_{L_p}(\zeta)|, \quad |\operatorname{Im}\zeta| < \frac{|\operatorname{Re}\zeta|}{2} + \frac{1}{L}.$$

Доказательство. Ограничимся доказательством того, что

$$e^{2M(L|\zeta|)} \le |P_L(\zeta)|, \quad |\operatorname{Im}\zeta| < \frac{|\operatorname{Re}\zeta|}{2} + \frac{1}{L}.$$

Заметим, что для любых $c > 0$ из неравенства $x^2 - y^2 \ge 0$ ($\zeta = x + iy$) следует, что $|1 + c\zeta^2| \ge c|\zeta|^2$. Кроме того, $|1 + c\zeta^2| > c|\zeta|^2$ для всех достаточно малых $|\zeta|$. Тем самым после несложных вычислений получаем

$$\left|1 + \frac{L^2\zeta^2}{m_p^2}\right| \ge \frac{L^2}{m_p^2}|\zeta|^2, \quad |\operatorname{Im}\zeta| < \frac{|\operatorname{Re}\zeta|}{2} + \frac{1}{L}.$$

Отсюда

$$|P_L(\zeta)| = \left|\prod_{p=1}^{\infty}\left(1 + \frac{L^2}{m_p^2}\zeta^2\right)\right| \ge \prod_{p=1}^{\infty}\left(\frac{L^2}{m_p^2}|\zeta|^2\right) \ge e^{2M(|\zeta|)}, \ |\operatorname{Im}\zeta| < \frac{|\operatorname{Re}\zeta|}{2} + \frac{1}{L}. \quad \square$$

Лемма 2.4. *Пусть $P_L(d/dt)$ и $P_{L_p}(d/dt)$ вида (1.1) или (1.2) соответственно. Отображения*

$$P_L(id/dt) : \mathscr{S}^{(M_p)}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}^{(M_p)}(\mathbb{R}), \quad \phi \mapsto P_L(id/dt)\phi,$$

$$P_{L_p}(id/dt) : \mathscr{S}^{\{M_p\}}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}^{\{M_p\}}(\mathbb{R}), \quad \phi \mapsto P_{L_p}(id/dt)\phi,$$

являются непрерывными линейными биекциями.

Доказательство. Докажем лемму в случае класса Берлинга. Пусть $\phi \in \mathscr{S}^{(M_p)}(\mathbb{R})$. Тогда

$$\mathscr{F}(P_L(id/dt)\phi)(\xi) = P_L(-\xi)\hat{\phi}(\xi) = P_L(\xi)\hat{\phi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Стандартными рассуждениями можно показать, что $P_L(\xi)\hat{\phi} \in \mathscr{S}^{(M_p)}(\mathbb{R})$. Осталось доказать, что $\hat{\phi}/P_L(\xi) \in \mathscr{S}^{(M_p)}(\mathbb{R})$.

Заметим, что существует $r > 0$ такое, что для любого $\xi \in \mathbb{R}$ окружность $k_\xi(r)$ с центром в ξ радиусом r содержится в области $|\operatorname{Im}\zeta| < 1/C$, где выполнены оценки из леммы 2.3. По формуле Коши с подходящими константами получаем

$$\begin{aligned}\big|\big(P_L^{-1}\big)^{(n)}(\xi)\big| &\le C\frac{n!}{r^n}\sup\big\{\big|P_L^{-1}(\xi + re^{i\theta})\big| : \theta \in [0, 2\pi]\big\}\\ &\le C\frac{n!}{r^n}e^{M(L(|\xi|+r))} \le C_1\frac{n!}{r^n}e^{M((L+1)|\xi|)}, \quad \xi \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что для любого $h > 0$

$$\sup\bigg\{\frac{h^n|(\hat{\phi}/P_L)^{(n)}(\xi)|e^{M(h|\xi|)}}{M_n} : \xi \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0\bigg\} < \infty,$$

а это равносильно тому, что $\hat{\phi}/P_L \in \mathscr{S}^{(M_p)}(\mathbb{R})$. $\square$

2.2. Структурные теоремы. Пусть A — замкнутый оператор и K — локально интегрируемая функция на $[0, \tau)$, $0 < \tau \le \infty$, и пусть $\Theta(t) := \int_0^t K(s)\,ds$, $0 \le t \le \tau$. Напомним (см., например, [7, 20, 25]), что если существует сильно непрерывное семейство операторов $(S_K(t))_{t\in[0,\tau)}$ таких, что

$$S_K(t)C = CS_K(t), \quad S_K(t)A \subset AS_K(t), \quad \int_0^t S_K(s)x\,ds \in D(A),$$

и при $t \in [0, \tau)$, $x \in E$ имеет место

$$A\int_0^t S_K(s)x\,ds = S_K(t)x - \Theta(t)Cx, \quad x \in E,$$

то $(S_K(t))_{t\in[0,\tau)}$ называется (*локально*) *K-сверточной C-полугруппой с субгенератором A*.

Если $\tau = \infty$, то говорят, что $(S_K(t))_{t\ge 0}$ — *экспоненциально ограниченная K-сверточная C-полугруппа, порожденная A*, если, кроме того, существуют $M > 0$ и $\omega \in \mathbb{R}$ такие, что $\|S_K(t)\| \le Me^{\omega t}$, $t \ge 0$. Если из того, что $S_K(t)x = 0$, следует $x = 0$ для всех $t \in [0, \tau)$, то $(S_K(t))_{t\in[0,\tau)}$ называется *невырожденной*.

Следуя [18, 19], напомним определения L-ультрараспределения полугрупп и ультрараспределения полугрупп из [1] и определим экспоненциальные ультрараспределения полугрупп.

Определение 2.5. Пусть $G \in \mathscr{D}'^{*}_{+}(\mathbb{R}, L(E))$. Тогда G является *экспоненциальным L-ультрараспределением полугрупп $*$-класса*, если выполнены следующие условия:

(U.1) $G(\phi * \psi) = G(\phi)G(\psi)$, $\phi, \psi \in \mathscr{D}^{*}_{0}(\mathbb{R})$;

(U.2) $\mathscr{N}(G) := \bigcap\limits_{\phi \in \mathscr{D}^{*}_{0}(\mathbb{R})} N(G(\phi)) = \{0\}$;

(U.3) $\mathscr{R}(G) := \bigcup\limits_{\phi \in \mathscr{D}^{*}_{0}(\mathbb{R})} R(G(\phi))$ плотно в E;

(U.4) для любого $x \in \mathscr{R}(G)$ существует функция $u \in C([0, \infty), E)$ такая, что

$$u(0) = x \text{ и } G(\phi)x = \int\limits_{0}^{\infty} \phi(t)u(t)\,dt, \quad \phi \in \mathscr{D}^{*}(\mathbb{R}).$$

(U.5) существует $a \geq 0$ такое, что $G \in \mathscr{S}\mathscr{E}'^{*}_{a}(\mathbb{R}, L(E))$.

Напомним, что $f *_0 g(t) := \int\limits_{0}^{t} f(t-s)g(s)\,ds$, $t \in \mathbb{R}$.

Если $G \in \mathscr{D}'^{*}_{+}(\mathbb{R}, L(E))$ удовлетворяет условиям (U.5) и

(U.6) $G(\phi *_0 \psi) = G(\phi)G(\psi)$, $\phi, \psi \in \mathscr{D}^{*}(\mathbb{R})$,

то G называется *экспоненциальным предультрараспределением полугруппы*, коротко *пред-*ЭУРПГ*, $*$-класса.*

Если условия (U.6), (U.5) и (U.2) выполнены для G, то G — *экспоненциальное ультрараспределение полугрупп $*$-класса*, коротко ЭУРПГ. Пред-ЭУРПГ G *плотно*, если дополнительно выполнено условие (U.3).

Если выполнено только условие (U.6), то G называем *предультрараспределением полугруппы*, или пред-УРПГ.

Если выполнены (U.6) и (U.2), то G — *ультрараспределение полугруппы*, коротко УРПГ. Если, кроме того, верно (U.3), то G — *плотное ультрараспределение полугруппы.*

Замечание 2.6. Если $G \in \mathscr{D}'^{*}_{+}(\mathbb{R}, L(E))$, то условие

(U.2)$'$ $\operatorname{supp} G(\cdot)x \nsubseteq \{0\}$ для любого $x \in E \setminus \{0\}$,

равносильно (U.2).

Пусть D — банахово пространство и $P \in \mathscr{D}'^{*}_{+}(\mathbb{R}, L(D, E))$. Тогда, как и в случае распределения полугруппы, $G \in \mathscr{D}'^{*}_{+}(\mathbb{R}, L(E, D))$ является фундаментальным решением-ультрараспределением для P, если

$$P * G = \delta \otimes I_E, \quad G * P = \delta \otimes I_D.$$

Если дополнительно при некотором $a \geq 0$ верно $G \in \mathscr{S}\mathscr{E}'^{*}_{a}(\mathbb{R}, L(E, [D(A)]))$, то говорят, что G — *экспоненциальное фундаментальное решение-ультрараспределение для P*.

Как и для распределений, фундаментальное решение-ультрараспределение для $P \in \mathscr{D}'^{*}_{+}(\mathbb{R}, L(D, E))$ определено однозначно.

В дальнейшем будем говорить, что G — *фундаментальное решение-ультрараспределение для A*, если G — фундаментальное решение-ультрараспределение для $P := \delta' \otimes I_{D(A)} - \delta \otimes A \in \mathscr{D}'^{*}_{+}(\mathbb{R}, L([D(A)], E))$.

Следуя работе Комацу [13] по теории ультрараспределений Данжуа — Карлемана — Комацу и работе Кунстмана [15] по теории ω-ультрараспределений, определим следующие области:

$\Omega^{(M_p)} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq M(k|\lambda|) + C\}$ для некоторых $k > 0$, $C > 0$,

$\Omega^{\{M_p\}} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq M(k|\lambda|) + C_k\}$ для любого $k > 0$ и соответствующего $C_k > 0$.

Через Ω^* обозначаем либо $\Omega^{(M_p)}$, либо $\Omega^{\{M_p\}}$.

В теореме 2.7 в случае умеренного ультрараспределения полугрупп (аналогично в случае экспоненциально ограниченного ультрараспределения полугрупп) используем теорему 3.5.14 из [20], где обратное преобразование Лапласа применяется к отрезку прямой, соединяющей точки $\bar{a} - i\infty$ и $\bar{a} + i\infty$, где $\bar{a} > 0$. Подходящим выбором L или $(L_p)_p$ можно добиться того, что эта прямая лежит в области $|\operatorname{Im}(i\zeta)| < \frac{|\operatorname{Re}(i\zeta)|}{2} + \frac{1}{L}$ или $|\operatorname{Im}(i\zeta)| < \frac{|\operatorname{Re}(i\zeta)|}{2} + \frac{1}{L_1}$ соответственно, где выполнены указанные оценки для $P_L(-i\lambda)$ или $P_{L_p}(-i\lambda)$. Детально поясним это в случае Берлинга. Возьмем произвольное $L \in \left(0, \frac{1}{\bar{a}}\right)$ и положим

$$K(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\bar{a}-i\infty}^{\bar{a}+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{P_L(-i\lambda)}\, d\lambda,$$

$t \geq 0$. Тогда K — экспоненциально ограниченная непрерывная функция, определенная на $[0, \infty)$. Будем просто писать $K = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{P_L(-i\lambda)}\right)$.

Дадим структурные характеристики для УРПГ и экспоненциальных УРПГ. Некоторые из этих характеристик доказаны в [3, 13, 15, 20, 25], что мы отметим в теореме 2.7.

Сначала сформулируем свойства.

(a) A порождает УРПГ $*$-класса G.

(a)′ A порождает ЭУРПГ $*$-класса G.

(b) A порождает УРПГ $*$-класса G такое, что для всех $a > 0$ класс G имеет вид $G = P_L^a(-id/dt)S_K^a$ на $\mathscr{D}^{(M_p)}((-\infty, a))$ в (M_p)-случае (соответственно $G = P_{L_p}^a(-id/dt)S_K^a$ на $\mathscr{D}^{\{M_p\}}((-\infty, a))$ в $\{M_p\}$-случае), где $S_K^a : (-\infty, a) \to L(E, [D(A)])$ непрерывна, $S_K^a(t) = 0$, $t \leq 0$.

(b)′ A порождает ЭУРПГ $*$-класса G так, что G вида $G = P_L(-id/dt)S_K$ на $\mathscr{S}\mathscr{E}_a^{(M_p)}(\mathbb{R})$ в (M_p)-случае (соответственно $G = P_{L_p}(-id/dt)S_K$ в $\{M_p\}$-случае), где $S_K : \mathbb{R} \to L(E, [D(A)])$ непрерывна, $S_K(t) = 0$, $t \leq 0$, и $e^{-at}\|S_k(t)\| \leq Ae^{M(k|t|)}$ для некоторых $k > 0$ и $A > 0$ (для всех $k > 0$ и соответствующих $A > 0$, $t \in \mathbb{R}$).

(c) Для любых $a > 0$ оператор A — генератор локальной невырожденной K_a-сверточной полугруппы $\left(S_{K_a}^a(t)\right)_{t\in[0,a)}$, где $K_a = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{P_L^a(-i\lambda)}\right)$ в (M_p)-случае (соответственно $K_a = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{P_{L_p}^a(-i\lambda)}\right)$ в $\{M_p\}$-случае) и P_L^a $\left(P_{L_p}^a\right)$ — ультрадифференциальный оператор $*$-класса такой, что для $0 < a < b$ сужение $P_L^b S_K^b$ $(P_{L_p}^b S_K^b)$ на $\mathscr{D}^*((-\infty, a))$ равно $P_L^a S_K^a$ $(P_{L_p}^a S_K^a)$.

(c)′ A — генератор глобальной экспоненциально ограниченной невырожденной K-сверточной полугруппы $(S_K(t))_{t\geq 0}$, где $K = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{P_L(-i\lambda)}\right)$ в (M_p)-случае $\left(K = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{P_{L_p}(-i\lambda)}\right)\right.$ в $\{M_p\}$-случае$\left.\right)$.

(d) Существует фундаментальное решение-ультрараспределение $*$-класса для A, обозначаемое через G, такое, что $\mathscr{N}(G) = \{0\}$.

(d)′ Существует фундаментальное решение-экспоненциальное ультрараспределение $*$-класса G для A такое, что $\mathscr{N}(G) = \{0\}$.

(e) $\rho(A) \supset \Omega^*$ и

$$\|R(\lambda : A)\| \le Ce^{M(k|\lambda|)}, \quad \lambda \in \Omega^{(M_p)},$$

для некоторого $k > 0$ и $C > 0$ в (M_p)-случае или

$$\|R(\lambda : A)\| \le C_k e^{M(k|\lambda|)}, \quad \lambda \in \Omega^{\{M_p\}},$$

для любого $k > 0$ и соответствующего $C_k > 0$ в $\{M_p\}$-случае.

(e)$'$ $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > a\}$ и

$$\|R(\lambda : A)\| \le Ce^{M(k|\lambda|)}, \quad \operatorname{Re}\lambda > a,$$

для некоторых $a, k > 0$ и $C > 0$ в (M_p)-случае или

$$\|R(\lambda : A)\| \le C_k e^{M(k|\lambda|)}, \quad \operatorname{Re}\lambda > a,$$

для любого $k > 0$ и соответствующего $a, C_k > 0$ в $\{M_p\}$-случае.

Теорема 2.7. (a) $\Leftrightarrow$ (d); (a)$'$ $\Leftrightarrow$ (d)$'$; (c) $\Rightarrow$ (d); (c)$'$ $\Rightarrow$ (d)$'$; (d) $\Rightarrow$ (e); (d)$'$ $\Rightarrow$ (e)$'$; *если* (M_p), *кроме того, удовлетворяет* (M.3), *то* (a)$'$ $\Rightarrow$ (c)$'$.

Доказательство. (a) $\Leftrightarrow$ (d). Эта эквивалентность доказана в [25] при $\mathscr{N}(G) \ne \{0\}$. Утверждение (a) $\Rightarrow$ (d) напрямую следует из теоремы 2(c) в [1]. Здесь дадим схему доказательства обратной импликации. Пусть $G \in \mathscr{D}_+^{*'}(\mathbb{R}, L(E, [D(A)]))$ — фундаментальное решение-ультрараспределение $*$-класса для A. Прямым вычислением получаем, что A — оператор, допускающий замыкание.

Пусть $\widetilde{A}$ порождает G. Если (x, y) принадлежит замыканию A, то найдется последовательность $(x_n, y_n)_n$ в A такая, что $(x_n, y_n) \to (x, y)$ при $n \to \infty$ в $E \times E$. Пусть $\phi \in \mathscr{D}_0^*(\mathbb{R})$ фиксировано. Для $\varphi \in \mathscr{D}_0^*(\mathbb{R})$ имеем

$$\begin{aligned}\|G(\varphi)(G(-\phi')x - G(\phi)y)\| \\ &= \|G(\varphi)[G(\phi')(x_n - x) - G(\phi')x_n + G(\phi)(y_n - y) - G(\phi)y_n]\| \\ &= \|G(\varphi)[G(\phi')(x_n - x) + G(\phi)(y_n - y)]\| \le (\|G(\varphi *_0 \phi')\| + \|G(\varphi *_0 \phi\|)/k\end{aligned}$$

при $k \in \mathbb{N}$, откуда $G(-\phi')x = G(\phi)y$ для всех $\phi \in \mathscr{D}_0^*(\mathbb{R})$. Поскольку G — фундаментальное решение-ультрараспределение $*$-класса для A, имеем $A \subset \widetilde{A}$. Отсюда $\mathscr{D}_+^{'*}(\mathbb{R}, [\overline{D(A)}])$ изоморфно подпространству в $\mathscr{D}_+^{'*}(\mathbb{R}, [D(\widetilde{A})])$. Из первой части теоремы получаем, что G — фундаментальное решение-ультрараспределение для $P := \delta' \otimes \mathrm{Id}_{D[\widetilde{A}]} - \delta \otimes \widetilde{A}$. Тем самым G^* — изоморфизм из $\mathscr{D}_+^{'*}(\mathbb{R}, E)$ на $\mathscr{D}_+^{'*}(\mathbb{R}, [D(A)])$ и на $\mathscr{D}_+^{'*}(\mathbb{R}, [D(\widetilde{A})])$, откуда $\mathscr{D}_+^{'*}(\mathbb{R}, [D(A)]) = \mathscr{D}_+^{'*}(\mathbb{R}, [D(\widetilde{A})])$, стало быть, $[D(A)] = [D(\widetilde{A})]$.

Утверждение (a)$'$ $\Leftrightarrow$ (d)$'$ доказывается аналогично в силу того, что G может быть непрерывно продолжено на $\mathscr{E}\mathscr{S}^*(\mathbb{R})$ [1].

Доказательство (d) $\Rightarrow$ (e) приведено в [3].

(d)$'$ $\Rightarrow$ (e)$'$ [20]. Проведем доказательство в случае Берлинга, случай Румье аналогичен. Пусть G — экспоненциальное фундаментальное решение-ультрараспределение (M_p)-класса для A, т. е. G — фундаментальное решение-ультрараспределение и $G \in \mathscr{S}\mathscr{E}_\omega^{\prime(M_p)}(\mathbb{R}, L(E))$ при $\omega \ge 0$. Пусть $s > 0$. Определим функцию $g \in \mathscr{E}^{(M_p)}(\mathbb{R})$ такую, что $g(t) = 0$ для $t < -s$ и $g(t) = 1$ при $t \ge 0$. Функция $\widetilde{G}(\lambda) := G(g(t)e^{-\lambda t}) := G(e^{-\omega t}(g(t)e^{(\omega-\lambda)t}))$ определена корректно, поскольку функция $t \mapsto g(t)e^{(\omega-\lambda)t}$, $t \in \mathbb{R}$, такова, что $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, принадлежит $\mathscr{S}^{(M_p)}(\mathbb{R})$. Так как G — фундаментальное решение-ультрараспределение для $A - \omega I$, при $\varphi \in \mathscr{D}^{(M_p)}(\mathbb{R})$, $x \in E$, имеем

$$(A - \omega I)G(e^{-\omega t}\varphi)x = G(-e^{-\omega t}\varphi')x - \varphi(0)x.$$

В силу того, что $\mathscr{D}^{(M_p)}(\mathbb{R})$ плотно в $\mathscr{S}^{(M_p)}(\mathbb{R})$, предыдущее уравнение выполнено для всех $\mathscr{S}^{(M_p)}(\mathbb{R})$. Пусть $\varphi(t) = g(t)e^{(\omega-\lambda)t} \in \mathscr{S}^{(M_p)}(\mathbb{R})$. Тогда $\operatorname{supp} G \subseteq [0, \infty)$ и получаем

$$A\widetilde{G}(\lambda)x = AG(e^{-\lambda t}\varphi)x = \lambda\widetilde{G}(\lambda)x - \varphi(0)x, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega.$$

Отсюда $(\lambda I - A)\widetilde{G}(\lambda)x = x$, $x \in E$, $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Поскольку $\widetilde{G}(\lambda)A \subseteq A\widetilde{G}(\lambda)$ верно для $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, имеем $\widetilde{G}(\lambda)(\lambda I - A)x = x$ для $x \in D(A)$ и $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Положив $\omega = a$, завершаем доказательство первой части утверждения.

В силу приведенных рассуждений ясно, что $R(\lambda : A)x = \widetilde{G}(\lambda)x$ при $x \in E$, $\operatorname{Re}\lambda > a$. Ввиду (M.1) получаем

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda : A)\| &= \|\widetilde{G}(\lambda)\| = \|G(e^{-\omega t}(g(t)e^{(\omega-\lambda)t}))\| \\
&\leq C'' \sup_{t\in K} \frac{(g(t)e^{(\omega-\lambda)t})^{(p)}}{M_p h^p} \leq C'' \sup_{t\in K} \sum_{j=0}^{p} C_j^p \frac{g^{(p-j)}(t)\cdot(e^{(\omega-\lambda)t})^{(j)}}{M_p h^p} \\
&\leq C'' \sup_{t\in K} \sum_{j=0}^{p} C_j^p \frac{g^{(p-j)}(t)}{M_{p-j}h^{p-j}} \cdot \frac{(\omega-\lambda)^j e^{(\omega-\lambda)t}}{M_j h^j} \\
&\leq C' \sup_{t\in K} \sum_{j=0}^{p} C_j^p \frac{(\omega-\lambda)^j e^{(\omega-\lambda)t}}{M_j h^j} \leq C e^{M(k|\lambda|)}.
\end{aligned}$$

(a)$'$ $\Rightarrow$ (c)$'$ Докажем утверждение в случае Берлинга с помощью указанной структурной теоремы для элементов из $\mathscr{S}\mathscr{E}'^{(M_p)}_a(L(E))$:

$$G(\phi) = \langle \phi, P_L(-id/dt)S(t))\rangle, \quad \phi \in \mathscr{S}^{(M_p)}(\mathbb{R}),$$

где

$$e^{-at}\|S(t)\| \leq e^{M(k|\xi|)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

для подходящего $k > 0$. Возьмем $x \in E$. По теореме 2(c) из [1] имеем

$$AG(\phi)x = -\langle \phi', P_L(-id/dt)S(t)x\rangle - \phi(0)x \quad \text{для всех } \phi \in \mathscr{S}^{(M_p)}(\mathbb{R}).$$

Поскольку $1 = P_L(-id/dt)\mathscr{L}^{-1}(1/P_L(-i\cdot))$ в смысле ультрараспределений, получаем

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \phi'(t), (P_L(-id/dt)A\int_0^t S(s)x\,ds - P_L(-id/dt)S(t)x \\
&\qquad + \int_0^t \mathscr{L}^{-1}(1/P_L(-i\cdot))(s)x\,ds)\rangle \\
&= \left\langle P_L(id/dt)\phi'(t), \left(A\int_0^t S(s)x\,ds - S(t)x + \int_0^t \mathscr{L}^{-1}(1/P_L(-i\cdot))(s)x\,ds\right)\right\rangle
\end{aligned}$$

для любого $\phi \in \mathscr{S}^{(M_p)}(\mathbb{R})$. Предположим, что $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ и $\phi \in \mathscr{S}^{(M_p)}(\mathbb{R})$, так что $\psi = P_L(id/dt)\phi$ (см. лемма 2.4). Отсюда

$$A\int_0^t S(s)x\,ds - S(t)x + \int_0^t \mathscr{L}^{-1}(1/P_L(-i\cdot))(s)x\,ds = \mathrm{const} \tag{2.1}$$

в смысле ультрараспределений Берлинга на $(0,\infty)$. Получим $\mathrm{const} = 0$, полагая $x = 0$ в (2.1). Так как левая часть в (2.1) непрерывна в $\mathbb{R}$, имеем

$$A\int_0^t S(s)x\,ds = S(t)x - \Theta(t)x = 0, \qquad \text{где } \Theta(t) = \int_0^t \mathscr{L}^{-1}(1/P_L(-i\cdot))(s)\,ds,$$

для всех $t \geq 0$. Этим завершается доказательство (a)$'$ $\Rightarrow$ (c)$'$.

Покажем (c) $\Rightarrow$ (d) в случае Берлинга. Доказательство (c)$'$ $\Rightarrow$ (d)$'$ аналогично. Определим G на $\mathscr{D}^{(M_p)}((-\infty,a))$ для всех $a > 0$ по формуле

$$G := P_L^a(-id/dt)S_{K_a}^a, \qquad \text{где } P_L^a = \sum_{p=0}^{\infty} a_p(d/dt)^p.$$

Тогда G — непрерывное линейное отображение из $\mathscr{D}^{(M_p)}(\mathbb{R})$ в $L(E)$, которое коммутирует с A. Кроме того, $\operatorname{supp} G \subset [0,\infty)$. Пусть $\phi \in \mathscr{D}^{(M_p)}((-\infty,a))$ и $x \in E$. Имеем

$$\begin{aligned}
G(-\phi')x - AG(\phi)x &= -\sum_{p\geq 0} a_p(-i)^p \int_0^a \phi^{(p+1)}(s)S_{K_a}^a(s)x\,ds \\
-\sum_{p\geq 0} a_p(-i)^p \int_0^a \phi^{(p)}(s)AS_{K_a}^a(s)x\,ds &= -\sum_{p\geq 0} a_p(-i)^p \int_0^a \phi^{(p+1)}(s)S_{K_a}^a(s)x\,ds \\
&\quad + \sum_{p\geq 0} a_p(-i)^p \int_0^a \phi^{(p+1)}(s)(S_{K_a}^a(s)x - \Theta_a(s)x)\,ds \\
&= \sum_{p\geq 0} a_p(-i)^p \int_0^a \phi^{(p)}(s)K_a(s)x\,ds = \phi(0)x.
\end{aligned}$$

Таким образом, $G \in \mathscr{D}'^{(M_p)}(\mathbb{R}, L(E,[D(A)]))$ — фундаментальное решение-ультрараспределение для A. Очевидно, что $\mathscr{N}(G) = \{0\}$.

Доказательство утверждений $(d)' \Rightarrow (e)'$, $(a)' \Rightarrow (c)'$ и $(c) \Rightarrow (d)$ в случае Румье аналогичны и используют соответствующие структурные теоремы для пространств $\mathscr{S}'^{\{M_p\}}(\mathbb{R})$, $\mathscr{S}E_a'^{\{M_p\}}(L(E))$ и $\mathscr{D}'^{\{M_p\}}((-\infty,a))$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Костич М., Пилипович С.* Ультрараспределения полугрупп // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 291–305.
2. *Arendt W.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems // Israel J. Math. 1987. V. 59. P. 327–352.
3. *Melnikova I. V., Filinkov A. I.* Abstract Cauchy problems: Three approaches. Washington: Chapman & Hall/CRC, 2001.

4. *Arendt W., El-Mennaoui O., Keyantuo V.* Local integrated semigroups: evolution with jumps of regularity // J. Math. Anal. Appl. 1994. V. 186. P. 572–595.
5. *Hieber M.* Integrated semigroups and differential operators on L^p spaces // Math. Ann. 1991. V. 291, N 1. P. 1–16.
6. *Keyantuo V.* Integrated semigroups and related partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 212. P. 135–153.
7. *Li M., Huang F., Zheng Q.* Local integrated C-semigroups // Stud. Math. 2001. V. 145. P. 265–280.
8. *Neubrander F.* Integrated semigroups and their applications to the abstract Cauchy problem // Pac. J. Math. 1988. V. 135. P. 111–155.
9. *Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M., Neubrander F.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Birkhäuser-Verl., 2001.
10. *Chazarain J.* Problémes de Cauchy abstraites et applications á quelques problémes mixtes // J. Funct. Anal. 1971. V. 7. P. 386–446.
11. *Beals R.* Semigroups and abstract Gevrey spaces // J. Funct. Anal. 1972. V. 10. P. 300–308.
12. *I. Ciorănescu* Beurling spaces of class (M_p) and ultradistribution semi-groups // Bull. Sci. Math. 1978. V. 102. P. 167–192.
13. *Komatsu H.* Operational calculus and semi-groups of operators // Functional analysis and related topics (Kioto). Berlin: Springer-Verl., 1991. P. 213–234.
14. *Beals R.* On the abstract Cauchy problem // J. Funct. Anal. 1972. V. 10. P. 281–299.
15. *Kunstmann P. C.* Banach space valued ultradistributions and applications to abstract Cauchy problems // http://math.kit.edu/iana1/ kunstmann/media/ultra-appl.pdf.
16. *Мельникова И. В.* Метод интегрированных полугрупп для задач Коши в банаховых пространствах // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 1. С. 119–129.
17. *Melnikova I. V.* Regularized solutions to Cauchy problems well posed in the extended sense // Integral Transforms Spec. Funct. 2006. V. 17, N 2–3. P. 185–191.
18. *Kunstmann P. C.* Distribution semigroups and abstract Cauchy problems // Trans. Amer. Math. Soc. 1999. V. 351. P. 837–856.
19. *Wang S.* Quasi-distribution semigroups and integrated semigroups // J. Funct. Anal. 1997. V. 146. P. 352–381.
20. *Kostić M.* Generalized semigroups and cosine functions. Belgrade: Math. Institute, 2011.
21. *Komatsu H.* Ultradistributions, I. Structure theorems and a characterization // J. Fac. Sci., Univ. Tokyo Sect. IA Math. 1973. V. 20. P. 25–105.
22. *Komatsu H.* Ultradistributions, III. Vector valued ultradistributions and the theory of kernels // J. Fac. Sci., Univ. Tokyo Sect. IA Math. 1982. V. 29. P. 653–718.
23. *Pilipović S.* Tempered ultradistributions // Boll. Un. Mat. Ital. 1988. V. 7. P. 235–251.
24. *Pilipović S.* Characterizations of bounded sets in spaces of ultradistributions // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 20. P. 1191–1206.
25. *Kostić M., Pilipović S.* Global convoluted semigroups // Math. Nachr. 2007. V. 280, N 15. P. 1727–1743.

Статья поступила 6 мая 2013 г.

Marko Kostić (Костич Марко)
Faculty of Technical sciences,
Trg D. Obradovića, 6, Novi Sad, Serbia 21125
marko.s@verat.net

Stevan Pilipović (Пилипович Стеван)
University of Novi Sad,
Trg D. Obradovića, 4, Novi Sad, Serbia 21125
pilipovic@dmi.uns.ac.rs

Daniel Velinov (Велинов Даниел)
Department for Mathematics,
Faculty of Civil Engineering-Skopje,
Partizanski Odredi, 24, P.O. box 560, Skopje, Macedonia 1000
velinovd@gf.ukim.edu.mk