Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6

УДК 512.54

О $\{2,3\}$–ГРУППАХ, В КОТОРЫХ НЕТ ЭЛЕМЕНТОВ ПОРЯДКА 6

Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров

Аннотация. Изучаются $\{2,3\}$-группы без элементов порядка 6.

Ключевые слова: периодическая группа, локально конечная группа, локально циклическая группа, локально кватернионная группа.

В работе изучаются $\{2,3\}$-группы без элементов порядка 6. Начало таким исследованиям положила работа Ноймана [1], в которой были классифицированы группы периода 6 без элементов порядка 6. Позднее локальную конечность групп периода 12 без элементов порядка 6 установил И. Н. Санов [2], а Д. В. Лыткина [3] описала точное строение таких групп. Локальную конечность непримарных групп периода 24 без элементов порядка 6 доказал В. Д. Мазуров [4]. Вскоре аналогичный результат был получен для групп периода 36 [5], а затем и для групп периода 72 [6].

Основным результатом настоящей работы является

Теорема. *Пусть G — бесконечная непримарная $\{2,3\}$-группа без элементов порядка 6. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $O_2(G)O_3(G) \neq 1$;

(2) *существует непустое G-инвариантное подмножество $\Lambda \subseteq G$ элементов порядка 3 такое, что группа $\langle x,y\rangle$ конечна для любых $x,y \in \Lambda$;*

(3) *G удовлетворяют одному из следующих условий:*

(a) *$G = O_3(G)\cdot T$, где $O_3(G) \neq 1$ — абелева группа, T — локально циклическая или локально кватернионная 2-группа, действующая свободно на $O_3(G)$;*

(b) *$G = O_2(G)\cdot R$, где $O_2(G) \neq 1$ — нильпотентная 2-группа, ступень нильпотентности которой не превосходит двух, R — 3-группа с единственной подгруппой порядка 3, действующая свободно на $O_2(G)$;*

(c) *$G = O_2(G)\cdot(R\cdot\langle t\rangle)$, где $O_2(G) \neq 1$ — нильпотентная 2-группа, ступень нильпотентности которой не превосходит двух, R — локально циклическая 3-группа, действующая свободно на $O_2(G)$, t — элемент порядка 2, переводящий при сопряжении каждый элемент из R в обратный.*

Здесь $O_p(G)$ для простого числа p означает наибольшую нормальную p-подгруппу группы G. *Локально циклической* называется группа, любая конечно порожденная подгруппа которой циклическая, при этом локально циклической

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13–01–00505) и программы СО РАН проектов партнерских фундаментальных исследований на 2012–2014 гг. (проект № 14). Работа второго автора выполнена за счет Российского научного фонда (код проекта 14–21–00065).

считается и циклическая группа. Бесконечная локально циклическая p-группа, где p — простое число, изоморфна группе

$$C_p = \langle a_0, a_1, \dots \mid a_0^p = 1, a_{i+1}^p = a_i \ \text{ для } i = 0, 1, \dots \rangle.$$

Локально кватернионная 2-группа — это либо конечная (обобщенная) группа кватернионов, либо объединение бесконечной возрастающей последовательности обобщенных кватернионных групп. Таким образом, бесконечная локально кватернионная группа изморфна группе

$$Q = \langle C_2, b \mid b^2 = a_0,\ a_i^b = a_i^{-1},\ i = 0, 1, \dots \rangle.$$

Группа A, действующая на нетривиальной группе B, действует *свободно*, если $b^a \neq b$ для $1 \neq a \in A$, $1 \neq b \in B$. При этом само действие называется *свободным действием*.

1. Предварительные результаты

Лемма 1.1 [7, теорема 16.8.7]. *Группа порядка $p^a q^b$, где p, q — простые числа, $a, b \in \mathbb{N}$, разрешима.*

Лемма 1.2 [8, теорема V.8.15]. *Пусть конечная группа H действует свободно на конечной группе V.*

(1) *Если $|H| = pq$, где p и q — простые* (*не обязательно различные*) *числа, то H — циклическая группа.*

(2) *Если $|H| = p^a$, где p — простое число, $a \in \mathbb{N}$, то при $p > 2$ группа H циклическая, а при $p = 2$ она либо циклическая, либо является* (*обобщенной*) *группой кватернионов.*

Автоморфизм α порядка n конечной группы G называется *расщепляющим*, если $gg^\alpha \cdots g^{\alpha^{n-1}} = 1$ для любого $g \in G$.

Лемма 1.3. (1) *Пусть α — расщепляющий автоморфизм порядка 3 группы G. Тогда G нильпотентна ступени нильпотентности, не превосходящей трех, и порядок любого элемента из третьего члена ее нижнего центрального ряда делит число 3.*

(2) *Пусть H — нормальная подгруппа, а x — элемент порядка 3 из группы G. Если $(hx)^3 = 1$ для любого элемента $h \in H$, то H нильпотентна ступени 3 или меньше. Кроме того, если H не содержит элементов порядка 3, то H нильпотентна ступени нильпотентности, не превосходящей двух, и $\langle A, A^x \rangle = \langle A, A^x, A^{x^2} \rangle$ — инвариантная относительно $\langle x \rangle$ подгруппа для любой подгруппы A из H. Если при этом A абелева, то $\langle A, A^x \rangle = AA^x$ абелева.*

Доказательство. П. (1) — это лемма 6 из [9].

(2) Так как $1 = (hx)^3 = hxhxhx = hh^{x^2}h^x$, то x^2 индуцирует в H расщепляющий автоморфизм порядка 3, и заключение следует из п. (1).

Пусть A — подгруппа из H. Тогда $aa^x a^{x^2} = 1$ для $a \in A$, откуда $A^{x^2} \leq \langle A, A^x \rangle$, т. е. $\langle A, A^x \rangle = \langle A, A^x, A^{x^2} \rangle$ — инвариантная относительно $\langle x \rangle$ подгруппа.

Пусть A абелева, $a \in A$. Поскольку $aa^x a^{x^2} = 1$, то $a^{x^2} = (a^{-1})^x a^{-1}$ для любого $a \in A$. Заменяя в этом равенстве a на a^{-1}, получим $(a^{-1})^{x^2} = a^x a$, откуда $a^x a a^{x^2} = 1$ и $aa^x = a^x a$ для любого $a \in A$. Пусть b — еще один элемент из A. По доказанному

$$(a^x a)(b^x b) = (a^{-1})^{x^2}(b^{-1})^{x^2} = (a^{-1}b^{-1})^{x^2} = (ab)^x ab = a^x b^x ab,$$

т. е. $ab^x = b^x a$. Отсюда вытекает, что $[A, A^x] = 1$, т. е. AA^x — абелева подгруппа. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Если T — нетривиальная 2-группа, действующая свободно на периодической группе R, то R абелева, T обладает единственной подгруппой $\langle t\rangle$ порядка 2, $r^t = r^{-1}$ для любого $r \in R$ и T — локально циклическая или локально кватернионная группа.*

Доказательство. Пусть G — полупрямое произведение R на T и t — инволюция из T. Очевидно, что $C_{R\langle t\rangle}(t) = \langle t\rangle$. Выберем произвольный элемент r из R. Элемент $x = t^r t$ содержится в R и $x^t = x^{-1}$, поэтому порядок x нечетен и в $\langle t^r, t\rangle$ найдется инволюция u, для которой $t^{ru} = t$. Отсюда $ru = t$, $r = tu$, $r^t = ut = r^{-1}$. Если $r_1, r_2 \in R$, то $r_2^{-1}r_1^{-1} = (r_1r_2)^{-1} = (r_1r_2)^t = r_1^t r_2^t = r_1^{-1}r_2^{-1}$, откуда $r_1r_2 = r_2r_1$ и R абелева.

Пусть u — инволюция из T, $1 \neq r \in R$. По доказанному $r^u = r^{-1}$, т. е. $r^{ut} = r$. По условию $ut = 1$, т. е. $u = t$ и t — единственная инволюция в T. По известной теореме Шункова (см. [10, лемма 4]) группа T локально циклическая или локально кватернионная. Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Пусть $F = \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^3\rangle$. Тогда отображение $x \to a$, $y \to au$ продолжается до изоморфизма $\varphi : F \to F_0$, где $F_0 = \langle a, u, v \mid 1 = a^3 = [u, v],\ u^a = v,\ v^a = u^{-1}v^{-1}\rangle$ — расширение свободной абелевой группы $\langle u, v\rangle$ ранга 2 посредством группы автоморфизмов $\langle a\rangle$ порядка 3. При этом $u = (yx^{-1})^\varphi$, $v = (x^{-1}y)^\varphi$.*

Доказательство. Положим $b = yx^{-1}$, $c = x^{-1}y$. Тогда

$$[b, c] = b^{-1}c^{-1}bc = xy^{-1}y^{-1}xyx^{-1}x^{-1}y = (xy)^3 = 1.$$

Кроме того,

$$b^x = x^{-1}(yx^{-1})x = x^{-1}y = c,$$

$$c^x = x^{-1}(x^{-1}y)x = xyx = (yx^{-1})^{-1}(x^{-1}y)^{-1} = b^{-1}c^{-1}.$$

Эти вычисления показывают, что отображение $a \to x$, $u \to b = yx^{-1}$, $v \to c = x^{-1}y$ продолжается до гомоморфизма F_0 на $\langle x, yx^{-1}, x^{-1}y\rangle = F$. С другой стороны, $F_0 = \langle a, u, v\rangle = \langle a, u, u^a\rangle = \langle a, u\rangle = \langle a, au\rangle$, при этом

$$(au)^3 = auauau = aua^{-1}a^{-1}ua \cdot u = u^{a^2}u^a u = u^{-1}v^{-1} \cdot v \cdot u = 1,$$

$$(a \cdot au)^3 = (a^{-1}u)^3 = u^a u^{a^2} u = 1.$$

Таким образом, отображение $x \to a$, $y \to au$ продолжается до гомоморфизма F на $F_0 = \langle a, au\rangle$ и, следовательно, φ является изоморфизмом. Лемма доказана.

Лемма 1.6. *Пусть G — группа, в которой нет элементарных абелевых подгрупп порядка 9, r — элемент порядка 3 из G такой, что для каждого $x \in G$ подгруппа $\langle r, r^x\rangle$ либо совпадает с $\langle r\rangle$, либо изоморфна A_4. Тогда $\langle r^G\rangle$ изоморфна $T\langle r\rangle$, где T — элементарная абелева нормальная в G 2-подгруппа.*

Доказательство. Это утверждение — частный случай теоремы 2 из [11].

Автоморфизм a абелевой группы V называется *квадратичным*, если найдутся такие целые числа m и n, что $v^{a^2} \cdot v^{ma}v^n = 1$ для любого $v \in V$.

Лемма 1.7 [12, теорема 1]. *Периодическая группа, порожденная двумя квадратичными автоморфизмами абелевой группы, конечна.*

Лемма 1.8. *Пусть G — непримарная $\{2,3\}$-группа без элементов порядка 6. Если централизатор каждой инволюции из G — элементарная абелева 2-группа, то G удовлетворяет п. (3) заключения теоремы.*

Доказательство. Утверждение является частным случаем теоремы 2 из [13].

Лемма 1.9. *Пусть $\delta \in \{-1, 1\}$. Тогда группа*

$$K = \langle x, y, u \mid 1 = x^3 = y^3 = u^2 = (xu)^2 = (xy)^3 = (uy)^3 = (x^\delta uy)^3 \rangle$$

изоморфна A_4.

Доказательство. Вычисления в GAP [14].

2. Доказательство теоремы

Пусть G — непримарная $\{2,3\}$-группа без элементов порядка 6.

Лемма 2.1 [6, теорема 1.2]. *Если G локально конечна, то выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) *$G = R \cdot T$, где R — абелева нормальная в G 3-подгруппа, T — 2-группа с единственной подгруппой порядка 2, действующая свободно на R;*

(2) *$G = T \cdot R$, где T — нормальная нильпотентная 2-подгруппа, ступень нильпотентности которой не превосходит двух, R — локально циклическая 3-подгруппа, действующая свободно на T;*

(3) *$G = T \cdot (R \cdot \langle t \rangle)$, где T — нормальная в G нильпотентная 2-подгруппа, ступень нильпотентности которой не превосходит двух, R — локально циклическая 3-подгруппа, действующая свободно на T при сопряжении в G, и $r^t = r^{-1}$ для любого $r \in R$.*

Лемма 2.2. *Пусть x, y — элементы порядка 3 из G и $K = \langle x, y \rangle$ — конечная подгруппа. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) *K является 3-группой;*

(2) *порядок одного из элементов xy, xy^{-1} равен 3 и $K = A\langle x \rangle$, где $A = \langle u, v \rangle$ — абелева нормальная в K 2-подгруппа, $u^x = v$, $v^x = u^{-1}v^{-1}$ и порядок любого элемента ax, где $a \in A$, равен 3.*

Доказательство. Если не выполнен п. (1), то K содержит элемент порядка 2. По лемме 2.1 K содержит нетривиальную нормальную 2-подгруппу T, такую, что $K = T\langle x \rangle = T\langle y \rangle$ и порядок любого элемента из $K \setminus T$ равен 3. Так как оба элемента xy и xy^{-1} не могут содержаться в T, порядок одного из них, скажем элемента xy, равен 3. Теперь K является гомоморфным образом группы F из леммы 1.5, откуда вытекает, что для K выполнен п. (2). Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Из п. (1) теоремы следует п. (2), из п. (3) — п. (1).*

Доказательство. Предположим, что $O_2(G) \neq 1$. Пусть x — элемент порядка 3 из G. Тогда $\langle x \rangle$ действует свободно на $O_2(G)$ сопряжением и, следовательно, $(hx)^3 = 1$ для любого $h \in O_2(G)$. По лемме 1.3(2) $O_2(G)$ нильпотентна, поэтому x индуцирует квадратичный автоморфизм в $V = O_2(G)/\Phi(O_2(G))$. Если $y \in G$ — элемент порядка 3, то по лемме 1.7 группа $\langle x, y \rangle C_G(V)/C_G(V)$ конечна. Очевидно, $C_G(V) = O_2(G)$, откуда группа $\langle x, y \rangle$ конечна, и выполняется п. (2) теоремы.

Предположим, что $O_3(G) \neq 1$. Пусть $t \in G$ — элемент порядка 2. Поскольку $\langle t \rangle$ действует свободно на $O_3(G)$, по лемме 1.4 $O_3(G)$ абелева и $tO_3(G)$ — единственная инволюция в $G/O_3(G)$. Следовательно, $G/O_3(G)$ — 2-группа, все элементы порядка 3 содержатся в $O_3(G)$, и снова выполнен п. (2) теоремы. То, что из п. (3) следует п. (1), очевидно, и лемма доказана.

Предположим, что существует непустое G-инвариантное подмножество $\Lambda \subseteq G$ элементов порядка 3 такое, что группа $\langle x, y \rangle$ конечна для любых $x, y \in \Lambda$.

Лемма 2.4. *Пусть $x \in \Lambda$, t — инволюция из G, $K = \langle x, t \rangle$. Тогда K конечна и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *K изоморфна знакопеременной группе A_4 степени* 4;

(2) *в K содержатся абелева 2-подгруппа T индекса 6, порожденная двумя элементами и нормальная в K, и элемент $y \in \Lambda$, для которых $K = T\langle y, t \rangle$ и $y^t = y^{-1}$.*

Доказательство. Пусть вначале $t \in X = \langle x, x^t \rangle$. По условию X конечна. По лемме 2.2 $K = T\langle x \rangle$, где T — абелева двупорожденная 2-подгруппа, нормальная в K. Очевидно, что $t \in K$, поэтому $V = \langle t, t^x, t^{x^2} \rangle$ — элементарная абелева группа порядка 4. Поскольку V инвариантна относительно $\langle x \rangle$ и $K = \langle V, x \rangle$, то $K \simeq A_4$.

Пусть $t \notin X$. Так как X инвариантна относительно $\langle t \rangle$, то $K = X\langle t \rangle$ и $|K : X| = 2$.

Если X является 3-группой, то по лемме 1.4 она абелева и $a^t = a^{-1}$ для любого $a \in X$, в частности, $x^t = x^{-1}$. В этом случае выполнен п. (2) заключения с $T = 1$, $x = y$.

Если же X содержит элемент порядка 2, то по лемме 2.3 $T = O_2(X)$ является двупорожденной абелевой 2-группой и $X = T\langle x \rangle$. Поскольку $Xtt^x = Xtx^{-1}tx = Xt^2 = X$, то $tt^x \in X$. Кроме того, $tt^x \notin T$, иначе $Tt^x = Tt$ и K/T абелева порядка 6. Значит, tt^x не является 2-элементом, поэтому порядок $y = tt^x$ равен 3. Так как $y^t = y^{-1}$ и $\langle x \rangle$ — силовская 3-подгруппа группы K, лемма доказана.

Лемма 2.5. *Если G содержит инволюцию t такую, что порядок tx равен 3 для любого элемента $x \in \Lambda$, то G удовлетворяет п. (2) заключения теоремы.*

Доказательство. Предположим, что $\Delta = t^G$, x — некоторый фиксированный элемент из Λ. Индукцией по n покажем, что $d_1 \cdots d_n x \in \Lambda$ для всех $d_1, \dots, d_n \in \Delta$. Если $n = 1$, то $d_1 = t^g$ для некоторого $g \in G$ и $d_1 x = (tx^{g^{-1}})^g$. Поскольку по условию леммы порядок $tx^{g^{-1}}$ равен 3, порядок $d_1 x$ тоже равен 3.

В силу того, что $d_1 x x^{-1} = d_1$ является инволюцией, $K = \langle x, d_1 x \rangle \simeq A_4$. В частности, $d_1 x$ сопряжен с x в K, т. е. $d_1 x \in \Lambda$.

Положим $y = d_2 \cdots d_n x$. По индукции $y \in \Lambda$. Теперь $d_1 \cdot d_n x = d_1 y$ и, как выше, можно показать, что $d_1 y \in \Lambda$.

Пусть $D = \langle \Delta \rangle$. Тогда D нормальна в G и по уже доказанному порядок dx равен 3 для любого $d \in D$. По п. (2) леммы 1.3 D нильпотентна. Таким образом, выполняется п. (1) теоремы. Утверждение леммы следует из леммы 2.3.

Лемма 2.6. *Предположим, что $x \in \Lambda$ и $t \in G$ — инволюция, для которой $(xt)^3 \neq 1$. Тогда существует элемент u, сопряженный с t, такой, что $x^u = x^{-1}$.*

Доказательство. Пусть $K = \langle t, x \rangle$. Тогда $K = \langle x, x^t \rangle \langle t \rangle$, и поскольку по условию $L = \langle x, x^t \rangle$ конечна, K конечна. По лемме 2.2 $t \notin L$ и, следовательно,

$|K : L| = 2$. Если L — 3-группа, то по лемме 1.4 $l^t = l^{-1}$ для любого $l \in L$, и заключение леммы верно.

Предположим, что L не является 3-группой. По лемме 2.2 L содержит нормальную абелеву 2-подгруппу A индекса 3 и порядок ax равен 3 для любого $a \in A$. Поскольку $\langle x \rangle$ — силовская 3-подгруппа группы L, по замечанию Фраттини $K = LN_K(\langle x \rangle)$. По предположению $C_K(x) = \langle x \rangle$, поэтому $S = N_K(\langle x \rangle) \simeq S_3$ и S содержит инволюцию u, для которой $x^u = x^{-1}$. Покажем, что u сопряжен с t. Действительно, если $tu \in A$, то можно заменить u на ux, тем самым можно предполагать, что $tu \notin A$. В этом случае порядок tu делится на 3, т. е. равен 3. Это показывает, что u и t сопряжены в $\langle t, u \rangle$. Лемма доказана.

Лемма 2.7. *Пусть $x \in \Lambda$. Тогда $R = C_G(x)$ — абелева силовская 3-подгруппа группы G. Кроме того, существует инволюция $u \in N_G(R)$, для которой $r^u = r^{-1}$ для любого $r \in R$, и все инволюции из G сопряжены с u.*

Доказательство. По леммам 2.5 и 2.6 найдется инволюция u, для которой $x^u = x^{-1}$. Пусть R — силовская 3-подгруппа из G, содержащая $\langle x \rangle$. Если $\langle x \rangle \trianglelefteq R$, то $R \leq C_G(x)$, и поскольку $C_G(x)$ является 3-группой, то $R = C_G(x)$. Теперь $\langle u \rangle$ действует свободно на R, стало быть, R абелева и $r^u = r^{-1}$ для любого $r \in R$.

Пусть t — инволюция из G. По леммам 2.5 и 2.6 найдется сопряженная с t инволюция v, для которой $x^v = x^{-1}$. Поэтому $x^{uv} = x$ и $uv \in R$. Теперь uv — элемент нечетного порядка, тем самым v сопряжен с u в $\langle u, v \rangle$. Так как t сопряжен с u, лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы. Пусть $x \in \Lambda$. По леммам 2.5–2.7 найдется инволюция $u \in G$, для которой $x^u = x^{-1}$, и все инволюции из G сопряжены с u.

Если $x^t = x^{-1}$ для любой инволюции $t \in G$, то $t^G \subseteq N_G(\langle r \rangle)$, по лемме 2.7 $O_3(G) \neq 1$ и по лемме 2.2 выполнено заключение теоремы.

Пусть $x^t \neq x^{-1}$ для некоторой инволюции $t \in G$. В силу леммы 2.2 $O_2(\langle x, x^t \rangle) \neq 1$ и для некоторой инволюции $v \in O_2(\langle x, x^t \rangle)$ порядок vx равен 3. Так как v и u сопряжены, найдется $g \in G$ такой, что $uy \in \Lambda$ для $y = x^g$. Пусть $K = \langle u, x, y \rangle$. По условию $L = \langle x, y \rangle$ — конечная подгруппа. Если $\langle x, y \rangle$ — 3-группа, то $C_G(x)$ содержит элемент z порядка 3, лежащий в центре группы $\langle x, y \rangle$, тем самым $z^u = z^{-1}$. Далее, $y \in C_G(z)$, и снова $y^u = y^{-1}$, что противоречит тому, что $(yu)^3 = 1$. Поэтому $\langle x, y \rangle$ не является 3-подгруппой, и по лемме 2.2 порядок одного из элементов xy, xy^{-1} равен 3. Поскольку x и x^{-1} сопряжены в G, можно считать, что порядок xy равен 3 и $xy \in \Lambda$. Итак, выполнены равенства

$$1 = x^3 = y^3 = u^2 = (xu)^2 = (xy)^3 = (uy)^3.$$

Кроме того, так как $uy \in \Lambda$, из леммы 2.2 вытекает, что либо $(xuy)^3 = 1$, либо $(x^{-1}uy)^3 = 1$. В любом случае по лемме 2.2 K — гомоморфный образ знакопеременной группы A_4, что невозможно. Теорема доказана.

3. Примеры

В этом разделе приведены примеры, иллюстрирующие теорему.

1. Пример простой группы экспоненты $3 \cdot 2^{48}$ без элементов порядка 6 из [4] показывает, что в общем случае $\{2, 3\}$-группа без элементов порядка 6 не обязана содержать нетривиальную примарную нормальную подгруппу.

Для дальнейшего нам потребуется понятие индуцированного действия из [15].

Пусть H — подгруппа группы G и $G = \bigcup\limits_{i\in I} Hg_i$ — разложение G на смежные классы по H. Пусть H действует на группе W. Для каждого $i \in I$ рассмотрим множество $W_i = \{(w,i) \mid w \in W\}$ и определим на нем операцию умножения по правилу $(w_1,i)(w_2,i) = (w_1w_2,i)$, где $w_1, w_2 \in W$. Понятно, что относительно этого умножения W_i является группой, изоморфной W. Пусть V — прямое произведение всех групп W_i, $i \in I$. Легко проверить, что следующие правила определяют действие G на V:

(а) если $v = w_i$ — элемент из W_i, т. е. $w_i = (w,i)$, где $w \in W$, $i \in I$ и g — элемент группы G, то $w_ig = w_k = (u,k)$, где $g_ig = hg_k$, $h \in H$, $k \in I$ и $u = wh \in W$;

(б) если $v = w_{i_1} \dots w_{i_n}$, где $w_{i_j} \in W_{i_j}$, $i_j \in I$, $i_j \neq i_k$ при $j \neq k$ и g — элемент из G, то $vg = (w_{i_1}g)\dots(w_{i_n}g)$.

Это действие очевидным образом обобщает операцию индуцирования, хорошо известную в теории представлений конечных групп. В дальнейшем будем называть его *индуцированным действием G на $V = W^G$*.

Лемма 3.1. *Пусть H — подгруппа группы G, действующая свободно на группе W. Если H содержит все элементы простых порядков из G, то G действует свободно при индуцированном действии G на $V = W^G$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся нетривиальный элемент $v \in W^G$ и элемент $g \in G$ простого порядка такие, что $vg = v$. По условию $g \in H$, $v = w_{i_1} \cdots w_{i_n}$, где n — некоторое натуральное число, $w_{i_j} = (v_j, i_j) \in W_{i_j}$, $i_j \in I$, $i = 1,\dots,n$ и $i_j \neq i_k$, если $j \neq k$. Так как $g_{i_j}g = g_{i_j}gg_{i_j}^{-1}g_{i_j}$ и $g_{i_j}gg_{i_j}^{-1} \in H$, то $w_{i_j}g = (v_j,i_j)g = \big(v_j\big(g_{i_j}gg_{i_j}^{-1}\big), i_j\big)$. Поскольку H действует свободно на W, то $(v_j,i_j)g = (v'_j, i_j)$, где $v_j \neq v'_j$. Отсюда $vg \neq v$ вопреки предположению. Лемма доказана.

2. Пусть A — произвольная абелева 3-группа,

$$Q = \big\langle b, c_0, c_1, \dots \mid b^2 = c_0, c_i^2 = c_{i-1}, c_i^b = c_i^{-1} \ \text{ для } i \geq 1\big\rangle$$

— локально кватернионная группа. Определим действие группы $\langle c_0\rangle$ на A по правилу

$$a^{c_0} = a^{-1} \ \text{ для всех } a \in A.$$

Тогда полупрямое произведение G группы A^Q на Q, соответствующее индуцированному действию Q на A^Q, является $\{2,3\}$-группой без элементов порядка 6. Этот пример показывает, что усилить п. 3(а) теоремы невозможно.

3. Пусть F — поле порядка 4 и δ — элемент порядка 3 из мультипликативной группы F. Группа

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \alpha & \delta^i & \cdot \\ \beta & \gamma & \delta^{2i} \end{pmatrix} \mid i = 0,1,2;\ \alpha,\beta,\gamma \in F \right\}$$

является расширением неабелевой 2-группы

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha,\beta,\gamma \in F \right\}$$

посредством циклической группы H, порожденной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \delta & \cdot \\ \cdot & \cdot & \delta^2 \end{pmatrix}$. При этом H действует свободно на W.

Пусть G — произвольная группа с единственной подгруппой H порядка 3. Отметим, что в общем случае G не обязана быть локально конечной (см. соответствующие примеры в [15]). По лемме 3.1 G действует свободно на $V = W^G$ и соответствующее расщепляемое расширение U посредством G является $\{2, 3\}$-группой без элементов порядка 6 из п. 3(b) теоремы, в которой $O_2(VG)$ является неабелевой 2-группой.

4. Если в примере 3 заменить G расширением локально циклической 3-группы R посредством группы $\langle t\rangle$ порядка 2, для которой $r^t = r^{-1}$ при любом $r \in R$, то получится группа из п. 3(c) теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Neumann B. H.* Groups whose elements have bounded orders // J. London Math. Soc. 1937. V. 12. P. 195–198.

2. *Санов И. Н.* Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // Уч. зап. Ленингр. гос. ун-та. Сер. мат. 1940. № 55. С. 166–170.

3. *Лыткина Д. В.* Строение группы, порядки элементов которой не превосходят числа 4 // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 353–358.

4. *Мазуров В. Д.* О группах периода 24 // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 6. С.766–781.

5. *Джабара Э., Лыткина Д. В.* О группах периода 36 // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 44–48.

6. *Jabara E., Lytkina D. V., Mazurov V. D.* Some groups of exponent 72 // J. Group Theory. 2014. V. 17, N 6. P. 947–955.

7. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

8. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1979.

9. *Журтов А. Х.* О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 329–338.

10. *Лыткина Д. В.* О периодических группах, действующих свободно на абелевой группе // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 3. С. 379–387.

11. *Мазуров В. Д.* Характеризация знакопеременных групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 1. С. 54–69.

12. *Журтов А. Х.* О квадратичных автоморфизмах абелевых групп // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 3. С. 320–328.

13. *Мазуров В. Д.* О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 1. С. 74–86.

14. *GAP*: Groups, algorithms, and programming, http://www/gap-system.org //.

15. *Журтов А. Х., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д., Созутов А. И.* О периодических группах, свободно действующих на абелевых группах // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 136–143.

Статья поступила 30 августа 2014 г.

Лыткина Дарья Викторовна
Сибирский гос. университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
daria.lytkin@gmail.com

Мазуров Виктор Данилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
mazurov@math.nsc.ru