*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6*

*УДК 517.172.4*

# К ВОПРОСУ О ПРЕДСТАВИМОСТИ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В ВИДЕ РАЗНОСТИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

**И. М. Прудников**

**Аннотация.** Приведены необходимые и достаточные условия представимости произвольной функции двух переменных в виде разности выпуклых функций. Дана геометрическая интерпретация этих условий. Приведен алгоритм такого представления, результатом которого является равномерно сходящаяся последовательность выпуклых функций.

**Ключевые слова:** липшицева функция, выпуклая функция, вариация функции, кривизна кривой, поворот кривой.

## 1. Введение

Проблема представимости произвольной функции двух переменных в виде разности выпуклых функций впервые сформулирована академиком А. Д. Александровым в [1] и исследовалась многими российскими и зарубежными математиками [2–7]. Решение этой проблемы интересно как для геометров, так и для математиков, занимающихся оптимизацией, например для построения квазидифференциального исчисления [8].

Необходимые и достаточные условия представимости функции одной переменной в виде разности выпуклых (о такой функции говорят как о ПРВ-функции) хорошо известны. Эти условия могут быть записаны в следующем виде.

Пусть $x \to f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ — произвольная липшицева функция. Известно, что множество $N_f$, на котором функция $f(\cdot)$ дифференцируема, есть множество полной меры на $[a, b]$. Для того чтобы функция $f(\cdot)$ была представима в виде разности выпуклых функций, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\vee(f'; a, b) < \infty,$$

где производные вычисляются там, где они существуют. Символ $\vee$ означает вариацию функции $f'$ на отрезке $[a, b]$.

В [1] А. Д. Александров задает вопрос о представимости функции в виде разности выпуклых, если она является таковой для любой прямой в области определения. Ответ на этот вопрос отрицательный (см. [3, 4]).

Согласно терминологии А. Д. Александрова под многогранной кусочно линейной функцией с конечным числом граней будем понимать такую функцию, график которой состоит из конечного числа частей плоскостей, которые называются *гранями*.

© 2014 Прудников И. М.

В [5] даны необходимые и достаточные условия представимости произвольной липшицевой положительно однородной функции трех переменных в виде разности выпуклых функций. Результат может быть распространен на положительно однородные функции $m$-й степени. Теперь откажемся от условия положительной однородности и будем рассматривать произвольную липшицеву функцию $f(\cdot)$ с константой Липшица $L$ от двух переменных $(x, y) \to f(x, y) : D \to \mathbb{R}$, где $D$ — выпуклое открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^2$, так что его замыкание $\overline{D}$ — компакт. Приведем алгоритм такого представления и найдем необходимые и достаточные условия сходимости построенной последовательности функций.

Пусть $\wp(D)$ — класс кривых на плоскости $XOY$ в множестве $D$, ограничивающих выпуклые компактные множества. Параметризуем кривые $r \in \wp(D)$ естественным образом, т. е. параметр $\tau$ точки $M$ на кривой $r(\cdot)$ равен длине кривой между M и начальной точкой. Обозначим такую кривую через $r(t)$, $t \in [0, T_r]$.

С помощью кривых $r \in \wp(D)$ необходимые и достаточные условия представимости функции $f(\cdot)$ в виде разности выпуклых функций могут быть записаны в следующем виде.

**Теорема 1.** *Для того чтобы липшицева функция $z \to f(z) : D \to \mathbb{R}$ была представима в виде разности выпуклых функций, необходимо и достаточно, чтобы*

$$(\exists c(D, f) > 0)\, (\forall r \in \wp(D)) \quad \vee (\Phi'; 0, T_r) < c(D, f),$$

*где* $\Phi(t) = f(r(t))$, $t \in [0, T_r]$.

Доказательство основано на специальном алгоритме представления функции $f(\cdot)$ в виде разности выпуклых функций. В результате получаем конечные или бесконечные последовательности выпуклых функций, равномерно сходящиеся на $D$ к выпуклым функциям, разность которых есть исходная функция $f(\cdot)$, если условия теоремы 1 выполняются.

Ниже приведен алгоритм представления функции $f(\cdot)$ в виде разности выпуклых функций и доказана его сходимость, если условия теоремы 1 выполняются.

Для представления функции $f(\cdot)$ в виде разности выпуклых функций будем использовать две операции, в результате которых получаем конечное или счетное число выпуклых многогранных кусочно линейных функций, определенных на $D$.

Первая операция — это приближение функции $f(\cdot)$ многогранной кусочно линейной функцией $f_n(\cdot)$ с конечным числом граней.

Вторая операция — это представление функции $f_n(\cdot)$ в виде разности выпуклых многогранных кусочно линейных функций $f_{1,n}(\cdot) : D \to \mathbb{R}$ и $f_{2,n}(\cdot) : D \to \mathbb{R}$ согласно алгоритму, описанному ниже.

Далее доказывается, что если выполняются условия теоремы 1, то из последовательностей $f_{1,n}(\cdot) - c_{1,n}$ и $f_{2,n}(\cdot) - c_{1,n}$, где $c_{1,n} = f_{1,n}(a)$, $a$ — произвольная внутренняя точка области $D$, можно выбрать сходящиеся подпоследовательности.

Как будет показано, при выполнении условий теоремы вариация производной вдоль любого отрезка множества $D$ выпуклых функций $f_{1,n}(\cdot)$ и $f_{2,n}(\cdot)$ ограничена сверху константой, зависящей от $D$ и $f$.

Метод представления конечной многогранной функции подобен методу, использованному А. Д. Александровым в [1] при исследовании возможности представления специального вида функций в виде разности выпуклых.

## 2. Доказательство теоремы

Начнем доказательство теоремы с описания алгоритма.

Описание алгоритма.

1. Производим достаточно равномерную триангуляцию области $D$ и строим по каждому треугольнику линейную функцию, значения которой равны значениям функции $f(\cdot)$ в вершинах треугольника. Функцию с получившимся графиком обозначим через $f_n(\cdot) : D \to \mathbb{R}$, где $n$ равно числу треугольников, на которые разбиваем область $D$.

2. Представляем функцию $f_n(\cdot)$ в виде разности выпуклых согласно алгоритму, как описано ниже.

Предварительно введем понятие двугранного угла. Будем понимать под *двугранным углом* функцию, определенную на $D$, график которой состоит из полуплоскостей с общей граничной прямой, называемой *ребром* двугранного угла.

Рассмотрим все выпуклые двугранные углы, части графиков которых принадлежат графику функции $f_n(\cdot)$. Определяем эти двугранные углы на всей области $D$. Просуммируем все такие выпуклые двугранные углы. В итоге получим выпуклую многогранную функцию $f_{1,n}(\cdot) : D \to \mathbb{R}$. Доказывается [1], что разность

$$f_{1,n}(\cdot) - f_n(\cdot) = f_{2,n}(\cdot) \qquad (1)$$

есть также выпуклая многогранная функция.

Действительно, для доказательства достаточно показать, что все двугранные углы, части графиков которых принадлежат графику функции $f_{1,n}(\cdot) - f_n(\cdot)$, выпуклые. Для этого покажем, что любая точка, лежащая на проекции ребра произвольного двугранного угла функции $f_{1,n}(\cdot) - f_n(\cdot)$, имеет малую окрестность, где функция $f_{1,n}(\cdot) - f_n(\cdot)$ выпукла.

Если берем точку, в малой окрестности которой функция $f_n(\cdot)$ линейна, то локальная выпуклость разности $f_{1,n}(\cdot) - f_n(\cdot)$ очевидна. Пусть взята точка, лежащая на проекции на плоскость ребра выпуклого двугранного угла, часть графика которого принадлежит графику функции $f_n(\cdot)$. Поскольку согласно алгоритму этот же двугранный угол входит в сумму выпуклых двугранных углов, образующих функцию $f_{1,n}(\cdot)$, разность $f_{1,n}(\cdot) - f_n(\cdot)$ будет локально выпуклой в окрестности рассматриваемой точки. Если же точка лежит на проекции ребра вогнутого двугранного угла, часть графика которого принадлежит графику функции $f_n(\cdot)$, то $-f_n(\cdot)$ локально выпукла в окрестности этой точки, поэтому разность $f_{1,n}(\cdot) - f_n(\cdot)$ снова локально выпукла в той же окрестности. Из локальной выпуклости всех двугранных углов функции $f_{1,n}(\cdot) - f_n(\cdot)$ следует ее выпуклость на всем множестве $D$.

Покажем, что при выполнении теоремы 1 из последовательности функций $f_{1,n}(\cdot) - c_{1,n}$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на $D$ к выпуклой функции $f_1(\cdot)$ при $n \to +\infty$. Тогда из (1) следует, что подпоследовательность функций $f_{2,n}(\cdot) - c_{1,n}$ также равномерно сходится к выпуклой функции $f_2(\cdot)$. Для функций $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$ верно равенство

$$f_1(\cdot) - f_2(\cdot) = f(\cdot). \qquad (2)$$

Начнем доказательство с одномерного случая, когда $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Приблизим функцию $f(\cdot)$ кусочно линейной функцией $f_n(\cdot)$ с любой степенью точности. На первом шаге выделяем все выпуклые двугранные углы, части графиков которых принадлежат графику функции $f_n(\cdot)$. Распространяем их на весь отрезок $[a, b]$ и просуммируем. В итоге получим выпуклую кусочно линейную функцию $f_{1,n}(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}$. Согласно сказанному выше разность $f_{1,n}(\cdot) - f_n(\cdot)$ есть снова выпуклая кусочно линейная функция на $[a, b]$.

Покажем, что вариация производных функций $f_{1,n}(\cdot)$ и $f_{2,n}(\cdot)$ на отрезке $[a, b]$ ограничена сверху той же константой $c$, что и вариация производной функции $f(\cdot)$, т. е.

$$\vee(f'_{1,n}; a, b) \leq c.$$

Последнее следует из цепочки неравенств

$$\vee(f'_{1,n}; a, b) \leq \vee(f'_n; a, b) \leq \vee(f'; a, b) \leq c.$$

Но тогда из $f_{1,n}(\cdot)$ можно вычесть константу $c_{1,n} = f_{1,n}(a)$, $a \in \operatorname{int} D$, чтобы функции $f_{1,n}(\cdot) - c_{1,n}$ были ограниченными на отрезке $[a, b]$ в совокупности по $n$, т. е. равностепенно ограниченными. Из оценки для вариации производной, не зависящей от $n$, следует равностепенная непрерывность функций $f_{1,n}(\cdot) - c_{1,n}$. По теореме Арцела из последовательности выпуклых функций $f_{1,n}(\cdot) - c_{1,n}$ можно выделить подпоследовательность функций $f_{1,n_k}(\cdot) - c_{1,n_k}$, которая сходится равномерно при $n_k \to \infty$ к некоторой выпуклой на $[a, b]$ функции $f_1(\cdot)$. Соответственно последовательность функций $f_{2,n_k}(\cdot) - c_{1,n_k}$ также равномерно на $[a, b]$ сходится при $n_k \to \infty$ к некоторой выпуклой на $[a, b]$ функции $f_2(\cdot)$. В итоге имеем

$$f(\cdot) = f_1(\cdot) - f_2(\cdot).$$

Перейдем к двумерному случаю и покажем, что тот же алгоритм приводит к паре выпуклых функций на $D$, разность которых есть исходная функция $f(\cdot)$.

Возьмем произвольную кривую $r(\cdot) \in \wp(D)$. Пусть

$$\Phi(t) = f(r(t)), \quad t \in [0, T_r].$$

Покажем, что $\Phi(\cdot)$ липшицева с константой $L$. Действительно, для любых $t_1, t_2 \in [0, T_r]$ имеем

$$|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)| = |f(r(t_1)) - f(r(t_2))| \leq L\|r(t_1) - r(t_2)\| \leq L|t_1 - t_2|.$$

Поэтому [9] $\Phi(\cdot)$ почти всюду дифференцируема на $[0, T_r]$. Множество точек дифференцируемости функции $\Phi(\cdot)$ на $[0, T_r]$ обозначим через $N_r$.

Докажем, что если существует константа $c(D) > 0$ такая, что для произвольной кривой $r(\cdot) \in \wp(D)$

$$\vee(\Phi'; 0, T_r) < c(D), \tag{3}$$

то из последовательностей функций $f_{1,n}(\cdot) - c_{1,n}$, $f_{2,n}(\cdot) - c_{1,n}$ можно выбрать подпоследовательности, равномерно на $D$ сходящиеся к выпуклым функциям $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ соответственно, для которых верно равенство (2).

Доказательство будем основывать на леммах, приведенных ниже.

**Лемма 1.** *Для любой выпуклой положительно однородной степени* 1 *функции* $q \to \psi(q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *и любой кривой* $r(\cdot) \in \wp(D)$ *верно неравенство*

$$\vee(\Theta'; 0, T_r) < c_1(D, \psi),$$

*где* $\Theta(t) = \psi(r(t))$ *для всех* $t \in [0, T_r], c_1(D, \psi)$ — *некоторая константа.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\psi(\cdot)$ есть гладкая функция на $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. Пусть

$$\psi(r(t)) = \max_{v \in \partial\psi(0)} (v, r(t)) = (v(t), r(t)), \quad v(t) \in \partial\psi(0),$$

где $\partial\psi(0)$ — субдифференциал функции $\psi(\cdot)$ в нуле. Будем также считать, что $r(\cdot)$ — дифференцируемая по $t \in [0, T_r]$ кривая.

Очевидно, что

$$\psi'(r(t)) = (v'(t), r(t)) + (v(t), r'(t)).$$

Так как $r(t)$ — нормаль к границе множества $\partial\psi(0)$ в точке $v(t)$, векторы $v'(t)$ и $r(t)$ перпендикулярны друг другу, а следовательно, $(v'(t), r(t)) = 0$. Поскольку кривая $r(\cdot)$ параметризована естественным образом, $\|r'(t)\| = 1$ для любых $t \in [0, T_r]$.

Нетрудно проверить следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} |\psi'(r(t_1)) - \psi'(r(t_2))| = |(v(t_1), r'(t_1)) - (v(t_2), r'(t_2))| = |(v(t_1) - v(t_2), r'(t_1)) \\ + (v(t_2), r'(t_1)) - (v(t_2), r'(t_2))| \leq \|v(t_1) - v(t_2)\| \|r'(t_1)\| + \|r'(t_1) - r'(t_2)\| \|v(t_2\| \\ \leq \|v(t_1) - v(t_2)\| + L(D)|t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\vee(\Theta'; 0, T_r) < 2P(\partial\psi(0)) + L(D)T_r,$$

где $P(\psi(0))$ — длина кривой, ограничивающей выпуклое компактное множество $\partial\psi(0) \subset \mathbb{R}^2$, и $L(D)$ — константа Липшица функции $\psi(\cdot)$.

Пусть $\psi(\cdot)$ — произвольная выпуклая положительно однородная функция. С любой степенью точности ее можно приблизить на единичном круге выпуклой положительно однородной дифференцируемой на $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ функцией $\hat{\psi}(\cdot)$ так, чтобы в метрике Хаусдорфа субдифференциалы в нуле этих функций отличались друг от друга как угодно мало. Но тогда и длины кривых, ограничивающих их субдифференциалы, будут отличаться друг от друга как угодно мало. Также кривую $r(\cdot)$ можно приблизить дифференцируемой кривой таким образом, чтобы их производные по $t$ в точках дифференцируемости кривой $r(\cdot)$ отличались друг от друга по норме на произвольно малую величину. Таким образом, любые конечные суммы, используемые при вычислении вариаций функций $\Theta'(\cdot)$ и $\widehat{\Theta}'(\cdot)$ для негладкого и гладкого случая, могут быть сделаны за счет приближения как угодно близкими друг другу. Но поскольку вариацию функции $\widehat{\Theta}'(\cdot)$ можно ограничить сверху величиной, зависящей только от множества $D$ и некоторых констант, лемма 1 доказана. $\square$

На основе этой леммы докажем следующее утверждение (см., например, [10, 4]).

**Лемма 2.** *Пусть* $(x, y) \to f_1(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — *непрерывная выпуклая функция и* $r(\cdot) \in \wp(D)$, $t \in [0, T_r]$. *Тогда существует константа* $c_2(D, f_1) > 0$ *такая, что*

$$\vee(\Phi_1'; 0, T_r) \leq c_2(D, f_1), \tag{4}$$

где $\Phi_1(t) = f_1(r(t))$, $t \in [0, T_r]$.

Доказательство. На начальном этапе будем считать, что $f_1(\cdot,\cdot)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на $D$, которая принимает неотрицательные значения, и начало координат — ее точка минимума, а также что $0 = (0,0)$ принадлежит внутренности выпуклой области на $\mathbb{R}^2$ с границей $r(\cdot)$.

Построим для функции $f_1(\cdot,\cdot)$ положительно однородную степени 1 функцию $\psi(\cdot)$, которая на $r(\cdot)$ принимает значения, равные $f_1(r(\cdot))$. Покажем, что $\psi(\cdot)$ выпуклая.

Рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(x,y) = f_1(x,y) + \varepsilon(\|x\|^2 + \|y\|), \quad \varepsilon > 0.$$

Разобьем отрезок $[0, T_r]$ точками $\{t_i\}$, $i \in 1 : J$, на равные отрезки. Построим плоскости $\pi_i$ в $\mathbb{R}^3$, проходящие соответственно через точки $(0,0,0)$, $(r(t_i), f_\varepsilon(r(t_i)))$, $(r(t_{i+1}), f_\varepsilon(r(t_{i+1})))$, $i \in 1 : J$. Части плоскостей $\pi_i$, $i \in 1 : J$, определенных в секторах, образуемых векторами $(0,0)$, $r(t_i)$, $r(t_{i+1})$, определяют график положительно однородной степени 1 многогранной функции $(\psi_\varepsilon)_J(r(\cdot))$. Будем понимать под двугранным углом функцию, график которой состоит из полуплоскостей с общей граничной прямой, включающих плоскости $\pi_i$, построенные в соседних секторах. Покажем, что все двугранные углы функции $(\psi_\varepsilon)_J(r(\cdot))$, образуемые смежными плоскостями $\pi_i$, $i \in J$, выпуклые.

Поскольку любую кривую $r(\cdot) \in \wp(D)$ можно приблизить с любой степенью точности гладкой кривой из $\wp(D)$, без ограничения общности будем считать, что $r(\cdot)$ — гладкая дифференцируемая кривая с производной $r'(\cdot)$.

Под градиентом плоскости $\pi_i$ будем понимать градиент линейной функции, график которой совпадает с плоскостью $\pi_i$. Обозначим градиенты плоскостей $\pi_i$ и $\pi_{i+1}$ через $\nabla\pi_i$ и $\nabla\pi_{i+1}$ соответственно. Воспользуемся теоремой о средней точке, согласно которой существует такая точка $t_m \in [t_i, t_{i+1}]$, что

$$\partial f_\varepsilon(r(t_m))/\partial e_i = (\nabla\pi_i, e_i),$$

где $e_i = (r(t_{i+1}) - r(t_i))/\|r(t_{i+1}) - r(t_i)\|$. Аналогично для плоскости $\pi_{i+1}$ и некоторой точки $t_c \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$ имеем

$$\partial f_\varepsilon(r(t_c))/\partial e_{i+1} = (\nabla\pi_{i+1}, e_{i+1}),$$

где

$$e_{i+1} = (r(t_{i+2}) - r(t_{i+1}))/\|r(t_{i+2}) - r(t_{i+1})\|.$$

Функция $f_\varepsilon(\cdot)$ сильно выпуклая, так как ее матрица вторых частных производных положительно определенная. Любая выпуклая функция имеет неубывающую производную по направлению вдоль произвольного луча. Но для сильно выпуклой функции производная по касательному направлению к кривой вида $r(x_0, \tau, g) = x_0 + \tau g + o_\varepsilon(\tau)$, $g \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$, в малой окрестности точки $x_0$ есть возрастающая функция вдоль этой кривой. Поэтому при достаточно большом $J$ и равномерном разбиении кривой $r(\cdot)$ точками $t_i$ имеем

$$\partial f_\varepsilon(r(t_m))/\partial e_i < \partial f_\varepsilon(r(t_c))/\partial e_{i+1},$$

или

$$(\nabla\pi_i, e_i) < (\nabla\pi_{i+1}, e_{i+1}).$$

Учтем также, что разность $\nabla\pi_{i+1} - \nabla\pi_i$ перпендикулярна вектору $r(t_{i+1})$. Отсюда и из неравенства выше следует, что двугранный угол $\pi_i, \pi_{i+1}$ выпуклый. При $J \to \infty$

$$(\psi_\varepsilon)_J(\cdot) \rightrightarrows (\psi_\varepsilon)(\cdot).$$

Так как точечный предел для выпуклых функций равносилен равномерному пределу, $\psi_\varepsilon(\cdot)$ — выпуклая функция. Также $\psi_\varepsilon(\cdot) \rightrightarrows \psi(\cdot)$ при $\varepsilon \to +0$, т. е. $\psi(\cdot)$ выпуклая, что и требовалось доказать.

Очевидно, что градиенты линейных функций, графики которых суть $\pi_i$, $i \in J$, ограничены константой, зависящей только от множества $D$ и самой функции $f_1(\cdot,\cdot)$. Верно равенство

$$\psi(r(t)) = f_1(r(t)), \quad t \in [0, T_r].$$

Ясно, что $\psi(\cdot,\cdot)$ строится однозначно по функции $f_1(\cdot,\cdot)$ и выбранной кривой $r(\cdot)$. Из сказанного выше следует, что функция $\psi(\cdot,\cdot)$ липшицева с константой $L(D,f)$.

Пусть

$$\Psi_1(t) = \psi(r(t)), \quad t \in [0, T_r].$$

Поскольку

$$\vee(\Phi_1'; 0, T_r) = \vee(\Psi_1'; 0, T_r),$$

из леммы 1 следует, что

$$\vee(\Phi_1'; 0, T_r) \le c_2(D).$$

Если функция $f_1(\cdot,\cdot)$ не дважды непрерывно дифференцируемая, то ее можно приблизить выпуклой дважды непрерывно дифференцируемой функцией $\tilde f_1(\cdot,\cdot)$ и построить соответствующую ей функцию $\tilde\psi(\cdot,\cdot)$ так, чтобы значения функций $\psi(\cdot,\cdot)$, $\tilde\psi(\cdot,\cdot)$ и их производных там, где они существуют, как угодно мало отличались друг от друга. Но тогда аналогичное будет верно для функций $\Psi_1(\cdot)$, $\widetilde\Psi_1(\cdot)$, построенных по $\psi(\cdot,\cdot), \tilde\psi(\cdot,\cdot)$ соответственно, и их производных. Значит, написанное выше неравенство для вариации производных функции $\Psi_1(\cdot)$ верно для общего случая. Лемма 2 доказана. □

Из леммы 2 следует, что если $f(\cdot,\cdot)$ представима в виде разности выпуклых функций, т. е.

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z), \quad z \in D,$$

где $f_i(\cdot,\cdot)$, $i = 1, 2$, выпуклые, то условие (3) с необходимостью выполняется. Действительно, для произвольной $r(\cdot) \in \wp(D)$ введем обозначения

$$\Psi_1(t) = f_1(r(t)), \quad \Psi_2(t) = f_2(r(t)), \quad t \in [0, T_r].$$

Поскольку [9]

$$\vee(\Phi'; 0, T_r) \le \vee(\Phi_1'; 0, T_r) + \vee(\Phi_2'; 0, T_r),$$

принимая во внимание неравенство (4), получаем, что неравенство (3) с необходимостью выполняется.

Докажем достаточность условия (3) для представления функции $f(\cdot)$ в виде разности выпуклых функций.

Прежде всего покажем, что для любого $r(\cdot) \in \wp(D)$ верно неравенство

$$\vee(\Phi_n'; 0, T_r) \le c,$$

где $\Phi_n(t) = f_n(r(t))$. Действительно, для любой триангуляции области $D$ градиенты в точках $r(t_k) \in r(\cdot)$, $t_k \in [0, T_r]$, линейных функций, графики которых суть грани функции $f_n(\cdot)$, будут с любой степенью точности $\varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to +0$, близки к обобщенным градиентам функции $f(\cdot)$. Поэтому произвольная конечная сумма $\sum_{i=1}^{N} |\Phi_n(t_i) - \Phi_n(t_{i+1})|$ для больших $n$ будет как угодно мало отличаться от суммы $\sum_{i=1}^{N} |\Phi(t_i) - \Phi(t_{i+1})|$. Поскольку вариация функции $\Phi_n(\cdot)$ может только возрастать при вложенности триангуляций области $D$ с увеличением $n$, отсюда и из сказанного выше следует, что

$$\vee(\Phi_n'; 0, T_r) \leq \vee(\Phi'; 0, T_r) + \delta(n) \leq c, \tag{5}$$

где $\delta(n) \to +0$ при $n \to \infty$.

Вариация производных по направлению вдоль произвольного отрезка суммы выпуклых функций равна сумме вариаций производных этих выпуклых функций по тому же отрезку. Если будет доказано, что сумма вариаций производных всех выпуклых двугранных углов функции $f_n(\cdot)$ вдоль любого отрезка области $D$ ограничена сверху константой, не зависящей от $n$, то отсюда будет следовать, что ограничена сверху той же константой вариация производной функции $f_{1,n}(\cdot)$ вдоль произвольного отрезка области $D$. Отсюда вытекают равностепенная ограниченность и непрерывность функций $f_{1,n}(\cdot) - c_{1,n}$. Но тогда по теореме Арцела из последовательности $f_{1,n}(\cdot) - c_{1,n}$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на $D$ к выпуклой функции $f_1(\cdot)$. Соответствующая подпоследовательность последовательности $f_{2,n}(\cdot) - c_{1,n}$ будет стремиться к выпуклой функции $f_2(\cdot)$. Это означает, что $f(\cdot)$ — ПРВ-функция.

Пусть условия теоремы выполняются, но $f(\cdot)$ не ПРВ-функция. Проделаем следующую процедуру. Путем разбиения множества $D$ на выпуклые подобласти можно выделить ту подобласть, где функции $f_{1,n}(\cdot)$ имеют предельное бесконечное значение вариации производной вдоль некоторых отрезков этой подобласти при $n \to \infty$. Действительно, в противном случае из последовательности функции $f_{1,n}(\cdot) - c_{1,n}$ можно было бы выбрать сходящуюся подпоследовательность и $f(\cdot)$ была бы ПРВ-функцией.

Далее разбиваем выделенную подобласть на меньшие области и опять выделяем ту, где вариация производной функций $f_{1,n}(\cdot)$ вдоль некоторых отрезков не ограничена при $n \to \infty$. В итоге определяем точку $M$, в произвольной окрестности которой вариация производной функций $f_{1,n}(\cdot)$ вдоль некоторых отрезков не ограничена при $n \to \infty$. Без ограничения общности можно считать, что $M$— внутренняя точка множества $\overline{D}$, так как все получаемые в процессе применения алгоритма функции равномерно липшицевы и могут быть распространены во внешность множества $\overline{D}$.

Берем произвольную окрестность точки $M$ и разбиваем ее на конечное число секторов. Выбираем произвольный из них, где вариация производной функций $f_{1,n}(\cdot)$ вдоль некоторых отрезков не ограничена при $n \to \infty$. Далее выбранный сектор разбиваем на конечное число секторов и опять выбираем тот из них, где вариация производной функций $f_{1,n}(\cdot)$ вдоль некоторых отрезков не ограничена при $n \to \infty$, и т. д. Множество выбранных секторов стягивается к некоторому направлению, определяемому единичным вектором $l$ с вершиной в точке $M$. Очевидно, что в произвольном секторе $K$ с вершиной с точке $M$, содержащем вектор $\alpha l$ в $\operatorname{int} K$, $\alpha > 0$, вариация производной функций $f_{1,n}(\cdot)$ вдоль некоторых отрезков не ограничена при $n \to \infty$.

Возможны два случая:

(a) вариация производных функций $f_{1,n}(\cdot)$ по направлению $l$ не ограничена при $n \to \infty$;

(б) вариация производных функций $f_{1,n}(\cdot)$ по направлению $\eta$, перпендикулярном направлению $l$, не ограничена при $n \to \infty$.

Сказанное можно перефразировать следующим образом, а именно сумма вариаций производных выпуклых двугранных углов функции $f_n(\cdot)$ вдоль указанного направления не ограничена при $n \to \infty$.

Случай (а). Возьмем произвольный сектор $K$, содержащий вектор $\alpha l$ в $\operatorname{int} K$, $\alpha > 0$. Будем рассматривать выпуклые двугранные углы функций $f_{1,n}(\cdot)$ из конуса $K$ для всех $n$.

За счет равномерной липшицевости по $n$ всех двугранных углов функций $f_n(\cdot)$ вариации производных по направлению этих двугранных углов равномерно непрерывны относительно направления и $n$.

Для каждого выпуклого $k$-го двугранного угла функции $f_n(\cdot)$ выделим отрезок $v_{k,n}$, вариация производной вдоль которого для $k$-го двугранного угла максимальна и равна $a_{k,n}$. Ясно, что $v_{k,n}$ должен быть перпендикулярен проекции на плоскость $XOY$ линии раздела двух граней $k$-го двугранного угла.

Пусть угол наклона отрезков $v_{k,n}$ с направлением $l$ не превосходит $\pi/2 - \delta$ для некоторого $\delta > 0$.

Путем разбиения сектора $K$ на меньшие секторы, стягивающиеся к вектору $\alpha l$, и точку $M$ и рассмотрения в каждом из них своей группы отрезков $v_{k,n}$ для всех значений $k$ и $n$ можно выделить одну или несколько групп указанных отрезков, каждую из которых можно пересечь кривой $r(\cdot) \in \wp(D)$, образующей в точке пересечения с отрезками $v_{k,n}$ угол, не превосходящий $\pi/2 - \delta$, $\delta > 0$. Поскольку сектор $K$, содержащий вектор $\alpha l$, произвольный, можно рассматривать такие кривые, для которых $r'(t) \to -l$, когда $r(t) \to M$. Сама кривая $r(\cdot)$ будет включать в себя отрезки, близкие к отрезкам $v_{k,n}$.

Если для рассматриваемого случая подгруппа отрезков $\{v_{k,n}\}$ существует только одна, то вдоль найденной кривой $r(\cdot) \in \wp(D)$ вариация производной суммы выпуклых двугранных углов стремится к бесконечности при $n \to +\infty$.

Кривая $r(\cdot)$, как упоминалось, строится таким образом, чтобы она включала отрезки, близкие к отрезкам $\{v_{k,n}\}$. Так как при выполнении неравенства (3) выполняется неравенство (5), а мы нашли кривую $r(\cdot)$, вдоль которой сумма вариаций производных двугранных углов бесконечна, из (5) следует, что не ограничена вдоль $r(\cdot)$ вариация производной функции $\Phi(\cdot)$. Приходим к противоречию.

Кроме того, возможен случай, когда есть несколько групп отрезков $\{v_{k,n}\}_i$, для каждой из которых найдется такая кривая $r_i(\cdot) \in \wp(D)$, что

$$\vee(\Phi_n; 0, t_{r_i}) = c_i, \quad r_i'(t) \underset{t \to T_{r_i}}{\longrightarrow} -l,$$

где $t_{r_i}$ — параметр кривой $r_i(\cdot)$ при естественной параметризации в точке $M$, а также $\sum\limits_i c_i = \infty$. Тогда кривую $r(\cdot) \in \wp(D)$, вдоль которой сумма вариаций производных двугранных углов стремится к бесконечности при $n \to +\infty$, будем строить следующим образом.

Кривая $r(\cdot)$ должна содержать достаточное количество $k_i$ отрезков из каждой группы отрезков $\{v_{k,n}\}_i$ (либо близких к ним), чтобы

$$\vee(\Phi_n'; t_{r_i}, t_{r_{i+1}}) = c_i - \mu_i,$$

где $t_{r_i} > 0$ — значения параметра $t$ для $i$-й группы отрезков при естественной параметризации кривой $r_i(\cdot)$, $\mu_i < c_i$ — малые положительные числа, для которых $\sum\limits_i \mu_i < \infty$.

Нетрудно видеть, что такую кривую $r(\cdot)$ всегда можно построить. Она будет состоять из набора кривых $r_i(\cdot)$. Для этого надо осуществить плавный переход от одной кривой $r_i(\cdot)$ к кривой $r_{i+1}(\cdot)$, не выходя из множества $\wp(D)$. Поскольку $r_i'(t) \to -l$ при $t \to T_{r_i}$ для всех $i$, подобная процедура осуществима всегда. Тогда

$$\vee(\Phi_n'; 0, T_r) \geq \sum_i \vee(\Phi_n'; t_{r_i}, t_{r_{i+1}}) = \sum_i (c_i - \mu_i) = \sum_i c_i - \sum_i \mu_i = \infty.$$

При этом, как следует из (5), нарушается неравенство (3), которое по предположению достаточности условия теоремы верно. Опять приходим к противоречию.

Если вариация производной суммы выпуклых двугранных углов функции $f_n(\cdot)$ конечна вдоль направления, определяемого вектором $l$, при любом $n$, то для случая неограниченности при $n \to \infty$ вариации производной функции $f_{1,n}(\cdot)$ в произвольно малом секторе с вершиной $M$, содержащем вектор $\alpha l$, $\alpha > 0$, следует, что вариация производной суммы выпуклых двугранных углов функции $f_n(\cdot)$ бесконечна при $n \to \infty$ вдоль направления $\eta$.

Случай (б). Все отрезки $v_{k,n}$ можно разбить на такие группы $\{m\}$ отрезков, которые можно пересечь кривой $r_{m,n}(\cdot) \in \wp(D)$, для которой

$$r_{m,n}'(\tau) \to_{\tau \to T_{r_{m,n}}} -l,$$

где $T_{r_{m,n}}$ — параметр кривой $r_{m,n}(\cdot)$ при естественной параметризации в точке $M$, и кривизна кривой $r_{m,n}(\cdot)$ стремится к бесконечности при $\tau \to T_{r_{m,n}}$. Кривая $r_{m,n}(\cdot)$ пересекает свою группу отрезков под острыми углами $\alpha_{k_m}$ в точках $\tau_{k_m}$, причем $\alpha_{k_m} \to \pi/2$ при $\tau_{k_m} \to T_{r_{m,n}}$. Ясно, что сказанное всегда выполнимо и достигается путем разбиения множества всех отрезков $v_{k,n}$ на подмножества с требуемыми свойствами.

Кроме того, углы $\alpha_{k_m}$, кривые $r_{m,n}(\cdot)$ и группы отрезков $\{v_{k,n}\}_m$ можно выбрать такими, чтобы предел по $m$ вариаций производных функций $\Phi_n'(\cdot)$ вдоль кривых $r_{m,n}(\cdot)$ был равен бесконечности. В противном случае функции $f_n(\cdot)$ имели бы ограниченную вариацию вдоль направления $\eta$ при $n \to +\infty$ (см. замечание).

Построение кривых $r_{m,n}(\cdot)$ с неограниченно увеличивающейся кривизной в точке $M$, для которой

$$\lim_{m \to \infty,\, n \to \infty} \vee(\Phi_n'; 0, T_{r_{m,n}}) = \infty,$$

осуществляется аналогично случаю (а). Для этого надо построить кривую $r_{m,n}(\cdot) \in \wp(D)$ с описанными выше свойствами, состоящую из достаточного количества $k_{m,n}$ отрезков $\{v_{k,n}\}_m$ (либо близких к ним), такую, что

$$\vee(\Phi_n'; [t_{r_{m,n}}, t_{r_{m+1,n}}]) = c_{m,n}, \quad \lim_{m \to \infty,\, n \to \infty} c_{m,n} = \infty,$$

$k_{m,n} \to \infty$ при $m, n \to \infty$, $[t_{r_{m,n}}, t_{r_{m+1,n}}]$ — значение параметра $t$ для $m$-й группы отрезков при естественной параметризации кривой $r_{m,n}(\cdot)$. Такие кривые $r_{m,n}(\cdot)$ всегда можно построить. При $m, n \to \infty$ кривые $r_{m,n}$ будут пересекать под острыми углами все большее число указанных отрезков из произвольно малого сектора, содержащего вектор $\alpha l$, с вершиной в точке $M$. Кривизны кривых $r_{m,n}$ вблизи точки $M$ неограниченно увеличиваются при $m, n \to \infty$.

Тогда

$$\lim_{m\to\infty,\, n\to\infty} \vee(\Phi'_n; 0, T_{r_{m,n}}) \geq \lim_{m\to\infty,\, n\to\infty} c_{m,n} = \infty.$$

Отсюда и из (5) приходим к противоречию с (3).

Итак, доказано, что при выполнении условия теоремы сумма вариаций производных выпуклых двугранных углов функции $f_n(\cdot)$ вдоль любого отрезка области $D$ при $n \to \infty$ ограничена сверху константой, не зависящей от $n$. Отсюда, как отмечалось выше, следует, что $f(\cdot)$ — ПРВ-функция.

Теорема 1 доказана. □

Замечание 1. Рассуждения с выбором углов $\alpha_{k_m}$ и кривых $r_m(\cdot)$ аналогичны следующим. Пусть имеем расходящийся ряд $\sum\limits_i a_i = \infty$, $a_i > 0$ для любого $i$. Всегда можно выбрать монотонно убывающую по $i$ последовательность $\{\beta_i\}$, $\beta_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$, такую, что

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \beta_i a_i = \infty.$$

Здесь $a_i$ является аналогом вариации производной двугранного угла вдоль отрезка $v_i$, а $\beta_i$ — аналог косинуса угла, образуемого кривой $r_i$ с этим отрезком в точке пересечения.

### 3. Геометрическая интерпретация теоремы 1

Перефразируем теорему 1, придав ей более геометрический характер. Для этого введем понятие поворота кривой $r(\cdot)$ на графике $\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$.

Рассмотрим на $\Gamma_f$ кривую $R(t) = (r(t), f(r(t)))$, где $r(\cdot) \in \wp(D)$. Так как функция $f(\cdot,\cdot)$ липшицева, почти всюду на $[0, T_r]$ существует производная $R'(\cdot)$, которую обозначим через $\tau(\cdot) = R'(\cdot)$.

Определение 1. *Поворотом кривой $R(\cdot)$ на многообразии $\Gamma_f$* назовем величину

$$\sup_{\{t_i\}\subset N_r} \sum_i \|\tau(t_i)/\|\tau(t_i)\| - \tau(t_{i-1})/\|\tau(t_{i-1})\|\| = O_r.$$

Таким образом, поворот $O_r$ кривой $R(\cdot)$ есть верхняя грань суммы углов между касательными $\tau(t)$ для $t \in [0, T_r]$. Нетрудно видеть, что для плоской гладкой кривой, параметризованной естественным образом, величина $O_r$ равна интегралу $\int\limits_0^{T_r} |k(s)|\, ds$, где $k(s)$ — кривизна рассматриваемой кривой $r(\cdot)$ в точке $s \in [0, T_r]$, т. е. совпадает с обычным определением поворота кривой в точке [11].

**Теорема 2.** *Для того чтобы произвольная липшицева функция $z \to f(z) : D \to \mathbb{R}$ была ПРВ-функцией на выпуклом компактном множестве $D \in \mathbb{R}^2$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $r(\cdot) \in \wp(D)$ существовала константа $c_2(D,f) > 0$ такая, что поворот кривой $R(\cdot)$ на $\Gamma_f$ ограничен сверху константой $c_2(D,f) > 0$, т. е.*

$$O_r \leq c_2(D,f), \quad r \in \wp(D). \tag{6}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(\cdot,\cdot)$ — ПРВ-функция. Покажем, что справедливо неравенство (6). Воспользуемся неравенством, вытекающим из неравенства треугольника:

$$\|\tau(t_i)/\|\tau(t_i)\| - \tau(t_{i-1})/\|\tau(t_{i-1}\|\| \\ \leq \bigl\|r'(t_i)/\sqrt{1+{f'}_t^2(r(t_i))} - r'(t_{i-1})/\sqrt{1+{f'}_t^2(r(t_{i-1}))}\bigr\| \\ + \bigl|f'_t(r(t_i))/\sqrt{1+{f'}_t^2(r(t_i))} - f'_t(r(t_{i-1}))/\sqrt{1+{f'}_t^2(r(t_{i-1}))}\bigr|.$$

Так как $1 \leq \sqrt{1+{f'}_t^2(r(t_i))} \leq \sqrt{1+L^2}$ для всех $t_i \in [0,T_r]$, очевидно, существует такое $c_3 > 1$, для которого

$$\bigl\|r'(t_i)/\sqrt{1+{f'}_t^2(r(t_i))} - r'(t_{i-1})/\sqrt{1+{f'}_t^2(r(t_{i-1}))}\bigr\| \leq c_3\|r'(t_i) - r'(t_{i-1})\|. \quad (7)$$

Из свойств функции $\theta(x) = x/\sqrt{1+x^2}$ следует неравенство

$$\bigl|f'_t(r(t_i))/\sqrt{1+{f'}_t^2(r(t_i))} - f'_t(r(t_{i-1}))/\sqrt{1+{f'}_t^2(r(t_{i-1}))}\bigr| \leq |f'_t(r(t_i)) - f'_t(r(t_{i-1}))|. \quad (8)$$

Из (7) и (8) имеем

$$\sup_{\{t_i\}\in N_r}\sum_i \|\tau(t_i)/\|\tau(t_i)\| - \tau(t_{i-1})/\|\tau(t_{i-1})\|\| \leq c_3(\vee(\|r'\|;0,T_r) + \vee(\Phi';0,T_r)). \quad (9)$$

Так как по условию $f(\cdot,\cdot)$ — ПРВ-функция, согласно теореме 1

$$\vee(\Phi';0,T_r) \leq c_1(D),$$

откуда с учетом (9) следует неравенство (6). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть верно неравенство (6). Покажем, что $f(\cdot,\cdot)$ — ПРВ-функция. Воспользуемся неравенством

$$\|\tau(t_i)/\|\tau(t_i)\| - \tau(t_{i-1})/\|\tau(t_{i-1})\|\| \geq |f'_t(r(t_i))/\sqrt{1+f'_t(r(t_i))} \\ - f'_t(r(t_{i-1}))/\sqrt{1+{f'}_t^2(r(t_{i-1}))}. \quad (10)$$

Из свойств функции $\theta(x) = x/\sqrt{1+x^2}$ и из $\|f'(z)\| \leq L$ для всех $z \in D$, где производная существует, следует существование константы $c_4(L) > 0$, для которой

$$\bigl|f'_t(r(t_i))/\sqrt{1+{f'}_t^2(r(t_i))} - f'_t(r(t_{i-1}))/\sqrt{1+{f'}_t^2(r(t_{i-1}))}\bigr| \\ \geq c_4|f'_t(r(t_i)) - f'_t(r(t_{i-1}))|,$$

откуда с учетом (10) имеем

$$c_2 \geq \sup_{\{t_i\}\subset N_r}\sum_i \|\tau(t_i)/\|\tau(t_i)\| - \tau(t_{i-1})/\|\tau(t_{i-1})\|\| \geq c_4 \vee (\Phi';0,T_r).$$

Из теоремы 1 следует, что $f(\cdot)$ — ПРВ-функция. Достаточность доказана. □

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Александров А. Д.* О поверхностях, представимых в виде разности выпуклых функций // Изв. АН Каз.ССР. 1949. № 3. С. 3–20.
2. *Александров А. Д.* Поверхности, представимые в виде разности выпуклых функций // Докл. АН СССР. 1950. Т. 72, № 4. С. 513–616.
3. *Hiriart-Urruty J. B.* Generalized differentiability, duality and optimization for problems dealing with differences of convex functions // Convexity and duality in optimization (Groningen, 1984). Berlin; New York: Springer-Verl., 1985. P. 37–70. (Lect. Notes Econom. Math. Syst.; V. 256).
4. *Vesely L., Zajicek L.* Delta-convex mappings between Banach spaces and applications: Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.). 1989. V. 289.
5. *Прудников И. М.* Необходимые и достаточные условия представимости положительно однородной функции трех переменных в виде разности выпуклых функций // Изв. АН РАН. 1992. Т. 59, № 5. С. 1116–1128.
6. *Залгаллер В. А.* О представимости функции двух переменных в виде разности выпуклых функций // Вестн. ЛГУ. 1963. № 1. С. 44–45.
7. *Hartman P.* On functions representable as a difference of convex functions // Pacific J. Math. 1959. V. 9. P. 707–713.
8. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
9. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
10. *Alexandrov A. D., Reshetnyak Yu. G.* General theory of irregular curves. Amsterdam: Kluwer, 1989.
11. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974.

*Статья поступила 17 июня 2013 г., окончательный вариант — 10 мая 2014 г.*

Прудников Игорь Михайлович
Смоленский филиал Московского университета кооперации,
пр. Гагарина, 58, Смоленск 214018
pim_10@hotmail.com