Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6

УДК 512.542

КЛАССЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ ЦИКЛИЧЕСКИМИ ПРИМАРНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В. И. Мурашко

Аннотация. Для множества простых чисел π и наследственного гомоморфа $\mathfrak{H}$ исследуются свойства классов $v_\pi\mathfrak{H}$ ($v_\pi^*\mathfrak{H}$) конечных групп, у которых все циклические примарные π-подгруппы $\mathfrak{H}$-субнормальны (соответственно К-$\mathfrak{H}$-субнормальны). Установлено, что класс $v_\pi\mathfrak{F}$ является наследственной насыщенной формацией, если $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация. В частности, получены новые признаки p-нильпотентности и ϕ-дисперсивности конечных групп. В классе всех конечных разрешимых групп получена характеризация формаций Шеметкова.

Ключевые слова: конечная группа, циклическая примарная π-подгруппа, $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа, К-$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа, гомоморф, наследственная насыщенная формация.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Одним из важных понятий теории групп является понятие субнормальной подгруппы. В 1969 г. Хоукс [1] обобщил это понятие в классе разрешимых групп, предложив определение $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы для насыщенной формации $\mathfrak{F}$. В [2, гл. II, § 8] Л. А. Шеметков распространил понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности на произвольные группы. В 1978 г. Кегель [3] предложил еще одно обобщение субнормальности, введя понятие $\mathfrak{F}$-достижимой (в современной терминологии К-$\mathfrak{F}$-субнормальной) подгруппы для формации $\mathfrak{F}$. Подробно свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных и К-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп и их приложения рассмотрены в [4, 5].

Определение 1. Пусть $\mathfrak{H}$ — непустой гомоморф. Подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{H}$-субнормальной в G*, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G$ такая, что $H_i/\operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{H}$ для $i = 1, \dots, n$. Обозначаем $H\,\mathfrak{H}\text{-}sn\,G$.

Пусть $\mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп. Всякая $\mathfrak{N}$-субнормальная подгруппа субнормальна. Обратное утверждение неверно. Например, единичная подгруппа в знакопеременной группе степени 5 субнормальна, но не $\mathfrak{N}$-субнормальна. В классе всех разрешимых групп субнормальность подгруппы эквивалентна ее $\mathfrak{N}$-субнормальности.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{H}$ — непустой гомоморф. Подгруппа H группы G называется *К-$\mathfrak{H}$-субнормальной в G*, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \lhd H_i$, либо $H_i/\operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{H}$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Обозначаем H К-$\mathfrak{H}$-$sn\,G$.

Если $\mathfrak{H}$ состоит из единичных групп, то понятия К-$\mathfrak{H}$-субнормальной подгруппы и субнормальной подгруппы эквивалентны.

В настоящее время активно изучается следующий вопрос. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Что можно сказать о классе групп, у которых заданная система примарных подгрупп состоит из $\mathfrak{F}$-субнормальных (К-$\mathfrak{F}$-субнормальных) подгрупп?

В [6–10] исследовались группы, у которых каждая силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна (К-$\mathfrak{F}$-субнормальна). Изучению групп, у которых каждая примарная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна, посвящена работа [11].

Отметим еще одно обобщение субнормальности, предложенное в работе [12]. Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-*субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ является простым числом для $i = 1, \dots, n$.

Заметим, что всякая $\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа является $\mathbb{P}$-субнормальной, где $\mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп. В классе разрешимых групп $\mathbb{P}$-субнормальность совпадает с $\mathfrak{U}$-субнормальностью. В [12] введен и исследован класс $w\mathfrak{U}$ групп, у которых всякая силовская подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна. Отметим [12], что класс $w\mathfrak{U}$ является разрешимой наследственной насыщенной формацией. Для множества простых чисел π в [13] рассматривался класс $w_\pi\mathfrak{U}$ групп, у которых всякая силовская π-подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна.

В дальнейшем группу G будем называть *примарной*, если $|G| = p^\alpha$, где p — простое число, а α — целое неотрицательное число. Если $p \in \pi$, то G называется *примарной π-группой*. Под примарной π-группой, где $\pi = \varnothing$, будем понимать единичную группу.

В [14] В. Н. Княгина и В. С. Монахов ввели и изучали класс $\mathfrak{X}$ групп, у которых всякая циклическая примарная подгруппа является $\mathbb{P}$-субнормальной. Ими было показано, что $\mathfrak{X}$ является разрешимой наследственной насыщенной формацией. Отметим, что класс $\mathfrak{X}$ совпадает с классом групп, у которых каждая циклическая примарная подгруппа $\mathfrak{U}$-субнормальна.

Рассмотренные выше результаты приводят к следующей проблеме.

Проблема. *Пусть π — множество простых чисел и $\mathfrak{H}$ — гомоморф. Установить свойства класса групп, у которых любая циклическая примарная π-подгруппа $\mathfrak{H}$-субнормальна* (К-*$\mathfrak{H}$-субнормальна*).

Решению этой проблемы и посвящена настоящая работа.

Пусть π — множество простых чисел и $\mathfrak{H}$ — непустой гомоморф. Введем следующие классы групп:

(1) $v_\pi\mathfrak{H}$ — класс групп, у которых каждая циклическая примарная π-подгруппа $\mathfrak{H}$-субнормальна;

(2) $v^*_\pi\mathfrak{H}$ — класс групп, у которых каждая циклическая примарная π-подгруппа К-$\mathfrak{H}$-субнормальна.

В случае, когда π совпадает с множеством всех простых чисел $\mathbb{P}$, будем писать $v\mathfrak{H}$ и $v^*\mathfrak{H}$ вместо $v_\mathbb{P}\mathfrak{H}$ и $v^*_\mathbb{P}\mathfrak{H}$. Отметим, что $v^*\mathfrak{N} = v\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ и $v\mathfrak{U} = \mathfrak{X}$.

Базовые свойства классов $v_\pi\mathfrak{H}$ и $v^*_\pi\mathfrak{H}$ собраны в следующей теореме.

Теорема A. *Пусть $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{R}$ — наследственные гомоморфы и π — множество простых чисел. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\mathfrak{H} \subseteq v_\pi\mathfrak{H} \subseteq v^*_\pi\mathfrak{H}$ *и* $\mathfrak{N}_{\pi\cap\pi(\mathfrak{H})} \subseteq v_\pi\mathfrak{H}$;

(2) $v_\pi\mathfrak{H} = v_{\pi\cap\pi(\mathfrak{H})}\mathfrak{H}$ *и* $\pi(v_\pi\mathfrak{H}) = \pi(\mathfrak{H})$;

(3) $v_\pi\mathfrak{H}$ *и* $v^*_\pi\mathfrak{H}$ *— наследственные формации;*

(4) $v_\pi(v_\pi\mathfrak{H}) = v_\pi\mathfrak{H}$ *и* $v^*_\pi(v^*_\pi\mathfrak{H}) = v^*_\pi\mathfrak{H}$;
(5) $v_\pi\mathfrak{H} \subseteq v_\pi\mathfrak{R}$ *и* $v^*_\pi\mathfrak{H} \subseteq v^*_\pi\mathfrak{R}$.

Пусть $\mathfrak{K}$ — класс групп. Напомним, что $\mathrm{D}_0(\mathfrak{K}) = (G \mid \exists n : G = H_1 \times \dots \times H_n$, где $H_i \in \mathfrak{K}$ для $i = 1, \dots, n)$. Следующая теорема устанавливает связь между классами $v\mathfrak{H}$ и $v^*\mathfrak{H}$, когда $\pi = \mathbb{P}$.

Теорема B. *Пусть* $\mathfrak{H}$ *— наследственный гомоморф и* $\pi = \pi(\mathfrak{H})$. *Тогда* $v^*\mathfrak{H} = \mathrm{D}_0(v\mathfrak{H} \cup \mathfrak{N}_{\pi'})$.

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Теорема C. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— наследственная насыщенная формация и* π *— множество простых чисел. Тогда классы* $v_\pi\mathfrak{F}$ *и* $v^*\mathfrak{F}$ *также являются насыщенными формациями.*

Согласно известной теореме Гашюца — Любезедер — Шмида формация $\mathfrak{F}$ насыщенна тогда и только тогда, когда она локальна. Следующая теорема устанавливает максимальный внутренний локальный экран формации $v_\pi\mathfrak{F}$.

Теорема D. *Пусть* $\mathfrak{F} = LF(F)$ *— наследственная локальная формация и* F *— ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда* $v_\pi\mathfrak{F} = LF(H)$ *— локальная формация, где* H *— ее максимальный внутренний локальный экран и* $H(p) = (G \mid$ *все циклические примарные* π*-подгруппы* G *принадлежат* $F(p)$ *и* $\mathfrak{F}$*-субнормальны в* $G)$ *для любого* $p \in \mathbb{P}$.

Заметим, что если $F(p) = \varnothing$ для некоторого $p \in \mathbb{P}$, то $H(p) = \varnothing$.

Следствие D.1. *Пусть* $\mathfrak{F} = LF(f)$ *— наследственная локальная формация такая, что* $f(p)$ *содержит все абелевы группы для любого простого* p. *Тогда* $v_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{S}(v_\pi\mathfrak{F})$, *где* $\mathfrak{S}$ *— формация всех разрешимых групп.*

Следствие D.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— разрешимая наследственная формация. Если* $\mathfrak{F}$ *содержит все группы с нильпотентным коммутантом, то* $v_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{S}$.

Пусть $\mathfrak{A}(n)$ — формация всех абелевых групп экспоненты, делящей n. Известно, что формация всех сверхразрешимых групп обладает максимальным внутренним локальным экраном H, где $H(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Установим локальный экран формации $v\mathfrak{U} = \mathfrak{X}$ из [14].

Следствие D.3. *Формация* $v\mathfrak{U}$ *обладает максимальным внутренним локальным экраном* F, *где* $F(p) = (G \subseteq v\mathfrak{U} \mid$ *все циклические примарные* p'*-подгруппы* G *имеют экспоненту, делящую* $p-1)$ *для любого* $p \in \mathbb{P}$.

Известно, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда каждая ее циклическая примарная подгруппа $\mathfrak{N}$-субнормальна. С другой стороны, существуют примеры несверхразрешимых групп [14], у которых всякая циклическая примарная подгруппа $\mathfrak{U}$-субнормальна. В общем случае верна

Теорема E. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— наследственная насыщенная формация и* π *— множество простых чисел. Тогда и только тогда* $v_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, *когда для любой минимальной не* $\mathfrak{F}$*-группы* G *группа* $G/\widetilde{F}(G)$ *является циклической примарной* π*-группой.*

В случае, когда $\pi = \mathbb{P} \setminus \{p\}$, из теоремы E и предложения 5.4 в [15, гл. IV, § 5] вытекает

Следствие E.1. *Пусть p — простое число и $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда всякая циклическая примарная p'-подгруппа G $\mathfrak{F}$-субнормальна в ней.*

Из теорем B и E получаем

Следствие E.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация и $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$. Тогда и только тогда $v^*\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, когда для любой минимальной не $\mathfrak{F}$-группы G группа $G/\widetilde{F}(G)$ является циклической примарной группой.*

Напомним [4, разд. 2.4], что формация $\mathfrak{F}$ называется *формацией Шеметкова* (кратко $\check{S}$-формацией), если любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой простого порядка, либо группой Шмидта.

Следствие E.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация Шеметкова. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда всякая циклическая примарная подгруппа G $\mathfrak{F}$-субнормальна в ней.*

Известно, что формация всех ϕ-дисперсивных групп, где ϕ — фиксированное линейное упорядочение множества всех простых чисел, является формацией Шеметкова.

Следствие E.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех ϕ-дисперсивных групп. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда всякая циклическая примарная подгруппа G $\mathfrak{F}$-субнормальна в ней.*

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется *решеточной*, если для любой группы G множество всех ее $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп G. Согласно лемме 3.1.19 в [4] получаем

Следствие E.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная решеточная формация. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда всякая циклическая примарная подгруппа G $\mathfrak{F}$-субнормальна в ней.*

В классе всех разрешимых групп верна

Теорема F. *Для разрешимой наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathfrak{F}$ содержит всякую группу $G = AB$, где все циклические примарные подгруппы подгрупп A и B $\mathfrak{F}$-субнормальны в G;*

(2) *$\mathfrak{F}$ — формация Шеметкова.*

Отметим, что частные случаи теорем A–C и E опубликованы автором в [16].

1. Предварительные результаты

Используются стандартные обозначения и терминология, которые можно найти в [2, 4, 5]. Напомним некоторые понятия и обозначения, существенные в данной работе. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G; $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех простых делителей порядков групп из класса $\mathfrak{F}$; через π' обозначается дополнение множества простых чисел π в $\mathbb{P}$; группа G называется *π-группой*, если $\pi(G) \subseteq \pi$; Z_p — циклическая группа простого порядка p; если H — подгруппа G, то через $\mathrm{Core}_G(H)$ обозначается наибольшая нормальная подгруппа G, содержащаяся в H; $O_\pi(G)$ — наибольшая нормальная π-подгруппа G для $\pi \subseteq \mathbb{P}$; $\mathrm{F}_p(G)$ — p-нильпотентный радикал G для $p \in \mathbb{P}$; $\mathrm{F}^*(G)$ — квазинильпотентный радикал G; $\mathrm{Soc}(G)$ — цоколь G, т. е. произведение всех минимальных нормальных подгрупп G; цепь подгрупп

$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G$ называется *максимальной* в G, если или $n = 0$, или H_{i-1} — максимальная подгруппа H_i для $i > 0$; $A \wr B$ — регулярное сплетение групп A и B; $G = N \rtimes M$ — полупрямое произведение подгрупп M и N ($N \triangleleft G$ и $N \cap M = 1$); $\mathfrak{G}_\pi$ ($\mathfrak{N}_\pi$) — класс всех (нильпотентных) π-групп, где $\pi \subseteq \mathbb{P}$.

Класс групп $\mathfrak{H}$ называется *гомоморфом*, если каждая фактор-группа любой группы из $\mathfrak{H}$ принадлежит $\mathfrak{H}$.

Гомоморф $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если из $H/A \in \mathfrak{F}$, $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{K}$ — формации. Если $\mathfrak{K} = \varnothing$, то положим $\mathfrak{F}\mathfrak{K} = \varnothing$. Если $\mathfrak{K} \neq \varnothing$, то обозначим через $\mathfrak{F}\mathfrak{K}$ класс всех групп G, для которых $G^{\mathfrak{K}} \in \mathfrak{F}$. Известно [2, гл. I, § 1], что класс $\mathfrak{F}\mathfrak{K}$ является формацией.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *наследственным*, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит всякую ее подгруппу.

Всякая функция $f : \mathbb{P} \to \{\text{формации}\}$ называется *локальным экраном*. Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если существует локальный экран f такой, что $\mathfrak{F}$ совпадает с классом групп G таких, что $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого главного фактора H/K группы G и $p \in \pi(H/K)$, и обозначается через $\mathfrak{F} = LF(f)$.

Через $\widetilde{F}(G)$ обозначается обобщенная подгруппа Фиттинга [2, гл. II, § 7], которая определяется так: $\Phi(G) \subseteq \widetilde{F}(G)$ и $\widetilde{F}(G)/\Phi(G) = \mathrm{Soc}(G/\Phi(G))$.

Лемма 1.1. *Пусть N — нормальная подгруппа группы G.*
(1) *Если $N \leq \Phi(G)$, то $\widetilde{F}(G/N) = \widetilde{F}(G)/N$* [17].
(2) $\widetilde{F}(N) \leq \widetilde{F}(G)$ [17].
(3) $\widetilde{F}(G)N/N \leq \widetilde{F}(G/N)$ [17].
(4) $\mathrm{F}^*(G) \subseteq \widetilde{F}(G)$ [18].

Лемма 1.2. *Пусть N — нормальная подгруппа группы G. Если A/N — циклическая примарная подгруппа G/N, то найдется циклическая примарная подгруппа P группы G такая, что $PN/N = A/N$.*

Доказательство. Пусть A/N — циклическая p-подгруппа G/N, $p \in \mathbb{P}$. Тогда найдется $x \in G$ такой, что $A/N = \langle x \rangle N/N$. Пусть P — силовская p-подгруппа из $\langle x \rangle$. Заметим, что $PN/N = A/N$. $\square$

Лемма 1.3. *Пусть p — простое число и группа G является прямым произведением своих подгрупп A и B. Тогда всякая циклическая примарная p-подгруппа из G является подгруппой прямого произведения циклической примарной p-подгруппы из A и циклической примарной p-подгруппы из B.*

Доказательство. Если $G = A \times B$, то всякий элемент из G записывается единственным образом в виде ab, где $a \in A$, $b \in B$ и $ab = ba$. Пусть $C = \langle c \rangle$ — циклическая p-подгруппа G. Тогда $c = ab$, где $a \in A$ и $b \in B$. Заметим, что $\langle a \rangle$ — циклическая примарная p-подгруппа из A, $\langle b \rangle$ — циклическая примарная p-подгруппа из B и $C \subseteq \langle a \rangle \times \langle b \rangle$. $\square$

Лемма 1.4 [2, гл. I, § 3]. *Если H/K — главный фактор группы G и $p \in \pi(H/K)$, то $G/C_G(H/K)$ не содержит неединичных нормальных p-подгрупп, причем $\mathrm{F}_p(G) \subseteq C_G(H/K)$.*

Лемма 1.5 [2, гл. I, § 4]. *Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $G/\mathrm{F}_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.*

Если f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$, то по лемме 1.4 экран h, где $h(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$, также является локальным экраном $\mathfrak{F}$. В этом случае локальный экран называется *полным*. Всякая локальная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный полный локальный экран F такой, что $F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Такой локальный экран называется *максимальным внутренним локальным экраном формации* $\mathfrak{F}$ [2, гл. I, § 3].

Для класса групп $\mathfrak{H}$ через $\mathscr{M}(\mathfrak{H})$ обозначается класс минимальных не $\mathfrak{H}$-групп, т. е. групп, не принадлежащих $\mathfrak{H}$, у которых всякая собственная подгруппа принадлежит $\mathfrak{H}$.

Лемма 1.6 [19]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная локальная формация, h — полный локальный экран $\mathfrak{F}$, $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$ и $\Phi(G) = 1$.*

(1) *G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = \widetilde{F}(G)$.*

(2) *Если N абелева, то $G = N \rtimes M$, где N — p-группа, $p \in \mathbb{P}$, и $N = C_G(N) = \mathrm{F}_p(G)$; кроме того, M является максимальной подгруппой в G и $M \in \mathscr{M}(h(p))$.*

(3) *Если N неабелева, то $C_G(N) = 1$.*

В классе всех разрешимых групп справедлива

Лемма 1.7 [20]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация Шеметкова. Если $G = AB = BC = AC$, где $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ и $C \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

2. Свойства обобщенно субнормальных подгрупп

Если $\mathfrak{H}$ — формация, то леммы 2.1 и 2.2 можно найти в [4, 5].

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — гомоморф, H и R — подгруппы группы G и $N \trianglelefteq G$.*

(1) *Если H $\mathfrak{H}$-$sn\,G$ (H K-$\mathfrak{H}$-$sn\,G$), то HN/N $\mathfrak{H}$-$sn\,G/N$ (HN/N K-$\mathfrak{H}$-$sn\,G/N$)* [4, *разд.* 1.2].

(2) *Если H/N $\mathfrak{H}$-$sn\,G/N$ (H/N K-$\mathfrak{H}$-$sn\,G/N$), то H $\mathfrak{H}$-$sn\,G$ (H K-$\mathfrak{H}$-$sn\,G$)* [4, *разд.* 1.2].

(3) *Если H $\mathfrak{H}$-$sn\,G$ (H K-$\mathfrak{H}$-$sn\,G$), то HN $\mathfrak{H}$-$sn\,G$ (HN K-$\mathfrak{H}$-$sn\,G$).*

(4) *Если H $\mathfrak{H}$-$sn\,R$ (H K-$\mathfrak{H}$-$sn\,R$) и R $\mathfrak{H}$-$sn\,G$ (R K-$\mathfrak{H}$-$sn\,G$), то H $\mathfrak{H}$-$sn\,G$ (H K-$\mathfrak{H}$-$sn\,G$).*

(5) *Пусть G — p-группа, где $p \in \mathbb{P}$. Если $Z_p \in \mathfrak{H}$, то все подгруппы G $\mathfrak{H}$-субнормальны.*

Доказательство. Утверждение (3) является прямым следствием (1) и (2). Утверждения (4) и (5) следуют из определений $\mathfrak{H}$-субнормальности и K-$\mathfrak{H}$-субнормальности. $\square$

Пусть $\mathfrak{H}$ — наследственный гомоморф. В этом случае определение $\mathfrak{H}$-субнормальной подгруппы можно записать следующим образом. Подгруппа H $\mathfrak{H}$-субнормальна в группе G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$ такая, что $H_i / \mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{H}$ для $i = 1, \dots, n$.

Лемма 2.2. *Пусть $\mathfrak{H}$ — наследственный гомоморф, H и R — подгруппы группы G.*

(1) *Если H $\mathfrak{H}$-$sn\,G$ (H K-$\mathfrak{H}$-$sn\,G$), то $H \cap R$ $\mathfrak{H}$-$sn\,R$ ($H \cap R$ K-$\mathfrak{H}$-$sn\,R$).*

(2) *Если H $\mathfrak{H}$-$sn\,G$ и R $\mathfrak{H}$-$sn\,G$ (H K-$\mathfrak{H}$-$sn\,G$ и R K-$\mathfrak{H}$-$sn\,G$), то $H \cap R$ $\mathfrak{H}$-$sn\,G$ ($H \cap R$ K-$\mathfrak{H}$-$sn\,G$).*

(3) *Если все композиционные факторы G принадлежат $\mathfrak{H}$, то всякая субнормальная подгруппа G $\mathfrak{H}$-субнормальна.*

Доказательство. Докажем (1) индукцией по $|G|$. Пусть H $\mathfrak{H}$-$sn\,G$. Не теряя общности рассуждений, считаем, что $H \neq G$ и $R \neq G$. Тогда существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset \cdots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $H_i/\operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{H}$ для $i = 1,\dots,n$. Так как $\mathfrak{H}$ — наследственный гомоморф и $G/\operatorname{Core}_G(H_{n-1}) \in \mathfrak{H}$, то $R\operatorname{Core}_G(H_{n-1})/\operatorname{Core}_G(H_{n-1}) \simeq R/(R \cap \operatorname{Core}_G(H_{n-1})) \in \mathfrak{H}$. Заметим, что $R \cap \operatorname{Core}_G(H_{n-1}) \subseteq \operatorname{Core}_R(H_{n-1} \cap R)$. Следовательно, $H_{n-1} \cap R$ $\mathfrak{H}$-$sn\,R$. С другой стороны, $H \cap R$ $\mathfrak{H}$-$sn\,H_{n-1} \cap R$ по индукции. По лемме 2.1(4) $H \cap R$ $\mathfrak{H}$-$sn\,R$. Аналогично рассматривается случай, когда H K-$\mathfrak{H}$-$sn\,G$. Утверждение (1) доказано.

Утверждение (2) вытекает из лемм 2.2(1) и 2.1(4). Утверждение (3) следует из определения $\mathfrak{H}$-субнормальности и наследственности класса $\mathfrak{H}$. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть $\mathfrak{H}$ — гомоморф и H K-$\mathfrak{H}$-$sn\,G$. Если простое число p не принадлежит $\pi(\mathfrak{H})$, то $O_p(H) \leq O_p(G)$.*

Доказательство. Пусть группа G — контрпример наименьшего порядка и $H = H_0 \subseteq H_1 \cdots \subseteq H_n = G$ — цепь подгрупп G такая, что либо $H_{i-1} \triangleleft H_i$, либо $H_i/\operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{H}$ для каждого $i = 1,\dots,n$. Так как $|H_{n-1}| < |G|$, то $O_p(H) \leq O_p(H_{n-1})$ по индукции. Рассмотрим два случая.

1) $H_{n-1} \triangleleft G$. Заметим, что $O_p(H_{n-1}) \triangleleft G$. Отсюда $O_p(H_{n-1}) \leq O_p(G)$. Следовательно, $O_p(H) \leq O_p(G)$; противоречие.

2) $G/\operatorname{Core}_G(H_{n-1}) \in \mathfrak{H}$. Так как $p \notin \pi(\mathfrak{H})$, то $O_p(H_{n-1}) \leq \operatorname{Core}_G(H_{n-1})$. Тогда $O_p(H) \triangleleft\triangleleft G$. Стало быть, $O_p(H) \leq O_p(G)$; противоречие. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть $\mathfrak{H}$ — гомоморф и $\pi = \pi(\mathfrak{H})$. Если $G = AB$, где A — K-$\mathfrak{H}$-субнормальная π-подгруппа G и B — π'-подгруппа G, то A нормальна в G.*

Доказательство. Если $A = G$, то лемма верна. Пусть $A \neq G$ и $A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = G$ — произвольная цепь подгрупп от A до G. Так как $|A_i : A_{i-1}| \in \pi'$, то $A_i/\operatorname{Core}_{A_i}(A_{i-1})$ не принадлежит $\mathfrak{H}$ для $i = 1,\dots,n$. Субнормальность A в G следует из K-$\mathfrak{H}$-субнормальности A. Таким образом, A — π-холлова подгруппа, субнормальная в G. Следовательно, $A \triangleleft G$. $\square$

Лемма 2.5. *Пусть $\mathfrak{H}$ — гомоморф.*

(1) *Если R_i — $\mathfrak{H}$-субнормальная подгруппа группы G_i для $i = 1,\dots,n$, то $(R_1 \times \cdots \times R_n)$ $\mathfrak{H}$-$sn\,(G_1 \times \cdots \times G_n)$.*

(2) *Если R_i — K-$\mathfrak{H}$-субнормальная подгруппа группы G_i для $i = 1,\dots,n$, то $(R_1 \times \cdots \times R_n)$ K-$\mathfrak{H}$-$sn\,(G_1 \times \cdots \times G_n)$.*

Доказательство. (1) Для доказательства достаточно рассмотреть случай $n = 2$. По условию найдутся максимальные цепи подгрупп $R_1 = R_{10} \subset R_{11} \subset \cdots \subset R_{1k}$ и $R_2 = R_{20} \subset R_{21} \subset \cdots \subset R_{2m}$ (возможно, $k = 0$ или $m = 0$) в группах G_1 и G_2 соответственно такие, что $R_{1i}/\operatorname{Core}_{R_{1i}}(R_{1(i-1)}) \in \mathfrak{H}$ и $R_{2j}/\operatorname{Core}_{R_{2j}}(R_{2(j-1)}) \in \mathfrak{H}$ для $i, j > 0$. Тогда цепь подгрупп $R_1 \times R_2 = R_{10} \times R_{20} \subset R_{11} \times R_{20} \subset \cdots \subset R_{1k} \times R_{20} \subset R_{1k} \times R_{21} \subset \cdots \subset R_{1k} \times R_{1m} = G_1 \times G_2$ максимальна в $G_1 \times G_2$. Заметим, что $R_{1i} \times R_{20}/\operatorname{Core}_{R_{1i} \times R_{20}}(R_{1(i-1)} \times R_{20}) \in \mathfrak{H}$ и $R_{1k} \times R_{2j}/\operatorname{Core}_{R_{1k} \times R_{2j}}(R_{1k} \times R_{2(j-1)}) \in \mathfrak{H}$ для $i, j > 0$. Следовательно, $(R_1 \times R_2)$ $\mathfrak{H}$-$sn\,(G_1 \times G_2)$.

Случай (2) доказывается аналогично. $\square$

Лемма 2.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная формация такая, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Если единичная подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна в группе G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Для единичной группы утверждение леммы верно. Пусть группа $G \neq 1$ — контрпример наименьшего порядка. Тогда существует максимальная цепь подгрупп $1 = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G$ такая, что $H_i/\operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для $i = 1, \dots, n$. По предположению $H_{n-1} \in \mathfrak{F}$. Заметим, что $\operatorname{Core}_G(H_{n-1}) \in \mathfrak{F}$. Из того, что $G/\operatorname{Core}_G(H_{n-1}) \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$, следует, что $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. □

Лемма 2.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация и $G = H\widetilde{F}(G)$, где H — $\mathfrak{F}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа в G. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $G = H\widetilde{F}(G)$, где H — $\mathfrak{F}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа G, является контрпримером наименьшего порядка к утверждению леммы.

Пусть $\Phi(G) \neq 1$. Тогда по лемме 1.1(1) $G/\Phi(G) = H\Phi(G)/\Phi(G)\widetilde{F}(G/\Phi(G))$. Ввиду леммы 2.1(1) $H\Phi(G)/\Phi(G)$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа $G/\Phi(G)$. Так как $|G/\Phi(G)| < |G|$, то $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Из насыщенности $\mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$; противоречие.

Пусть $\Phi(G) = 1$. Тогда $\widetilde{F}(G) = \operatorname{Soc}(G)$. Поскольку H $\mathfrak{F}$-$sn\,G$, найдется максимальная подгруппа M группы G такая, что $HG^{\mathfrak{F}} \leq M$. Заметим, что $G = M\widetilde{F}(G) = M\operatorname{Soc}(G)$. Значит, найдется минимальная нормальная подгруппа N группы G такая, что $N \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$. Заметим, что по лемме 1.1(3) $G/N = (HN/N)(\widetilde{F}(G)/N) = (HN/N)\widetilde{F}(G/N)$. Так как $|G/N| < |G|$, $HN/N \in \mathfrak{F}$ и по лемме 2.1(1) HN/N $\mathfrak{F}$-$sn\,G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$. Тогда $N \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $N = N \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$; противоречие. □

3. Доказательства теорем

Лемма 3.1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — наследственный гомоморф и π — множество простых чисел. Тогда $v_\pi\mathfrak{H}$ и $v_\pi^*\mathfrak{H}$ — наследственные гомоморфы.*

Доказательство. Если $\pi = \varnothing$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $\pi \neq \varnothing$. Наследственность классов $v_\pi\mathfrak{H}$ и $v_\pi^*\mathfrak{H}$ следует из леммы 2.2(1). Покажем, что $v_\pi\mathfrak{H}$ — гомоморф. Пусть группа $G \in v_\pi\mathfrak{H}$, $N \triangleleft G$ и A/N — произвольная циклическая примарная p-подгруппа в G/N для некоторого $p \in \pi$. Тогда по лемме 1.2 найдется циклическая примарная подгруппа P группы G такая, что $A/N = PN/N$. Так как P $\mathfrak{H}$-$sn\,G$, по лемме 2.1(1) $PN/N = A/N$ $\mathfrak{H}$-$sn\,G/N$. Значит, $v_\pi\mathfrak{H}$ — гомоморф. Аналогично доказывается, что $v_\pi^*\mathfrak{H}$ — гомоморф. □

Доказательство теоремы A. Докажем (1). Пусть $G \in \mathfrak{H}$. Из наследственности $\mathfrak{H}$ следует, что всякая подгруппа G является $\mathfrak{H}$-субнормальной. Поэтому $\mathfrak{H} \subseteq v_\pi\mathfrak{H}$. По определению K-$\mathfrak{H}$-субнормальности $v_\pi\mathfrak{H} \subseteq v_\pi^*\mathfrak{H}$.

Заметим, что $Z_p \in \mathfrak{H} \subseteq v_\pi\mathfrak{H}$ для любого $p \in \pi \cap \pi(\mathfrak{H})$. Так как все подгруппы нильпотентной группы субнормальны, из леммы 2.2(3) следует, что $\mathfrak{N}_{\pi\cap\pi(\mathfrak{H})} \subseteq v_\pi\mathfrak{H}$.

Докажем (2). Ясно, что $v_\pi\mathfrak{H} \subseteq v_{\pi\cap\pi(\mathfrak{H})}\mathfrak{H}$. Покажем обратное включение. Пусть $G \in v_\pi\mathfrak{H}$. Нетрудно заметить, что всякая $\mathfrak{H}$-субнормальная подгруппа $\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}$-субнормальна. Так как единичная подгруппа $\mathfrak{H}$-субнормальна в G, она $\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}$-субнормальна в G. Из равенства $\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})} = \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}$ и леммы 2.6 следует, что $G \in \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}$. Значит, $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$. Поэтому G не имеет неединичных $\pi\setminus\pi(\mathfrak{H})$-подгрупп. Следовательно, $v_{\pi\cap\pi(\mathfrak{H})}\mathfrak{H} \subseteq v_\pi\mathfrak{H}$. Итак, $v_\pi\mathfrak{H} = v_{\pi\cap\pi(\mathfrak{H})}\mathfrak{H}$.

Так как $\mathfrak{H} \subseteq v_\pi\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}$, то $\pi(\mathfrak{H}) = \pi(v_\pi\mathfrak{H})$.

Докажем (3). Покажем, что класс $v_\pi\mathfrak{H}$ замкнут относительно взятия прямых произведений. Согласно (2) можно считать, что $\pi \subseteq \pi(\mathfrak{H})$. Пусть $G = A \times B$, где A и B принадлежат $v_\pi\mathfrak{H}$. Покажем, что $G \in v_\pi\mathfrak{H}$.

Пусть C — произвольная циклическая примарная π-подгруппа G. По лемме 1.3 найдутся циклические примарные $\mathfrak{H}$-субнормальные p-подгруппы (или единичные подгруппы) A_1 и B_1, где $p \in \pi$, групп A и B соответственно такие, что $C \leq A_1 \times B_1$. Ввиду наследственности $\mathfrak{H}$ и леммы 2.1(5) C $\mathfrak{H}$-$sn\, A_1 \times B_1$. Так как A_1 $\mathfrak{H}$-$sn\, A$ и B_1 $\mathfrak{H}$-$sn\, B$, то $(A_1 \times B_1)$ $\mathfrak{H}$-$sn\, G$ по лемме 2.5. Тогда C $\mathfrak{H}$-$sn\, G$ по лемме 2.1(4). Утверждение (3) доказано.

Значит, класс групп $v_\pi\mathfrak{H}$ замкнут относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и прямых произведений. Следовательно, $v_\pi\mathfrak{H}$ — наследственная формация. Так как в нильпотентной группе всякая подгруппа субнормальна, аналогично доказывается, что $v_\pi^*\mathfrak{H}$ — наследственная формация.

Докажем, что $v_\pi^*(v_\pi^*\mathfrak{H}) = v_\pi^*\mathfrak{H}$. Согласно (1) $v_\pi^*\mathfrak{H} \subseteq v_\pi^*(v_\pi^*\mathfrak{H})$. Предположим, что $v_\pi^*(v_\pi^*\mathfrak{H}) \setminus v_\pi^*\mathfrak{H} \neq \varnothing$. Выберем группу G наименьшего порядка из $v_\pi^*(v_\pi^*\mathfrak{H}) \setminus v_\pi^*\mathfrak{H}$. Из наследственности классов $v_\pi^*(v_\pi^*\mathfrak{H})$ и $v_\pi^*\mathfrak{H}$ следует, что все собственные подгруппы G принадлежат $v_\pi^*\mathfrak{H}$. Пусть H — произвольная циклическая примарная π-подгруппа G. Так как H K-$v_\pi^*\mathfrak{H}$-$sn\, G$, или найдется собственная нормальная подгруппа K группы G, содержащая H, или найдется собственная подгруппа M группы G, содержащая H, такая, что $M/\operatorname{Core}_G(M) \in v_\pi^*\mathfrak{H}$.

Предположим, что найдется собственная нормальная подгруппа K группы G, содержащая H. Тогда $K \in v_\pi^*\mathfrak{H}$. Так как H K-$\mathfrak{H}$-$sn\, K$ и $K \triangleleft G$, по лемме 2.1(4) H K-$\mathfrak{H}$-$sn\, G$.

Предположим, что найдется собственная подгруппа M группы G такая, что $H \leq M$ и $G/\operatorname{Core}_G(M) \in v_\pi^*\mathfrak{H}$. Тогда

$$H\operatorname{Core}_G(M)/\operatorname{Core}_G(M)\text{K-}\mathfrak{H}\text{-}sn\, G/\operatorname{Core}_G(M).$$

По лемме 2.1(2) $H\operatorname{Core}_G(M)$ K-$\mathfrak{H}$-$sn\, G$. Поскольку $H\operatorname{Core}_G(M) \in v_\pi^*\mathfrak{H}$, то H K-$\mathfrak{H}$-$sn\, H\operatorname{Core}_G(M)$. По лемме 2.1(4) H K-$\mathfrak{H}$-$sn\, G$. Ввиду произвольности выбора H имеем $G \in v_\pi^*\mathfrak{H}$; противоречие.

Аналогично доказывается, что $v_\pi(v_\pi\mathfrak{H}) = v_\pi\mathfrak{H}$. Утверждение (4) доказано.

Утверждение (5) следует из определений $\mathfrak{H}$-субнормальности и K-$\mathfrak{H}$-субнормальности. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть $\mathfrak{H}$ — наследственный гомоморф и $G \in v^*\mathfrak{H}$. Если $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$, то всякий композиционный фактор группы G принадлежит $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Так как $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$ и $\mathfrak{H}$ — наследственный гомоморф, всякий абелев композиционный фактор G принадлежит $\mathfrak{H}$. Из леммы 3.1 следует, что всякий неабелев композиционный фактор G принадлежит $v^*\mathfrak{H}$. Пусть R — неабелев композиционный фактор G. Тогда R является простой неабелевой группой. Так как $R \in v^*\mathfrak{H}$, в ней найдется собственная циклическая примарная K-$\mathfrak{H}$-субнормальная подгруппа $H \neq 1$. Из того, что H K-$\mathfrak{H}$-$sn\, R$, $H \neq 1$, и простоты R следует, что в R найдется такая собственная подгруппа M, что $R/\operatorname{Core}_R(M) \in \mathfrak{H}$. Заметим, что $\operatorname{Core}_R(M) = 1$. Следовательно, $R \in \mathfrak{H}$. $\square$

Доказательство теоремы B. Покажем, что $v^*\mathfrak{H} \subseteq \mathrm{D}_0(v\mathfrak{H} \cup \mathfrak{N}_{\pi'})$. Пусть $G \in v^*\mathfrak{H}$, $\pi = \pi(\mathfrak{H})$ и $p \in \pi'$. Тогда по лемме 2.3 всякая циклическая примарная p-подгруппа субнормальна в G. Так как порождение субнормальных p-подгрупп является субнормальной p-подгруппой, любая силовская p-подгруппа субнормальна в G. Более того, любая силовская p-подгруппа G нормальна в G для любого $p \in \pi'$. Пусть A — произведение силовских p-подгрупп, где $p \in \pi'$. Если $\pi' = \varnothing$, то $A = 1$. Из доказанного выше следует, что A — нормальная нильпотентная π'-холлова подгруппа G.

По теореме Шура — Цассенхауза существует дополнение B к подгруппе A в G. Заметим, что B — π-холлова подгруппа G. Пусть H — циклическая примарная подгруппа B. Рассмотрим HA. Так как $\mathfrak{H}$ — наследственный гомоморф и H K-$\mathfrak{H}$-$sn\, G$, по лемме 2.2(1) H K-$\mathfrak{H}$-$sn\, HA$. Ввиду леммы 2.4 имеем $A \subseteq N_G(H)$. Поскольку B порождается своими циклическими примарными подгруппами, $A \subseteq N_G(B)$. Тогда $B \triangleleft G$. Значит, $G = A \times B$.

Так как $\mathfrak{H}$ — наследственный гомоморф, в силу леммы 3.1 $B \in v^*\mathfrak{H}$. Из леммы 3.2 и наследственности класса $v^*\mathfrak{H}$ следует, что композиционные факторы каждой подгруппы из B принадлежат $\mathfrak{H}$. Тогда по лемме 2.2(3) всякая K-$\mathfrak{H}$-субнормальная подгруппа B является $\mathfrak{H}$-субнормальной в B. Значит, $B \in v\mathfrak{H}$. Стало быть, $v^*\mathfrak{H} \subseteq \mathrm{D}_0(v\mathfrak{H} \cup \mathfrak{N}_{\pi'})$.

Докажем обратное включение. По п. (1) теоремы A $v\mathfrak{H} \subseteq v^*\mathfrak{H}$. Заметим, что $\mathfrak{N}_{\pi'} \subseteq v\mathfrak{H}$. Поскольку по п. (3) теоремы A $v^*\mathfrak{H}$ — формация, $\mathrm{D}_0(v\mathfrak{H} \cup \mathfrak{N}_{\pi'}) \subseteq v^*\mathfrak{H}$. $\square$

Доказательство теоремы C. Докажем насыщенность формации $v_\pi\mathfrak{F}$. Пусть $\pi = \varnothing$ и $G/\Phi(G) \in v_\pi\mathfrak{F}$. Так как $\Phi(G)/\Phi(G)$ $\mathfrak{F}$-$sn\, G/\Phi(G)$, по лемме 2.1(2) $\Phi(G)$ $\mathfrak{F}$-$sn\, G$. Формация $\mathfrak{F}$ насыщенная, тем самым $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$. Из $\pi(G) = \pi(G/\Phi(G))$ следует, что 1 $\mathfrak{F}$-$sn\, \Phi(G)$. По лемме 2.1(4) 1 $\mathfrak{F}$-$sn\, G$. Значит, $G \in v_\pi\mathfrak{F}$.

Докажем насыщенность класса $v_\pi\mathfrak{F}$, $\pi \neq \varnothing$. Пусть группа G — контрпример наименьшего порядка к теореме. Тогда $G/\Phi(G) \in v_\pi\mathfrak{F}$ и $G \notin v_\pi\mathfrak{F}$.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа G. Из $\Phi(G)N/N \leq \Phi(G/N)$ и $G/\Phi(G) \in v_\pi\mathfrak{F}$ следует, что $(G/N)/\Phi(G/N) \in v_\pi\mathfrak{F}$. По предположению группа G/N принадлежит $v_\pi\mathfrak{F}$. Так как $v_\pi\mathfrak{F}$ — формация, N является единственной минимальной нормальной подгруппой G и $N \leq \Phi(G)$. Таким образом, N — p-группа для некоторого простого p, и $O_{p'}(G) = 1$.

Пусть Q — циклическая примарная q-подгруппа G для некоторого простого $q \in \pi$. Из $G/N \in v_\pi\mathfrak{F}$ и леммы 2.1(2) следует, что QN $\mathfrak{F}$-$sn\, G$. Пусть $A = Q\widetilde{F}(G)$. Заметим, что нормальная подгруппа $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$ квазинильпотентна. Значит, $\widetilde{F}(G)/\Phi(G) \leq \mathrm{F}^*(A/\Phi(G))$. По лемме 1.1(4) $\widetilde{F}(G)/\Phi(G) \leq \widetilde{F}(A/\Phi(G))$. Тогда $A/\Phi(G) = Q\Phi(G)/\Phi(G)\widetilde{F}(A/\Phi(G))$. Из того, что $Q\Phi(G)/\Phi(G)$ $\mathfrak{F}$-$sn\, G/\Phi(G)$, и наследственности формации $\mathfrak{F}$ по лемме 2.2(1) вытекает, что $Q\Phi(G)/\Phi(G)$ $\mathfrak{F}$-$sn\, A/\Phi(G)$. По лемме 2.7 $A/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Тогда A действует f-стабильно на $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$, где f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Из равенства $O_{p'}(G) = 1$ и теоремы 9.18 из [2, гл. II, § 9] следует, что A действует f-стабильно на $\Phi(G)$. Поэтому $A \in \mathfrak{F}$, откуда Q $\mathfrak{F}$-$sn\, QN$. Значит, по лемме 2.1(4) Q $\mathfrak{F}$-$sn\, G$. Таким образом, $G \in v_\pi\mathfrak{F}$; противоречие.

Докажем насыщенность формации $v^*\mathfrak{F}$. Так как $v\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})'}$ — насыщенные формации, $\pi(v\mathfrak{F}) \cap \pi(\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})'}) = \varnothing$ и $v^*\mathfrak{F} = \mathrm{D}_0(v\mathfrak{F} \cup \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})'})$ по теореме B, формация $v^*\mathfrak{F}$ насыщенна [4, разд. 3.1]. $\square$

Доказательство теоремы D. По теореме C класс $v_\pi\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией. Пусть $\mathfrak{K} = LF(H)$, где H — локальный экран такой, что $H(p) = (G \mid$ все циклические примарные π-подгруппы G принадлежат $F(p)$ и $\mathfrak{F}$-субнормальны в $G)$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Заметим, что $H(p)$ — наследственная формация для любого простого p. Согласно доказательству теоремы 4.7 в [2, гл. I, § 4] формация $\mathfrak{K}$ наследственна. Так как $F(p) \subseteq H(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{K}$.

Предположим, что $\mathfrak{K} \setminus v_\pi\mathfrak{F} \neq \varnothing$. Выберем группу G наименьшего порядка из $\mathfrak{K} \setminus v_\pi\mathfrak{F}$. Поскольку обе формации $\mathfrak{K}$ и $v_\pi\mathfrak{F}$ насыщенны и наследственны, то $\Phi(G) = 1$ и G — минимальная не $v_\pi\mathfrak{F}$-группа. По лемме 1.6(1) в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N.

Если N неабелева, то по лемме 1.6(3) $C_G(N) = 1$. Из $G \in \mathfrak{K}$ следует, что $G/C_G(N) \simeq G \in H(p) \subseteq v_\pi\mathfrak{F}$; противоречие.

Если N абелева, то по лемме 1.6(2) $N = C_G(N)$ — элементарная абелева p-подгруппа и найдется максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = N \rtimes M$. Предположим, что $NC < G$ для любой циклической примарной π-подгруппы C группы G. Из выбора G следует, что C $\mathfrak{F}$-$sn\, CN$ и CN/N $\mathfrak{F}$-$sn\, G/N$. По лемме 2.1 C $\mathfrak{F}$-$sn\, G$. Стало быть, $G \in v_\pi\mathfrak{F}$; противоречие. Пусть $G = NC$ для некоторой циклической примарной π-подгруппы C группы G. Значит, M — циклическая примарная π-подгруппа G. Так как $G/C_G(N) = G/N \simeq M \in H(p)$, то $M \in F(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, N — F-центральный главный фактор G. Значит, $G \in \mathfrak{F} \subseteq v_\pi\mathfrak{F}$; противоречие. Таким образом, $\mathfrak{K} \subseteq v_\pi\mathfrak{F}$.

Предположим, что $v_\pi\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{K} \neq \varnothing$. Выберем группу G наименьшего порядка из $v_\pi\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{K}$. Тогда $\Phi(G) = 1$ и G — минимальная не $\mathfrak{K}$-группа. По лемме 1.6(1) в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и $N = \widetilde{F}(G)$. Предположим, что в G найдется такая циклическая примарная π-подгруппа C, что $NC = G$. Из $G \in v_\pi\mathfrak{F}$ и леммы 2.7 следует, что $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Будем считать, что $NC < G$ для любой циклической примарной π-подгруппы.

Пусть N — абелева подгруппа. Тогда по лемме 1.6 N — элементарная абелева p-подгруппа, $p \in \mathbb{P}$, и найдется максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = N \rtimes M$ и $M \in \mathscr{M}(\mathfrak{N}_pH(p))$. Поскольку $M \neq 1$, то $F(p) \neq \varnothing$. Предположим, что M не является циклической примарной π-подгруппой. Пусть H — циклическая примарная π-подгруппа M. Тогда H — собственная подгруппа M и $H \in \mathfrak{N}_pH(p)$. Если H — p'-группа, то $H \simeq HO_p(H)/O_p(H) \in F(p)$. Если H — p-группа и $p \in \pi$, то из равенства $\mathfrak{N}_pF(p) = F(p)$ следует, что $H \in F(p)$. Так как $G \in v_\pi\mathfrak{F}$, по лемме 3.1 $M \in v_\pi\mathfrak{F}$. Таким образом, $M \in H(p)$; противоречие. Значит, M — циклическая примарная π-группа; противоречие.

Пусть N — неабелева минимальная нормальная подгруппа G. Тогда $N = N_1 \times \dots \times N_n$ — прямое произведение простых изоморфных неабелевых групп N_i, $i = 1, \dots, n$. Заметим, что $N = G^{\mathfrak{K}}$ и $C_G(N) = 1$. Пусть C — произвольная циклическая примарная π-подгруппа G. Найдется такое i, что $C_C(N_i) = 1$. Так как простая неабелева группа N_i субнормальна в NC, согласно лемме 13.16 из [21, гл. X, § 13] найдется минимальная нормальная подгруппа K группы NC, содержащая N_i. Заметим, что $K \leq N$ и $C_{NC}(K) \cap C = 1$. Поскольку $NC < G$, то $NC \in \mathfrak{K}$. Значит, $NC/C_{NC}(K) \in H(p)$ для всех простых p, делящих $|K|$ (а также и $|N|$). Итак, $C \simeq CC_{NC}(K)/C_{NC}(K) \in F(p)$ для всех p, делящих $|N|$. Из определения $H(p)$ следует, что $G/C_G(N) \in H(p)$ для всех простых p, делящих $|N|$. Итак, G действует H-центрально на $G^{\mathfrak{K}}$. Стало быть, $G \in \mathfrak{K}$; противоречие. Значит, $v_\pi\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{K}$. Таким образом, $v_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{K}$.

Докажем, что H — максимальный внутренний локальный экран $v_\pi\mathfrak{F}$. Заметим, что H — внутренний экран формации $v_\pi\mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{N}_pH(p) = H(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Если $F(p) = \varnothing$, то $H(p) = \varnothing$, и утверждение доказано. Предположим, что $F(p) \neq \varnothing$.

Пусть $G/N \in H(p)$ и N — p-группа. Тогда $G \in \mathfrak{N}_pH(p)$. Так как H — внутренний экран формации $v_\pi\mathfrak{F}$, по лемме 3.11 из [2, гл. I, § 3] $\mathfrak{N}_pH(p) \subseteq v_\pi\mathfrak{F}$.

Тогда все циклические примарные π-подгруппы G $\mathfrak{F}$-субнормальны. Поскольку $\mathfrak{N}_p \subseteq F(p)$, все циклические примарные p-подгруппы G принадлежат $F(p)$. Пусть C — циклическая примарная p'-подгруппа G. Тогда $C \simeq CN/N \in F(p)$. Таким образом, $G \in H(p)$. Итак, H — максимальный внутренний локальный экран $v_\pi\mathfrak{F}$. $\square$

Доказательство следствия D.1. Заметим, что $\mathfrak{F}$ содержит все абелевы группы. По [2, гл. I, § 3] локальный экран F, где $F(p) = \mathfrak{N}_p(f(p) \cap \mathfrak{F})$ для любого $p \in \mathbb{P}$, будет максимальным внутренним локальным экраном формации $\mathfrak{F}$. Заметим, что $F(p)$ содержит все абелевы группы для любого $p \in \mathbb{P}$. По теореме D $v_\pi\mathfrak{F} = LF(H)$, причем $H(p) = v_\pi\mathfrak{F}$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Из [2, гл. I, § 4] следует, что $v_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{N}(v_\pi\mathfrak{F})$. Стало быть, $v_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{S}(v_\pi\mathfrak{F})$. $\square$

Доказательство следствия D.2. По лемме 2.6 $v_\pi\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$. По следствию D.1 $v_\pi(\mathfrak{NA}) = \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{NA}$ — класс групп с нильпотентным коммутантом. Из п. (5) теоремы A следует, что $v_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{S}$. $\square$

Доказательство теоремы E. Пусть $\mathfrak{F} = v_\pi\mathfrak{F}$ и $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$. Если $\pi(G) \setminus \pi(\mathfrak{F}) \neq \varnothing$, то G является циклической группой простого порядка в силу наследственности $\mathfrak{F}$. Значит, $G/\widetilde{F}(G) \simeq 1$, и утверждение выполняется.

Пусть $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Учитывая теорему C и утверждение (1) леммы 1.1, можно считать, что $\Phi(G) = 1$. Тогда группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $G/N \in \mathfrak{F}$. Если $NC < G$ для любой циклической примарной π-подгруппы C группы G, то из $NC \in \mathfrak{F}$ и леммы 2.1 следует, что $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Пусть $G = NC$ для некоторой циклической примарной π-подгруппы C. Следовательно, $G/\widetilde{F}(G)$ — циклическая примарная π-подгруппа.

Предположим, что $G/\widetilde{F}(G)$ — циклическая примарная π-группа для любой группы $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$. Из п. (1) теоремы A следует, что $\mathfrak{F} \subseteq v_\pi\mathfrak{F}$. Пусть G — группа наименьшего прядка из $v_\pi\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}$. Так как формация $v_\pi\mathfrak{F}$ наследственная, G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Поскольку формация $\mathfrak{F}$ насыщенная, $\Phi(G) = 1$. Заметим, что в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и $N = G^{\mathfrak{F}} = \widetilde{F}(G)$. По условию G/N — циклическая примарная π-подгруппа. Тогда по лемме 1.2 найдется циклическая примарная π-подгруппа P такая, что $G = NP = G^{\mathfrak{F}}P$. С другой стороны, так как $G \in v_\pi\mathfrak{F}$, то P $\mathfrak{F}$-$sn\,G$. Следовательно, найдется максимальная подгруппа M группы G такая, что $P \leq M$ и $G^{\mathfrak{F}} \leq M$; противоречие. Значит, $v_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, что и требовалось доказать. $\square$

Доказательство теоремы F. Пусть разрешимая наследственная насыщенная формация $\mathfrak{F} = LF(f)$, где f — максимальный внутренний локальный экран $\mathfrak{F}$, содержит всякую группу $G = AB$ такую, что все циклические примарные подгруппы подгрупп A и B $\mathfrak{F}$-субнормальны в G. Покажем, что $\mathfrak{F}$ — $\check{S}$-формация.

Пусть G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Если G нильпотентна, то из насыщенности формации $\mathfrak{F}$ следует, что G — группа простого порядка и $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Пусть G ненильпотентна. Предположим, что $\Phi(G) = 1$. По лемме 1.6 $G = N \rtimes M$, где $N = G^{\mathfrak{F}}$ — элементарная абелева p-группа, $p \in \mathbb{P}$, а M — максимальная подгруппа G. Предположим, что M не является циклической примарной подгруппой. Тогда найдутся максимальные подгруппы M_1 и M_2 группы M такие, что $M = M_1M_2$. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $G/N \in \mathfrak{F}$, то NM_1/N $\mathfrak{F}$-$sn\,G/N$. По лемме 2.1(2) NM_1 $\mathfrak{F}$-$sn\,G$. Заметим, что $NM_1 < G$. Значит, $NM_1 \in \mathfrak{F}$. Пусть L — циклическая примарная подгруппа NM_1. Так как $NM_1 \in \mathfrak{F}$, то L $\mathfrak{F}$-$sn\,NM_1$. По лемме 2.1(4) L $\mathfrak{F}$-$sn\,G$. Аналогично доказывается, что все циклические примарные подгруппы NM_2 $\mathfrak{F}$-субнормальны в G. Из равенства $G = (NM_1)(NM_2)$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Стало быть, M — циклическая примарная подгруппа. Тогда $|M| = q^n$, где $q \in \mathbb{P}$ и $p \neq q$. По лемме 1.6(2) M — минимальная не $f(p)$-группа.

Предположим, что $n > 1$. Пусть Q и R — циклические группы порядков q^{n-1} и q соответственно, $C = Q \wr R$ и D — база сплетения C. Так как некоторая подгруппа C изоморфна M, то $C \notin f(p)$. Пусть E — группа порядка p. Рассмотрим $F = E \wr C$. Пусть H — база F. Тогда $\mathrm{F}_p(F) = H$, $F/H \in \mathfrak{F}$ и $F/H \notin f(p)$. Значит, F не принадлежит $\mathfrak{F}$. Поскольку $\mathrm{F}_q(HD) = HD$, $H \leq \mathrm{F}_p(HD)$ и $D \in f(p)$, по лемме 1.5 $HD \in \mathfrak{F}$. Аналогично доказывается, что $HR \in \mathfrak{F}$.

Заметим, что $F^{\mathfrak{F}} \leq HD$ и $F^{\mathfrak{F}} \leq HR$. Рассуждая как выше, можно показать, что любые циклические примарные подгруппы HD и HR являются $\mathfrak{F}$-субнормальными в F. Так как $F = (HR)(HD)$, то $F \in \mathfrak{F}$; противоречие. Значит, $n = 1$.

Таким образом, G — группа Шмидта. Согласно [22] $\mathfrak{F}$ — $\check{S}$-формация.

Предположим, что $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная $\check{S}$-формация. Пусть не $\mathfrak{F}$-группа $G = AB$, у которой все циклические примарные подгруппы из подгрупп A и B $\mathfrak{F}$-субнормальны в G, является контрпримером наименьшего порядка.

Так как единичная подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, по лемме 2.6 $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.

Пусть $N \triangleleft G$ и C/N — циклическая примарная p-подгруппа AN/N. Тогда $C/N = \langle xN \rangle$, где $x \in A$. Пусть P — силовская p-подгруппа $\langle x \rangle$. Тогда $C = PN$. Так как P $\mathfrak{F}$-$sn\,G$, то C/N $\mathfrak{F}$-$sn\,G/N$. Тем самым все циклические примарные подгруппы из AN/N $\mathfrak{F}$-субнормальны в G/N. Аналогично доказывается, что все циклические примарные подгруппы из BN/N $\mathfrak{F}$-субнормальны в G/N. Из $G/N = (AN/N)(BN/N)$ и выбора G следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $\Phi(G) = 1$. Заметим, что $N \in \mathfrak{F}$.

С учетом того, что $\mathfrak{F}$ — наследственная $\check{S}$-формация и всякая циклическая примарная подгруппа A $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, по лемме 2.2(1) и следствию E.2 $A \in \mathfrak{F}$. Аналогично $B \in \mathfrak{F}$.

Пусть $G = AN = BN$. Тогда $G = AB = AN = BN$ и $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$. По лемме 1.7 $G \in \mathfrak{F}$; противоречие.

Предположим, что $AN < G$ и $G = NB$. Тогда B — максимальная подгруппа G и $B \cap N = 1$. Если B — циклическая примарная подгруппа, то по лемме 2.7 $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Предположим, что B не является циклической примарной подгруппой. Тогда в B найдутся максимальные подгруппы B_1 и B_2 такие, что $B = B_1B_2$. Рассмотрим подгруппу NB_1. Так как $N \triangleleft G$ и 1 $\mathfrak{F}$-$sn\,G$, по лемме 2.1(3) N $\mathfrak{F}$-$sn\,G$. Поскольку $N \in \mathfrak{F}$ и N $\mathfrak{F}$-$sn\,G$, всякая циклическая примарная подгруппа из N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Заметим, что всякая циклическая примарная подгруппа из B_1 $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. По лемме 2.2(1) все циклические примарные подгруппы N и B_1 $\mathfrak{F}$-субнормальны в NB_1. Так как $NB_1 < G$, то $NB_1 \in \mathfrak{F}$. Аналогично $NB_2 \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G = B(NB_1) = B(NB_2) = (NB_1)(NB_2)$ и подгруппы B, NB_1 и NB_2 принадлежат $\mathfrak{F}$. По лемме 1.7 $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Аналогично рассматриваются случаи $BN < G$ и $AN = G$.

Предположим, что $AN < G$ и $BN < G$. Из наследственности $\mathfrak{F}$ и леммы 2.2(1) следует, что подгруппы AN и BN принадлежат $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — локальная $\check{S}$-формация, по следствию 2.4.13 в [4] она обладает полным локальным экраном F таким, что $F(q) = \mathfrak{S}_{\pi(F(q))}$ для любого $q \in \pi(\mathfrak{F})$. Из равенства $N = C_G(N)$ следует, что $O_{p'}(AN) = 1$, откуда $\mathrm{F}_p(AN)$ — p-группа. По лемме 1.5 $AN/\mathrm{F}_p(AN) \in F(p)$. Поскольку $F(p) = \mathfrak{N}_p F(p)$, то $AN \in F(p)$. Аналогично $BN \in F(p)$. Следовательно, $G = AB \in F(p)$. Из $G/N \in \mathfrak{F}$ и $G/N = G/C_G(N) \in F(p)$ вытекает, что $G \in \mathfrak{F}$. Заключительное противоречие. □

Автор выражает признательность доктору физ.-мат. наук А. Ф. Васильеву за полезные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hawkes T. O.* On formation subgroups of a finite soluble group // J. London Math. Soc. 1969. V. 4. P. 243–250.
2. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
3. *Kegel O. H.* Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten // Arch. Math. 1978. Bd 30, Heft 3. S. 225–228.
4. *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003.
5. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.
6. *Васильев А. Ф.* О влиянии примарных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп на строение группы // Вопросы алгебры. 1995. № 8. С. 31–39.
7. *Васильева Т. И., Прокопенко А. И.* Конечные группы с $\mathfrak{F}$-достижимыми проекторами // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. 2006. № 5. С. 14–18.
8. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И.* О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами // Пробл. физики, математики и техники. 2011. № 4. С. 86–91.
9. *Семенчук В. Н., Шевчук С. Н.* Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 1. С. 104–108.
10. *Вегера А. С.* О насыщенных формациях конечных групп, определяемых свойствами вложения силовских подгрупп // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. 2012. № 6. С. 154–158.
11. *Семенчук В. Н., Шевчук С. Н.* Конечные группы, у которых примарные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны // Изв. вузов. Математика. 2011. № 8. С. 46–55.
12. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.
13. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам // Пробл. физики, математики и техники. 2010. № 3. С. 21–27.
14. *Monakhov V. S., Kniahina V. N.* Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Ric. Mat. 2013. V. 62. P. 307–322.
15. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
16. *Мурашко В. И.* О классе конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. 2013. № 6. С. 55–61.
17. *Forster P.* Projektive Klassen endlicher Gruppen. IIa // Pub. Mat. UAB. 1985. V. 29, N 2–3. P. 39–76.
18. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Сыроквашин А. В.* Заметка о пересечениях некоторых максимальных подгрупп конечных групп // Пробл. физики, математики и техники. 2012. № 11. С. 62–64.
19. *Семенчук В. Н.* Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 3. С. 138–149.
20. *Васильев А. Ф.* О перечислении локальных формаций с условием Кегеля // Вопросы алгебры. 1993. № 7. С. 86–93.
21. *Huppert B., Blacburn N.* Finite groups. III. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1982.

22. *Васильев А. Ф.* О проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством // Вопросы алгебры. 1987. № 3. С. 3–11.

Статья поступила 6 марта 2014 г.

Мурашко Вячеслав Игоревич
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
mvimath@yandex.ru