Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6

УДК 517.95

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕССЕЛЕВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

А. О. Лопушанский

Аннотация. Для уравнения с дробными производными установлено существование решения задачи Коши, классического по временной переменной и принадлежащего классам бесселевых потенциалов по пространственным переменным.

Ключевые слова: обобщенная функция, свертка, производная дробного порядка, пространства бесселевых потенциалов, функция Грина.

Задача Коши

$$\begin{gathered} Lu \equiv u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F_0(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T], \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \quad a = \text{const}, \end{gathered} \tag{1}$$

с производной Римана — Лиувилля $u_t^{(\beta)}$ порядка $\beta \in (0,1)$ и задача Коши

$$\begin{gathered} L^{\text{reg}}u \equiv D_t^\beta u + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F_0(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{gathered} \tag{2}$$

с регуляризованной производной [1, 2] порядка $\beta \in (0,1)$

$$D_t^\beta u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta}\,d\tau - \frac{u(x,0)}{t^\beta}\right), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T],$$

а также для более общих уравнений и $\beta \in (1,2)$ исследовались многими авторами [1, 3–16] (для $\alpha = 2$ библиография приведена в [1]). Здесь $(-\Delta)^{\alpha/2}$ определено с помощью преобразования Фурье:

$$\mathscr{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}\psi(x)] = |\lambda|^\alpha \mathscr{F}[\psi(x)].$$

Получены теоремы существования и единственности, представления решений с помощью вектор-функций Грина, изучены свойства решений.

Так как производная дробного порядка функции зависит от ее значений в предыдущие моменты времени, уравнения с дробными производными, в частности вида (1) и (2), описывают некоторые модели [9–14, 17–19] так называемой аномальной диффузии, возникающей в аморфных, коллоидных и пористых средах, в биологии, экологии (например, в моделировании плотности загрязнения с течением времени). Имеем медленную диффузию (субдиффузию) при $\beta \in (0,1)$, быструю диффузию (супердиффузию) при $\beta \in (1,2)$, обыкновенную диффузию при $\beta = 1$.

Важное значение в построении решений задач и в приложениях имеют фундаментальные решения уравнений. Из результатов в [4] получаем представление фундаментального решения уравнения (1) с помощью H-функции Фокса при $\beta < \alpha$. Для особого случая производных одного и того же дробного порядка ($\beta = \alpha$) по временной и пространственным переменным фундаментальное решение уравнения (2) построено в [5, 12], в [13] для $n = 1$ получено его представление с помощью H-функции Фокса, а в [7, 8] даны новые представления и новые качественные свойства в одно- и многомерном случаях такого волнового уравнения с дробными производными.

В [15] доказана разрешимость задачи (1) при u_0, F_0 из пространств обобщенных функций D'. Установлен характер особенностей решения при $t = 0$ в зависимости от порядка сингулярности заданной обобщенной функции в начальном условии и характера степенных особенностей функции в правой части уравнения. В случае $\alpha = 2$, $n = 1$ в [16] показана однозначная разрешимость этой задачи с правыми частями из определенных подпространств пространства обобщенных функций медленного роста по пространственным переменным.

Целью настоящей работы является доказательство разрешимости задачи (2) в пространствах $C_{\alpha,\beta}([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n))$ функций, принадлежащих классам бесселевых потенциалов $H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ по пространственным переменным, классических по времени.

1. Обозначения, определения и основной результат

Введем обозначения: пусть $Q_T = \mathbb{R}^n \times (0, T]$, $n = 1, 2, \dots,$ $S(\mathbb{R}^n)$ — пространство бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций (см. [20, 21]), $D(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в $\mathbb{R}^n$, $S'(\mathbb{R}^n)$, $D'(\mathbb{R}^n)$ — пространства линейных непрерывных функционалов (обобщенных функций) соответственно на $S(\mathbb{R}^n)$, $D(\mathbb{R}^n)$, (f, φ) — значение $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ ($f \in D'(\mathbb{R}^n)$) на основной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ (соответственно $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$).

Обозначаем через $g \hat{*} \varphi$ свертку обобщенной функции g и основной функции φ [21]:

$$(g \hat{*} \varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x + \xi)),$$

через $f * g$ — свертку обобщенных функций f и g, т. е. такую обобщенную функцию $f * g$, для которой

$$(f * g, \varphi) = (f, g \hat{*} \varphi) \quad \text{для каждой основной функции } \varphi.$$

Используем функцию $f_\lambda(t) = \frac{H(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ при $\lambda > 0$ и $f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t)$ при $\lambda \le 0$, где $H(t)$ — единичная функция Хевисайда, $\Gamma(\lambda)$ — гамма-функция. Имеют место соотношения

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}, \quad f_\lambda \hat{*} f_\mu = f_{\lambda+\mu}.$$

Напомним, что производная $v_t^{(\beta)}(x,t)$ Римана — Лиувилля порядка $\beta > 0$ определяется по формуле

$$v_t^{(\beta)}(x,t) = f_{-\beta}(t) * v(x,t).$$

Обозначим через $C_{(\alpha,\beta)}(Q_T)$ класс непрерывных функций $v(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}_T$, равных нулю при $t \ge T$ и таких, что функции $(-\Delta)^{\alpha/2} v$ и $D_t^\beta v$ непрерывны в Q_T.

Отметим, что

$$D_t^\beta v(x,t) = v_t^{(\beta)}(x,t) - \frac{v(x,0)}{\Gamma(1-\beta)t^\beta}, \quad v \in C_{(\alpha,\beta)}(Q_T).$$

Пусть далее $s \in \mathbb{R}$, $p > 1$,

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{v \in S'(\mathbb{R}^n) : \|v\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathscr{F}v]\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < +\infty\}$$

— пространство бесселевых потенциалов [22],

$$C([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)) = \{v : \|v\|_{C([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))} = \max_{t\in[0,T]} \|v(\cdot,t)\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} < +\infty\}$$

— пространство непрерывных функций $v : [0,T] \ni t \longmapsto v(\cdot,t) \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$C_{\alpha,\beta}([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)) = \big\{v \in C\big([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big) : \\ D_t^\beta v, (-\Delta)^{\alpha/2} v \in C([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n))\big\}$$

— подпространство с нормой

$$\|v\|_{C_{\alpha,\beta}([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))} \\ = \max\big\{\|v\|_{C([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))}, \|(-\Delta)^{\alpha/2}v\|_{C([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))}, \big\|D_t^\beta v\big\|_{C([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))}\big\}.$$

Определение [1, 15, 16]. *Вектор-функцией Грина* задачи Коши (1) (а также задачи (2)) называется пара функций $(G_0(x,t), G_1(x,t))$ такая, что при ограниченной, непрерывной и гёльдеровой по переменным $x \in \mathbb{R}^n$ при каждом $t \in [0,T]$ функции $F_0(x,t)$, ограниченной и непрерывной $u_0(x)$, функция

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y, t-\tau) F_0(y,\tau)\, dy + \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x-y,t) u_0(y)\, dy, \quad (x,t) \in Q_T,$$

является классическим (класса $C_{(\alpha,\beta)}(Q_T)$) решением задачи (2).

Из определения следует, что

$$(LG_0)(x,t) = \delta(x,t), \quad (x,t) \in Q_T,$$

где δ — дельта-функция Дирака,

$$(L^{\mathrm{reg}} G_1)(x,t) = 0,\ (x,t) \in Q_T, \quad G_1(x,0) = \delta(x),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Предположение $(L_{\alpha,\beta})$. $\beta \in (0,1)$, $\min\{n, 2, \alpha\} > (n-1)/2$, $\beta < \alpha$.

Существование вектор-функции Грина в предположении $(L_{\alpha,\beta})$ установлено в [3, 4]. В [15] доказано, что

$$G_1(x,t) = f_{1-\beta}(t) * G_0(x,t), \quad (x,t) \in Q_T,$$

и найдены оценки компонент вектор-функции Грина.

Заметим, что при условии

$$(F_0 * G_0)(x,0) = 0 \tag{3}$$

обе производные (Римана — Лиувилля и регуляризованная) дробного порядка $\beta \in (0,1)$ функции $F_0 * G_0$ совпадают, т. е. $(F_0 * G_0)_t^{(\beta)}(x,t) = D_t^\beta (F_0 * G_0)(x,t)$.

Из определения и свойств вектор-функции Грина следует, что в предположении существования сверток и выполнения условия (3) функция

$$u(x,t) = F_0(x,t) * G_0(x,t) + u_0(x) * G_1(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{4}$$

удовлетворяет уравнению

$$L^{\mathrm{reg}}(F_0 * G_0 + u_0 * G_1) = F_0 \tag{5}$$

и является единственным решением задачи (2).

При дополнительных условиях (например таких, как в определении) функция (4) принадлежит классу $C_{(\alpha,\beta)}(Q_T)$ [1].

С учетом формулы (4) получаем разрешимость задачи Коши (2) во всей шкале пространств $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ по пространственным переменным. Именно, справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение* $(L_{\alpha,\beta})$, $1 < p < \frac{1}{\beta}$, $s \in \mathbb{R}$,

$$u_0 \in H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n), \quad F_0(x,t) = f_{1-\beta}(t) * f(x,t), \quad f \in C([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)).$$

Тогда существует единственное решение

$$u(x,t) = f(x,t) * G_1(x,t) + u_0(x) * G_1(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{6}$$

задачи (2), *причем* $u \in C_{\alpha,\beta}([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n))$ *и имеет место неравенство коэрцитивности*

$$\|u\|_{C_{\alpha,\beta}([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))} \le b_0 \|f\|_{C([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))} + b_1 \|u_0\|_{H^{s+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)}, \tag{7}$$

где b_0, b_1 *— положительные постоянные.*

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение* $(L_{\alpha,\beta})$, $0 < \theta < 1$ $s \in \mathbb{R}$, $p > 1$ *и* $p(1-\beta\theta) < 1$, $u_0 \in H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$, $F_0 \in C([0,T]; H^{s+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n))$. *Тогда существует единственное решение*

$$u(x,t) = F_0(x,t) * G_0(x,t) + u_0(x) * G_1(x,t), \quad (x,t) \in Q_T,$$

задачи (2), *причем* $u \in C_{\alpha,\beta}([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))$ *и имеет место неравенство коэрцитивности*

$$\|u\|_{C_{\alpha,\beta}([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))} \le k_0 \|F_0\|_{C([0,T];H^{s+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n))} + k_1 \|u_0\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)},$$

где k_0, k_1 *— положительные постоянные.*

2. Разрешимость задачи в пространствах бесселевых потенциалов

Лемма 1. *Функции* $g_j(\xi,t,\varrho) = (1+|\xi|^2)^{\frac{\varrho}{2}} \mathscr{F}[G_j](\xi,t)$, $j = 0,1$, *при* $\varrho \le \alpha$ *и каждом* $t \in (0,T]$ *непрерывны и ограничены по переменным* $\xi \in \mathbb{R}^n$. *Существуют положительные постоянные* $c_j = c_j(p)$ *такие, что для всех* $p > 1$, $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$

$$\|\mathscr{F}^{-1}[g_j(\xi,t,\varrho)\mathscr{F}[\varphi]]\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le c_j w_j(t,\varrho) \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad t \in (0,T], \ j = 0,1, \tag{8}$$

где $w_0(t,\varrho) = t^{\beta-1} \max\{1, t^{-\frac{\beta\varrho}{\alpha}}\}$, $w_1(t,\varrho) = \max\{1, t^{-\frac{\beta\varrho}{\alpha}}\}$ *для каждого* $t \in (0,T]$.

Доказательство. Известно (см., например, [3]), что

$$\mathscr{F}[G_1](\xi,t) = E_{\beta,1}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta), \quad \mathscr{F}[G_0](\xi,t) = t^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta),$$

где $E_{\beta,\mu}(z) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p\beta+\mu)}$ — функция Миттаг-Леффлера [2].

Функция $E_{\beta,\mu}(-z)$ $(z>0)$ бесконечно дифференцируема и компактно монотонна при $\beta \in (0,1)$. При $\mu \geq \beta$ имеем $(-1)^k\big(\frac{d}{dz}\big)^k E_{\beta,\mu}(-z) \geq 0$ $(k = 0,1,2,\dots)$ и справедлива оценка

$$E_{\beta,\mu}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta) \leq \frac{C}{1+a^2|\xi|^\alpha t^\beta}, \quad C = \mathrm{const} > 0.$$

Ограниченность функций $g_j(\xi,t,\varrho)$, $j = 0,1$, по переменным $\xi \in \mathbb{R}^n$ при больших значениях $|\xi|^\alpha t^\beta$ следует из ограниченности функции

$$\frac{(1+z^2)^{\frac{\varrho}{2}}}{1+a^2 z^\alpha t^\beta} = \frac{z^\varrho\big(1+\frac{1}{z^2}\big)^{\frac{\varrho}{2}}}{1+a^2 z^\alpha t^\beta} \leq \frac{M_1 t^{-\frac{\beta\varrho}{\alpha}} v^{\frac{\varrho}{\alpha}}}{1+a^2 v}, \quad z = |\xi|,\ v = z^\alpha t^\beta,\ M_1 = \mathrm{const} > 0.$$

Согласно [23, с. 24] (а также [24, теорема 1.5]) для доказательства правильности оценок (8), т. е. что функции $g_j(\xi,t,\varrho)$, $j=0,1$, являются мультипликаторами в $L_p(\mathbb{R}^n)$ по переменным $\xi \in \mathbb{R}^n$, достаточно показать, что для каждого мультииндекса $l = (l_1,\dots,l_n)$, компоненты l_i которого принимают значения 0 или 1, для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t \in (0,T]$ имеют место оценки

$$\big|\xi^l D_\xi^l g_j(\xi,t,\varrho)\big| \leq c_{l,j} v_j(t,\varrho), \quad j = 0,1, \tag{9}$$

где $\xi^l = \xi_1^{l_1}\cdot\ldots\cdot\xi_n^{l_n}$, $D_\xi^l = \frac{\partial^{|l|}}{\partial\xi_1^{l_1}\ldots\partial\xi_n^{l_n}}$, $|l| = l_1+\dots+l_n$, $v_j(t,\varrho)$ — некоторые функции, $c_{l,j}$ — положительные постоянные, $j=0,1$.

Известно представление [3, 25]

$$E_{\beta,\mu}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta) = H_{1,2}^{1,1}\left(a^2|\xi|^\alpha t^\beta \middle| \begin{matrix}(0,1)\\(0,1)(1-\mu,\beta)\end{matrix}\right)$$

через H-функции Фокса [25]

$$H_{p,q}^{m,n}(z) = H_{p,q}^{m,n}\left(z \middle| \begin{matrix}(a_1,\alpha_1)\dots(a_p,\alpha_p)\\(b_1,\beta_1)\dots(b_q,\beta_q)\end{matrix}\right).$$

Для указанных мультииндексов l имеем

$$D_\xi^l H_{p,q}^{m,r}(a^2|\xi|^\alpha t^\beta) = \left(\frac{1}{|\xi|}\frac{d}{d|\xi|}\right)^{|l|} H_{p,q}^{m,r}(a^2|\xi|^\alpha t^\beta)\xi^l.$$

Применяя правило дифференцирования H-функций, находим

$$\left(\frac{1}{|\xi|}\frac{d}{d|\xi|}\right)^k H_{1,2}^{1,1}\left(a^2|\xi|^\alpha t^\beta \middle| \begin{matrix}(0,1)\\(0,1)(1-\mu,\beta)\end{matrix}\right)$$
$$= (-1)^k|\xi|^{-2k} H_{k+1,k+2}^{k+1,1}\left(a^2|\xi|^\alpha t^\beta \middle| \begin{matrix}(0,1)(0,\alpha)(2,\alpha)\dots(2k-2,\alpha)\\(2k+1,\alpha)\dots(1,\alpha)(0,1)(1-\mu,\beta)\end{matrix}\right).$$

Используя известную асимптотику H-функции при $|\xi|^\alpha t^\beta \to \infty$ [25, теорема 1.7] и при $|\xi|^\alpha t^\beta \to 0$ [25, теорема 1.11], получим оценки

$$\big|\xi^l D_\xi^l H_{1,2}^{1,1}(a^2|\xi|^\alpha t^\beta)\big| \leq \frac{\widehat{C}_l}{1+a^2|\xi|^\alpha t^\beta}, \quad \widehat{C}_l = \mathrm{const} > 0.$$

Кроме того,

$$D_\xi^l((1+|\xi|^2)^{\frac{\varrho}{2}}E_{\beta,\mu}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta)) = \sum_{k=0}^{l} C_{l,\gamma} D_\xi^{l-\gamma}(1+|\xi|^2)^{\frac{\varrho}{2}} D_\xi^\gamma E_{\beta,\mu}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta),$$

$$\xi_j D_{\xi_j}(1+|\xi|^2)^{\frac{\varrho}{2}} = \varrho\xi_j^2(1+|\xi|^2)^{\frac{\varrho}{2}-1} = \frac{\varrho\xi_j^2(1+|\xi|^2)^{\frac{\varrho}{2}}}{1+|\xi|^2} \leq \varrho(1+|\xi|^2)^{\frac{\varrho}{2}},$$

$$\left|\xi^{l-\gamma} D_\xi^{l-\gamma}(1+|\xi|^2)^{\frac{\varrho}{2}}\right| \leq \left|\varrho\left(\frac{\varrho}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{\varrho}{2}-|l-\gamma|\right)\right|(1+|\xi|^2)^{\frac{\varrho}{2}}$$

для указанных мультииндексов l,γ, где $C_{l,\gamma} = \mathrm{const} > 0$. В результате получаем оценки

$$\left|\xi^l D_\xi^l((1+|\xi|^2)^{\frac{\varrho}{2}}E_{\beta,\mu}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta))\right| \leq \frac{C_l(1+|\xi|^2)^{\frac{\varrho}{2}}}{1+a^2|\xi|^\alpha t^\beta}, \quad C_l = \mathrm{const} > 0,$$

и убеждаемся, что функции g_j, $j=0,1$, удовлетворяют (9) с функциями $v_j(t,\varrho)$ $= w_j(t,\varrho)$, $j=0,1$.

Примечание. Функции $g_0(\xi,t,\varrho)$ для $\varrho<\alpha$, $g_1(\xi,t,\alpha)$ для $\varrho\leq\alpha$ при каждом $\xi\in\mathbb{R}^n$ интегрируемы по t на $(0,T)$.

Далее c_i, $i=2,3,\ldots,$ — положительные постоянные.

Лемма 2. *Пусть выполнено предположение* $(L_{\alpha,\beta})$, $1<p<\frac{1}{\beta}$, $r\in\mathbb{R}$, $\varphi\in H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда существует свертка*

$$(G_1*\varphi)(x,t) = \int_0^t G_1(x,t-\tau)*\varphi(x)\,d\tau = \int_0^t G_1(x,t-\tau)\,d\tau*\varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

принадлежащая пространству $C([0,T];H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))$ *и удовлетворяющая оценке*

$$\|G_1*\varphi\|_{C([0,T];H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))} \leq c_2\|\varphi\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{10}$$

Доказательство. Оценим для каждого $t\in[0,T]$ норму

$$\|G_1*\varphi\|_{H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi*G_1\|_{H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathscr{F}[\varphi*G_1]]\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

С этой целью рассмотрим

$$\left\|\mathscr{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathscr{F}\left[\int_0^t \varphi(\cdot)*G_1(\cdot,t-\tau)\,d\tau\right]\right]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$
$$= \left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_0^t \mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathscr{F}[\varphi(\cdot)*G_1(\cdot,t-\tau)]]\,d\tau\right|^p dx\right\}^{1/p}$$
$$\leq t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} dx\int_0^t |\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathscr{F}[\varphi(\cdot)*G_1(\cdot,t-\tau)]]|^p\,d\tau\right\}^{1/p}.$$

Для всех $0\leq\tau<t\leq T$ имеем

$$h(\cdot,t,\tau) = \mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathscr{F}[\varphi(\cdot)*G_1(\cdot,t-\tau)]]$$
$$= \mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\mathscr{F}[G_1](\xi,t-\tau)(1+|\xi|^2)^{\frac{r}{2}}\mathscr{F}[\varphi](\xi)]$$
$$= \mathscr{F}^{-1}[g_1(\xi,t-\tau,\alpha)\mathscr{F}[\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{r}{2}}\mathscr{F}[\varphi](\xi)]]].$$

В силу леммы 1 функция $g_1(\xi,t-\tau,\alpha)$ является мультипликатором в $L_p(\mathbb{R}^n)$ по переменным ξ. По условию леммы $\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{r}{2}}\mathscr{F}[\varphi](\xi)]\in L_p(\mathbb{R}^n)$. Поэтому

$$\|h(\cdot,t,\tau)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le c_1w_1(t-\tau,\alpha)\|\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{r}{2}}\mathscr{F}[\varphi](\xi)]\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Из предыдущих преобразований

$$\left\|\mathscr{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathscr{F}\left[\int\limits_0^t\varphi(\cdot)*G_1(\cdot,t-\tau)\,d\tau\right]\right]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$
$$\le t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}|h(x,t,\tau)|^p\,dx\right\}^{1/p}$$
$$\le c_1t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int\limits_0^t w_1^p(t-\tau,\alpha)\|\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{r}{2}}\mathscr{F}[\varphi](\xi)]\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)}\,d\tau\right\}^{1/p}$$

и при $p<1/\beta$ (условии существования интеграла $\int\limits_0^t w_1^p(t-\tau,\alpha)\,d\tau$) для всех $t\in[0,T]$, $r\in\mathbb{R}$ получаем существование свертки $\int\limits_0^t\varphi(\cdot)*G_1(\cdot,t-\tau)\,d\tau$ в пространстве $H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ и оценку

$$\left\|\int\limits_0^t\varphi(\cdot)*G_1(\cdot,t-\tau)\,d\tau\right\|_{H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}\le c_1t^{1-\frac{1}{p}}\left[\int\limits_0^t w_1^p(t-\tau,\alpha)\,d\tau\right]^{1/p}\|\varphi\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{11}$$

Следовательно, $\varphi*G_1\in C([0,T];H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))$, и верна оценка (10).

Лемма 3. *Пусть выполнено предположение* $(L_{\alpha,\beta})$, $0<\theta<1$, $1<p<\frac{1}{1-\beta\theta}$, $r\in\mathbb{R}$, $\varphi\in H^{r+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда существует свертка*

$$(G_0*\varphi)(x,t)=\int\limits_0^t G_0(x,t-\tau)*\varphi(x)\,d\tau=\int\limits_0^t G_0(x,t-\tau)\,d\tau*\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

принадлежащая пространству $C([0,T];H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))$ *и удовлетворяющая оценке*

$$\|G_0*\varphi\|_{C([0,T];H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))}\le c_3\|\varphi\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{12}$$

Доказательство. Оценим для каждого $t\in[0,T]$ норму

$$\|G_0*\varphi\|_{H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}=\|\varphi*G_0\|_{H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}=\|\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathscr{F}[\varphi*G_0]]\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

С этой целью, как при доказательстве леммы 2, рассмотрим

$$\left\|\mathscr{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathscr{F}\left[\int\limits_0^t\varphi(\cdot)*G_0(\cdot,t-\tau)\,d\tau\right]\right]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$
$$\le t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n}dx\int\limits_0^t|\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathscr{F}[\varphi(\cdot)*G_0(\cdot,t-\tau)]]|^p\,d\tau\right\}^{1/p}.$$

Для всех $0 \le \tau < t \le T$ имеем

$$\begin{aligned} h_0(\cdot,t,\tau) &= \mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathscr{F}[\varphi(\cdot)*G_0(\cdot,t-\tau)]] \\ &= \mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha-\alpha\theta}{2}}\mathscr{F}[G_0](\xi,t-\tau)(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha\theta}{2}}\mathscr{F}[\varphi](\xi)] \\ &= \mathscr{F}^{-1}[g_0(\xi,t-\tau,\alpha-\alpha\theta)\mathscr{F}[\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha\theta}{2}}\mathscr{F}[\varphi](\xi)]]]. \end{aligned}$$

Согласно лемме 1 функция $g_0(\xi,t-\tau,\alpha-\alpha\theta)$ является мультипликатором в $L_p(\mathbb{R}^n)$ по переменным ξ. По условию леммы $\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha\theta}{2}}\mathscr{F}[\varphi](\xi)] \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Поэтому

$$\|h_0(\cdot,t,\tau)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le c_0 w_0(t-\tau,\alpha-\alpha\theta)\|\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha\theta}{2}}\mathscr{F}[\varphi](\xi)]\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Из предыдущих преобразований

$$\begin{aligned} &\left\|\mathscr{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathscr{F}\left[\int_0^t \varphi(\cdot)*G_0(\cdot,t-\tau)\,d\tau\right]\right]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &\qquad \le t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |h_0(x,t,\tau)|^p\,dx\right\}^{1/p} \\ &\le c_0 t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_0^t w_0^p(t-\tau,\alpha-\alpha\theta)\|\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha\theta}{2}}\mathscr{F}[\varphi](\xi)]\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)}\,d\tau\right\}^{1/p} \end{aligned}$$

и при $p(1-\beta\theta) < 1$ (условии существования интеграла $\int_0^t w_0^p(t-\tau,\alpha-\alpha\theta)\,d\tau$) для всех $t \in [0,T]$, $r \in \mathbb{R}$ получаем существование свертки $\int_0^t \varphi(\cdot)*G_0(\cdot,t-\tau)\,d\tau$ в пространстве $H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ и оценку

$$\left\|\int_0^t \varphi(\cdot)*G_0(\cdot,t-\tau)\,d\tau\right\|_{H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \le c_0 t^{1-\frac{1}{p}}\left[\int_0^t w_0^p(t-\tau,\alpha)\,d\tau\right]^{\frac{1}{p}}\|\varphi\|_{H^{r+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Следовательно, $\varphi * G_0 \in C([0,T];H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))$, и верна оценка (12).

Доказательство теоремы 1. Вначале покажем существование в пространстве $C([0,T];H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))$ сверток из формулы (4).

В силу условий теоремы

$$\begin{aligned} (F_0 * G_0)(x,t) &= (f_{1-\beta}(t)*f(x,t))*G_0(x,t) \\ &= f(x,t)*(f_{1-\beta}(t)*G_0(x,t)) = (f*G_1)(x,t), \end{aligned}$$

если последняя свертка существует. Ее существование следует из леммы 2 при $r = s$ и замене $\varphi \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ функцией $f(x,\tau)$, $(x,\tau) \in Q_T$, принадлежащей классу $C([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))$.

В этом случае вместо (11) получаем неравенства

$$\left\| \int_0^t f(\cdot,\tau) * G_1(\cdot, t-\tau)\, d\tau \right\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \le c_1 t^{1-\frac{1}{p}} \left[\int_0^t w_1^p(t-\tau,\alpha) \|f(\cdot,\tau)\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\, d\tau \right]^{1/p}$$
$$\le c_1 t^{1-\frac{1}{p}} \left[\int_0^t w_1^p(t-\tau,\alpha) \max_{\tau\in[0,T]} \|f(\cdot,\tau)\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\, d\tau \right]^{1/p}$$
$$\le c_1 t^{1-\frac{1}{p}} \left[\int_0^t w_1^p(t-\tau,\alpha)\, d\tau \right]^{1/p} \|f\|^p_{C([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))},$$

откуда для всех $s \in \mathbb{R}$, $p\beta < 1$ следует, что $f * G_1 \in C([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))$ и

$$\|f * G_1\|_{C([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))} \le c_4 \|f\|_{C([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))}. \tag{13}$$

Как при доказательстве леммы 2, имеем

$$\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}} \mathscr{F}[u_0(\cdot) * G_1(\cdot,t)]]$$
$$= \mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[G_1](\xi,t)(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}} \mathscr{F}[u_0](\xi)]$$
$$= \mathscr{F}^{-1}[g_1(\xi,t,0)\mathscr{F}[\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}} \mathscr{F}[u_0](\xi)]]].$$

В силу леммы 1 функция $g_1(\xi,t,0)$ является мультипликатором в $L_p(\mathbb{R}^n)$ по переменным ξ. По условию теоремы $\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}} \mathscr{F}[u_0](\xi)] \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Поэтому

$$\|u_0 * G_1\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}} \mathscr{F}[u_0(\cdot) * G_1(\cdot,t)]]\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$
$$\le c_1 w_1(t,0) \|\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}} \mathscr{F}[u_0](\xi)]\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = c_1 \|u_0\|_{H^{s+\alpha\theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

Учитываем, что $w_1(t,0) = 1$. Из полученных выше неравенств для всех $s \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $t \in [0,T]$ имеем неравенство

$$\|u_0 * G_1\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \le c_1 \|u_0\|_{H^{s+\alpha\theta}(\mathbb{R}^n)},$$

следовательно, существование свертки $u_0 * G_1 \in C([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))$ и оценку

$$\|u_0 * G_1\|_{C([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))} \le c_1 \|u_0\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{14}$$

Из формулы (4) и равенства $F_0 * G_0 = f * G_1$ с учетом (13), (14) выводим существование единственного решения (6) задачи (2) в классе $C([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))$ и оценку

$$\|u\|_{C([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))} \le c_1 \|u_0\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} + c_4 \|f\|_{C([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))}. \tag{15}$$

Так как

$$\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{s/2} \mathscr{F}[(-\Delta)^{\alpha/2} u]] = \mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{s/2} |\xi|^\alpha \mathscr{F}[u]]$$
$$= \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{|\xi|^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{\alpha/2}} (1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}} \mathscr{F}[u] \right],$$

по доказанному $\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}}\mathscr{F}[u]] \in L_p(\mathbb{R}^n)$ для каждого $t \in [0,T]$, а функция $\frac{|\xi|^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$ является мультипликатором в $L_p(\mathbb{R}^n)$, для всех $t \in [0,T]$ имеем

$$\|\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathscr{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}u]]\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le c_5\|\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}}\mathscr{F}[u]]\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Получили, что для решения u (класса $C([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))$) задачи (2) также выполнено условие $(-\Delta)^{\alpha/2}u \in C([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))$ и имеет место оценка

$$\|(-\Delta)^{\alpha/2}u\|_{C([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))} \le c_6\|u\|_{C([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))}. \tag{16}$$

Так как функция $F_0 * G_0 = f * G_1$ удовлетворяет условию (3), по формуле (5) получаем

$$D_t^\beta u = -a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u + F_0 \in C([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))$$

и оценку

$$\begin{aligned}\left\|D_t^\beta u\right\|_{C([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))} &\le \|a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u\|_{C([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))} + \|F_0\|_{C([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))}\\ &\le \|a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u\|_{C([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))} + c_7\|f\|_{C([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))}.\end{aligned}$$

Отсюда и из оценок (15), (16) следует оценка (7).

Таким образом, показали, что решение (6) задачи (2) принадлежит классу $C_{\alpha,\beta}([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))$.

Доказательство теоремы 2 проводится по схеме доказательства теоремы 1 с той разницей, что для доказательства существования свертки $F_0 * G_0$ в пространстве $C([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))$ используется лемма 3.

Заметим, что теорема 2 верна и для $\beta = 1 < \alpha$. В этом случае по свойству 2 [25, с. 31] H-функции

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[G_0](\xi,t) &= \mathscr{F}[G_1](\xi,t) = E_{1,1}(-a^2|\xi|^\alpha t)\\ &= H_{1,2}^{1,1}\left(a^2|\xi|^\alpha t\,\middle|\,\begin{matrix}(0,1)\\(0,1)(0,1)\end{matrix}\right) = H_{0,1}^{1,0}\left(a^2|\xi|^\alpha t\,\middle|\,\begin{matrix}-\\(0,1)\end{matrix}\right) = e^{-a^2|\xi|^\alpha t}.\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser-Verl., 2004.
2. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1999.
3. *Anh V. V., Leonenko N. N.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random datas // J. Stat. Phys. 2001. V. 104, N 5/6. P. 1349–1387.
4. *Sheng D. J.* Time- and space-fractional partial differential equations // J. Math. Phys. 2005. V. 46. P. 13504–13511.
5. *Gorenfio R., Iskenderov A., Luchko Yu.* Mapping between solutions of fractional diffusion-wave equations // Fract. Calc. Appl. Anal. 2000. V. 3. P. 75–86.
6. *Hanyga A.* Multi-dimensional solutions for space-time-fractional diffusion equations // Proc. R. Soc. Lond. 2002. V. A 458. P. 429–450.
7. *Luchko Yu.* Fractional wave equation and damped waves // J. Math. Phys. 2013. V. 54. P. 315051–3150516.
8. *Luchko Yu.* Multi-dimensional fractional wave equation and some properties of its fundamental solution // E-print Arxiv: 1311.5920[math-ph].
9. *Luchko Yu., Punzi A.* Modeling anomalous heat transport in geothermal reservoirs via fractional diffusion equations // Int. J. Geomath. 2011. V. 1. P. 257–276.

10. *Magin R. L.* Fractional calculus in bioengineering: Parts 1–3 // Crit. Rev. Biomed. Engineering. 2004. V. 32. P. 1–104, 105–193, 195–377.

11. *Mainardi F.* Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. London: Imperial College Press, 2010.

12. *Mainardi F., Luchko Yu., Pagnini G.* The fundamental solution of the space-time-fractional diffusion equation // Fract. Calc. Appl. Anal. 2001. V. 4. P. 153–192.

13. *Metzler R., Nonnenmacher T. F.* Space- and time-fractional diffusion and wave equations, fractional Fokker–Planck equations, and physical motivation // Chem. Phys. 2002. V. 284. P. 67–90.

14. *Povstenko Yu.* Theories of thermal stresses based on space-time-fractional telegraph equations // Computer Math. Appl. 2012. V. 64. P. 3321–3328.

15. *Лопушанська Г. П., Лопушанський А. О.* Задача Коші для рівнянь з дробовими похідними за часовою та просторовими змінними в просторах узагальнених функцій // Укр. мат. журн. 2012. С. 1067–1079.

16. *Лопушанская Г. П., Лопушанский А. О., Пасичник Е. В.* Задача Коши для уравнений с дробной производной по времени в пространстве обобщенных функций // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 6. С. 1288–1299.

17. *Herrmann R.* Fractional calculus: An introduction for physicists. Singapore: World Sci., 2011.

18. Applications of fractional calculus in physics. (Ed. R. Hilfer). Singapore: World Sci., 2000.

19. Anomalous transport: Foundations and applications. (Eds. R. Klages, G. Radons, I. M. Sokolov). Weinheim: Wiley-VCH, 2008.

20. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.

21. *Шилов Г. Е.* Математический анализ: Второй специальный курс. М.: Наука, 1965.

22. Функциональный анализ (под общей ред. С. Г. Крейна). Сер. Справочная мат. биб-ка. М.: Наука, 1972.

23. *Ройтберг Я. А.* Эллиптические граничные задачи в обобщенных функциях. I. Чернигов: Изд-во Чернигов. пед. ин-та, 1990.

24. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1985.

25. *Kilbas A. A., Sajgo M.* H-transforms. Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC, 2004.

Статья поступила 6 января 2014 г.

Лопушанский Андрей Олегович
Institute of Mathematics, University of Rzeszow,
1 Pigonia str., 35–310, Rzeszow, Poland
alopushanskyj@gmail.com