Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6

УДК 512.554.33+512.554.37

ПОДГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ СВОБОДНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ РАНГА 3

М. А. Шевелин

Аннотация. Пусть F_r — свободная алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$. Приведен пример подгруппы в $\operatorname{Aut} F_r$, которая изоморфна подгруппе $\mathbb{C}^*$ и не сопряжена с подгруппой группы линейных автоморфизмов, сформулированы вопросы.

Ключевые слова: 1-коцикл, расщепляемое расширение, классы сопряженности подгрупп, свободная алгебра Ли, группа автоморфизмов.

1. Введение. Эта заметка написана ради простого, но несколько неожиданного примера п. 2 и вопросов в п. 3. Пример является побочным результатом неудачных попыток автора построить нетривиальное вложение окружности в группу автоморфизмов свободной алгебры Ли ранга 3 над полем вещественных или комплексных чисел.

Пусть K — произвольное поле, $r \geq 2$ — натуральное число, F_r — свободная алгебра Ли над полем K с множеством свободных порождающих $X = \{x_1, \dots, x_r\}$. Каждый автоморфизм алгебры F_r индуцирует автоморфизм фактор-алгебры F_r по ее коммутанту F_r', и каждый автоморфизм фактор-алгебры может быть так получен. Этим определен гомоморфизм группы $\operatorname{Aut} F_r$ на группу $\mathrm{GL}(r, K)$. Ядро I_r описанного выше гомоморфизма входит в точную расщепляющуюся последовательность

$$1 \longrightarrow I_r \longrightarrow \operatorname{Aut} F_r \longrightarrow \mathrm{GL}(r, K) \longrightarrow 1.$$

Автоморфизм называется *линейным*, если он оставляет инвариантной линейную оболочку X. Отметим, что $I_2 = 1$ (см. п. 1.1).

Отображение $\varphi \in \operatorname{Aut} F_r$ полностью определяется строчкой $(x_1\varphi, \dots, x_r\varphi)$, и часто пишут $\varphi = (x_1\varphi, \dots, x_r\varphi)$. Автоморфизм

$$\varphi(i, \alpha, v) = (x_1, \dots, \alpha x_i + v, \dots, x_r), \quad \alpha \neq 0,\ v \in \langle X \setminus \{x_i\}\rangle, \tag{1}$$

изменяющий только i-ю координату, называется *элементарным*, $\varphi(i, \alpha, v)$ линеен тогда и только тогда, когда степень v равна 1.

1.1. Порождающие элементы [1]. Группа $\operatorname{Aut} F_r$ порождается элементарными автоморфизмами.

1.2. Определяющие соотношения [2].

1.2.1. Пусть k, $s \in \{1, \dots, r\}$. При $k \neq s$ обозначим через

$$(ks) = \varphi(s, 1, x_k)\varphi(k, 1, -x_s)\varphi(s, -1, x_k)$$

автоморфизм, переставляющий порождающие x_k и x_s. Группа $\operatorname{Aut} F_r$ может быть задана относительно порождающего множества (1) следующим множеством определяющих соотношений ($1 \le i, j, k, s \le r$, $\alpha, \beta \in K \setminus \{0\}$):

$$\varphi(i, \alpha, u)\varphi(i, \beta, v) = \varphi(i, \alpha\beta, \alpha v + u) \quad (u, v \in \langle X \setminus \{x_i\}\rangle), \tag{2}$$

$$\varphi(i, \alpha, u)^{\varphi(j,\beta,v)} = \varphi(i, \alpha, u\varphi(j, \beta, v)) \quad (i \ne j,\ v \in \langle X \setminus \{x_i, x_j\}\rangle), \tag{3}$$

$$\varphi(i, \alpha, u)^{(ks)} = \varphi(i(ks), \alpha, u(ks)). \tag{4}$$

(В (4) на первый аргумент левой части действует *транспозиция* (ks).)

1.2.2. Если в (1)–(4) ограничиться только линейными автоморфизмами, то множество (1) составит множество порождающих для группы линейных автоморфизмов алгебры F_r, а (2)–(4) составят множество определяющих соотношений для той же группы.

1.3. Конечные подгруппы в ранге 3 [3]. Пусть G — конечная подгруппа в $\operatorname{Aut} F_3$ и характеристика поля K не делит порядок G. Тогда G сопряжена с подгруппой линейных автоморфизмов.

1.4. Некоммутативные 1-коциклы. Пусть G, I — две группы, $\lambda : G \to \operatorname{Aut} I$ — фиксированный гомоморфизм. Действие автоморфизмов будем записывать в показательной форме. Для двух элементов x, y из некоторой группы через x^y обозначается элемент $y^{-1}xy$, а через (x, y) — коммутатор $x^{-1}y^{-1}xy$. Под 1-*коцепью* понимаем произвольное отображение $\sigma : G \to I$. Такая коцепь называется λ-1-*коциклом* или λ-*дифференцированием*, если для всех $x, y \in G$ выполнено равенство

$$\sigma(xy) = \sigma(x)^{\lambda(y)}\sigma(y).$$

В дальнейшем вместо «λ-1-коцикл» пишем «коцикл».

Коцикл σ называется *кограницей* или *внутренним дифференцированием*, если найдется такой элемент $w \in I$, что для всех $x \in G$ выполнено равенство

$$\sigma(x) = w^{-\lambda(x)}w.$$

Таким образом определенный коцикл далее будет обозначаться через σ_w. Согласно определению σ_w очевидно, что $\sigma_1(x) = 1^{-\lambda(x)}1 = 1$ для всех $x \in G$.

Отметим, что если G и I являются подгруппами некоторой группы, G нормализует I и $\lambda(x)$ — сопряжение при помощи x, суженное на I, то внутреннее дифференцирование $\sigma(x) = (x, w)$ есть коммутатор x и w.

Для заданных коцикла σ и элемента $w \in I$ определим новое отображение $\sigma' : G \to I$ по правилу $\sigma'(x) = w^{-\lambda(x)}\sigma(x)w$.

Это отображение является коциклом. Действительно, $\sigma'(xy)$ по определению есть

$$\begin{aligned} w^{-\lambda(xy)}\sigma(xy)w &= w^{-\lambda(x)\lambda(y)}\sigma(x)^{\lambda(y)}\sigma(y)w \\ &= w^{-\lambda(x)\lambda(y)}\sigma(x)^{\lambda(y)}w^{\lambda(y)}w^{-\lambda(y)}\sigma(y)w \\ &= (w^{-\lambda(x)}\sigma(x)w)^{\lambda(y)}w^{-\lambda(y)}\sigma(y)w = \sigma'(x)^{\lambda(y)}\sigma'(y). \end{aligned}$$

Отображение σ', определенное выше, будет обозначаться через $\sigma \cdot \sigma_w$. В этом контексте знак $\cdot$ ассоциативен. Отметим также, что $\sigma \cdot \sigma_w \cdot \sigma_{w_1} = \sigma \cdot \sigma_{ww_1}$, в частности, внутренние дифференцирования из G в I образуют группу. Это позволяет назвать два коцикла σ и σ' *гомологичными*, если $\sigma \cdot \sigma_w = \sigma'$ для некоторого $w \in I$. Коцикл, гомологичный кограницe, называется *тривиальным*.

1.4.1. Расщепляемые расширения. Пусть группа $\Gamma = \Lambda \cdot I$ — расщепляемое расширение своей нормальной подгруппы I с помощью подгруппы Λ. Возьмем в Γ некоторую подгруппу G. Тогда для каждого $g \in G$ найдутся однозначно определенные элементы $\lambda(g) \in \Lambda$ и $\sigma(g) \in I$ со свойством $g = \lambda(g)\sigma(g)$.

Отображение $\lambda : G \to \Lambda$ является гомоморфизмом, а $\sigma : G \to I$ — коциклом. При этом считаем, что $w^{\lambda(g)} = \lambda(g)^{-1} w \lambda(g)$ для $w \in I$, $g \in G$. Если рассмотреть подгруппу $G^w = w^{-1} G w$, то этой подгруппе соответствуют «тот же» (в том смысле, что $\lambda(g^w) = \lambda(g)$) гомоморфизм λ и гомологичный σ коцикл $\sigma \cdot \sigma_w$, поскольку $g^w = w^{-1}(\lambda(g)\sigma(g))w = \lambda(g) w^{-\lambda(g)} \sigma(g) w = \lambda(g)(\sigma \cdot \sigma_w)(g)$. Поэтому сопряженным подгруппам соответствуют гомологичные коциклы.

2. Подгруппа в $\operatorname{Aut} F_r$, изоморфная подгруппе $\mathbb{C}^*$ и не сопряженная с подгруппой линейных автоморфизмов. Приведем пример для случая $r = 3$. Для произвольного r подходят те же соображения.

2.1. Пусть n — натуральное число. В группе $\mathbb{C}^*$ возьмем подгруппу C_n чисел вида

$$\exp(2^{1-n}\pi m \mathbf{i}) \quad (m \in \mathbb{Z},\ \mathbf{i}^2 = -1).$$

Образ группы C_n относительно вложения в $\operatorname{Aut} F_3$, сопоставляющего элементу $\zeta \in C_n$ элемент $\lambda_\zeta = (\zeta x_1, \zeta x_2, \zeta x_3) \in \operatorname{Aut} F_3$, обозначим через G_n. Группы G_n $(n > 0)$ образуют возрастающую последовательность. Положим $G = \bigcup\limits_{n>0} G_n$.

2.2. В алгебре Ли F_3 возьмем такие элементы c_i $(i > 0)$, что

$$c_1 = [x_2, x_3], \quad c_{i+1} = [c_i, x_3] \quad (i \geq 1).$$

Автоморфизм $w_i = (x_1 + c_i, x_2, x_3)$ обладает следующим свойством:

$$w_i^{\lambda_\zeta} = (x_1 + \zeta^i c_i, x_2, x_3).$$

Из этого равенства следует, что

2.2.1. $w_{2^n}^{G_k} = w_{2^n}$, если $n \geq k$;

2.2.2. При $n < k$ группа G_k не централизует w_{2^n}.

2.3. Рассмотрим пару (не имеющих самостоятельного смысла) произведений:

$$w = \prod_{n=\infty}^{1} w_{2^n}, \quad w^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} w_{2^n}^{-1},$$

из которых первое бесконечно влево, а второе — вправо. Из п. 2.2.1 следует, что для каждого $g \in G$ найдется такое натуральное число b, что при всех $n > b$ элементы w_{2^n} и $w_{2^n}^g$ совпадают. Поэтому можно дать корректное (не зависящее от b) определение коммутатора $(g, w) = w^{-g} w \in I_3$. А именно, пусть m — наименьшее натуральное число с тем свойством, что при $n > m$ выполнено равенство $w_{2^n} = w_{2^n}^g$ (2.2.1). Пусть

$$w_g = \prod_{n=m}^{1} w_{2^n}.$$

Тогда искомое определение таково: $(g, w) = (g, w_g)$.

Функция $\sigma : G \to I_3$, заданная правилом $\sigma(g) = (g, w)$, является 1-коциклом, потому что для всех $n > 0$ ограничение $\sigma|_{G_n}$ является внутренним дифференцированием при помощи некоторого элемента группы I_3. Следовательно, множество $G_1 = \{g\sigma(g) : g \in G\}$ есть подгруппа, изоморфная G.

2.4. Коцикл σ не является тривиальным. Действительно, для подходящего $g \in G$ элемент $x_1\sigma(g)$ алгебры F_3 может иметь как угодно большую степень (2.2.2); в то же время для каждого $\tau \in I_3$ степень элемента $x_1(g, \tau) \in F_3$ не превосходит квадрата наибольшей из степеней элементов $x_1\tau$, $x_2\tau$, $x_3\tau$.

Тем самым группа G_1 изоморфна подгруппе $\mathbb{C}^*$, но (1.4.2, 2.4) не сопряжена ни с какой подгруппой линейных автоморфизмов.

3. Вопросы.

3.1. Для λ-1-коцикла $\sigma : G \to I_r$, $g \in G$ и $w \in I_r$ выполнено сравнение

$$(\sigma \cdot \sigma_w)(g) = w^{-\lambda(g)}\sigma(g)w = (\lambda(g), w)(w, \sigma(g)^{-1})\sigma(g) \equiv (\lambda(g), w)\sigma(g) \bmod (I_r, I_r).$$

Поэтому естественный гомоморфизм группы I_r на $H_1(I_r) = I_r/(I_r, I_r)$ определяет отображение p множества λ-1-коциклов в группу (настоящих когомологий) $H^1(G, H_1(I_r))$.

3.1.1. Является ли образ коцикла σ из п. 2.3 под действием p тривиальным? Является ли p сюръективным?

3.2. Вложение бесконечной группы G в $\operatorname{Aut} F_r$ назовем *ограниченным*, если множество

$$\{x_i\sigma(g) : g \in G,\ 1 \le i \le r\} \subset F_r$$

имеет конечномерную линейную оболочку. Если подгруппа группы $\operatorname{Aut} F_r$ сопряжена с линейной, то она ограниченно вложена.

3.2.1. Верно ли, что ограниченно вложенные группы сопряжены с подгруппами линейных автоморфизмов?

3.3. Можно ли построить неограниченные вложения групп $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}+\mathbf{i}\mathbb{Z}}$ в $\operatorname{Aut} F_3$ (K равно $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)?

3.4. Как с точки зрения сопряженности с подгруппой линейных автоморфизмов компактная группа Ли может быть вложена в $\operatorname{Aut} F_r$ (K равно $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cohn P. M.* Subalgebras of free associative algebras // Proc. London Math. Soc. 1964. V. 56. P. 618–632.
2. *Umirbaev U. U.* Defining relations for automorphism groups of free algebras // J. Algebra. 2007. V. 314, N 1. P. 209–225.
3. *Шевелин М. А.* Неабелевы 1-когомологии и сопряженность конечных подгрупп в некоторых расширениях // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1166–1177.

Статья поступила 1 сентября 2013 г.

Шевелин Михаил Александрович

`shma2001@gmail.com`