*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6*

*УДК 517.545*

# ОБ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ЛЕВИТСА О ТОЧКАХ ВЕЙЕРШТРАССА

**М. П. Лимонов**

**Аннотация.** Пусть $X$ — компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$, $\sigma$ — автоморфизм $X$ порядка $n$ и $g^*$ — род фактор-поверхности $X^* = X/\langle\sigma\rangle$. В 1951 г. Шёнеберг получил достаточное условие для того, чтобы неподвижная точка $P \in X$ автоморфизма $\sigma$ являлась точкой Вейерштрасса на $X$. А именно, он показал, что $P$ — точка Вейерштрасса на $X$, если $g^* \neq [g/n]$, где $[x]$ — целая часть $x$.

Несколько позже Левитс доказал следующую теорему, эквивалентную теореме Шёнеберга: *если нетривиальный автоморфизм $\sigma$ оставляет неподвижными более четырех точек на $X$, то все они являются точками Вейерштрасса.*

Эти утверждения связаны с понятием регулярного накрытия. В данной работе теорема Левитса обобщена на случай нерегулярных накрытий, а также получены некоторые связанные с этим следствия.

**Ключевые слова:** риманова поверхность, точка Вейерштрасса, регулярное накрытие, нерегулярное накрытие.

## 1. Введение

Пусть $X$ — компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$. Напомним, что точка $P \in X$ называется *точкой Вейерштрасса*, если на $X$ существует мероморфная функция, которая в точке $P$ имеет полюс порядка $\leq g$ и регулярна в других точках. Пусть $\sigma$ — автоморфизм (конформный гомеоморфизм на себя) порядка $n$ поверхности $X$ и $g^*$ — род фактор-поверхности $X/\langle\sigma\rangle$. В 1951 г. Шёнеберг в [1] получил достаточное условие для того, чтобы неподвижная точка $P \in X$ автоморфизма $\sigma$ являлась точкой Вейерштрасса на $X$.

**Теорема 1** [1]. *Неподвижная точка $P$ автоморфизма $\sigma$ порядка $n$ является точкой Вейерштрасса, если $g^* \neq [g/n]$, где $[x]$ — целая часть $x$.*

Эта теорема связана с понятием *регулярного* накрытия $\pi : X \to X^*$, называемого также *нормальным* или *накрытием Галуа*. Это такое непостоянное голоморфное отображение $\pi : X \to X^*$, что для любой точки $P^* \in X^*$ и для любой пары ее поднятий $P_1, P_2 \in X$ существует гомеоморфизм $\varphi : X \to X$, переводящий $P_1$ в $P_2$ и такой, что $\pi \circ \varphi = \pi$. Непостоянное голоморфное отображение римановых поверхностей, для которого указанное условие не выполняется, называется *нерегулярным накрытием*.

В разд. 2 прослеживается развитие указанной теоремы с момента ее появления и до нашего времени. Предварительные понятия и необходимые определения даны в разд. 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского гос. университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00210).

## 2. Исторический обзор

Пусть, как и в разд. 1, $X$ — компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$ и $\sigma$ — автоморфизм $X$ порядка $n$. Обозначим через $t$ число неподвижных точек $\sigma$. В 1963 г. Левитс опубликовал следующую теорему, которая эквивалентна теореме Шёнеберга.

**Теорема 2** [2, теорема 6]. *Если точка $P$ не является точкой Вейерштрасса на $X$ и $\sigma(P) = P$, то автоморфизм $\sigma$ имеет не менее двух и не более четырех неподвижных точек и род $g^*$ поверхности $X/\langle\sigma\rangle$ дается формулой $g^* = [g/n]$. В терминах представления $g$ в виде $g = g^*n + r$ возможны только следующие случаи:*

(a) $r = 0$, $g = g^*n$, $t = 2$;
(b) $r = \frac{n-1}{2}$, $g = \left(g^* + \frac{1}{2}\right)n - \frac{1}{2}$, $t = 3$;
(c) $r = n - 1$, $g = (g^* + 1)n - 1$, $t = 4$.

В отличие от теоремы 1 теорема 2 включает информацию о числе неподвижных точек автоморфизма $\sigma$. Теорема 2 имеет два следствия, которые приведены в [3]. Первое говорит о том, что если $\sigma$ — нетривиальный автоморфизм компактной римановой поверхности рода $g \geq 2$, имеющий более четырех неподвижных точек, то все эти точки являются точками Вейерштрасса. Доказательство этого утверждения можно найти в [4, теорема V.1.7]. Отметим, что формулировка именно этого следствия обычно приводится в литературе как теорема Левитса. Второе следствие утверждает, что если $\sigma$ имеет единственную неподвижную точку $P$ и суммарный порядок ветвления $B$ (см. разд. 3, формула Римана — Гурвица) накрытия $\pi : X \to X^*$ удовлетворяет неравенству $B \geq 4n - 2$ или $B \leq 2n - 4$, то $P$ является точкой Вейерштрасса.

Более подробно случай единственной неподвижной точки автоморфизма $\sigma$ разобран в [5]: если автоморфизм $\sigma$ имеет единственную неподвижную точку $P$, то она должна быть точкой Вейерштрасса, за исключением случая, когда $\sigma$ имеет порядок 6 и $g = 6g^* + 1$. В этом исключительном случае накрытие $X \to X/\langle\sigma\rangle$ разветвлено над тремя точками. Слои над такими точками состоят из неподвижных точек $\sigma, \sigma^2, \sigma^3$ соответственно. Суммарный порядок ветвления $B$ такого накрытия равен 12, и точка $P$ является $q$-точкой Вейерштрасса, где $q \geq 2$ (по поводу обобщенных точек Вейерштрасса см. [6]).

В [7] переформулирована и доказана теорема 2 в терминах фуксовых групп. В формулировке из [7] случаи (a)–(c) записаны с помощью сигнатур таких групп.

В [8, 9] теорема Левитса обобщена на случай произвольного алгебраического функционального поля одной переменной над алгебраически замкнутым основным полем почти произвольной характеристики.

Наконец, теорема 2 обобщена в [10] на случай кривых Горнстейна.

## 3. Предварительные понятия

Опишем понятия, используемые ниже. Более подробно ознакомиться с ними можно в [4] или [11]. В этом тексте под римановой поверхностью понимается одномерное компактное связное комплексное многообразие без границы.

Рассмотрим непостоянное голоморфное отображение $f$ степени $n$ между римановыми поверхностями $X$ и $Y$ родов $g$ и $\gamma$ соответственно. *Суммарный порядок ветвления* отображения $f$ определяется по формуле $B = \sum\limits_{P \in X} b_f(P)$, где $b_f(P)$ — порядок ветвления $f$ в $P$ (т. е. число $n-1$, если в локальных координатах отображение $f$ записывается в виде $w = z^n$).

Следующая теорема дает связь между родом поверхности $X$, родом $Y$ и степенью отображения $n$.

**Теорема** (формула Римана — Гурвица). *Верно соотношение*

$$2g - 2 = n(2\gamma - 2) + B.$$

При доказательстве основных результатов используем технику дивизоров на римановых поверхностях. Дивизоры — удобные объекты для описания нулей и полюсов мероморфных функций.

Определение 1. *Дивизор* на римановой поверхности $X$ — это формальный ряд $D = \sum\limits_{P \in X} \alpha(P)P$, где $\alpha(P) \in \mathbb{Z}$ и $\alpha(P) \neq 0$ только для конечного числа точек $P \in X$. Для дивизоров $D$ и $D' = \sum\limits_{P \in X} \beta(P)P$ определяется

$$D \pm D' = \sum_{P \in X} (\alpha(P) \pm \beta(P))\, P, \quad \deg D = \sum_{P \in X} \alpha(P).$$

Множество всех дивизоров на $X$ по сложению образует абелеву группу, которую обозначим через $\mathrm{Div}(X)$. На этом множестве также вводится частичный порядок, а именно $D \leq D'$, если $\alpha(P) \leq \beta(P)$ для каждой точки $P \in X$.

Определение 2. Пусть $X$ — риманова поверхность и $\mathscr{M}(X)$ — множество всех мероморфных функций на $X$. *Дивизором мероморфной функции* $f \in \mathscr{M}(X) \setminus \{0\}$ называется дивизор $(f) = \sum\limits_{P \in X} \mathrm{ord}_P(f)P$, где порядок $\mathrm{ord}_P(f)$ функции $f$ в точке $P \in X$ определяется по формуле

$$\mathrm{ord}_P(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ голоморфна и отлична от нуля в } P, \\ k, & \text{если } f \text{ имеет нуль кратности } k \text{ в } P, \\ -k, & \text{если } f \text{ имеет полюс порядка } k \text{ в } P. \end{cases}$$

Определение 3. Для дивизора $D \in \mathrm{Div}(X)$ определяется множество

$$L(D) = \{f \in \mathscr{M}(X) \mid (f) \geq D\}.$$

Это множество является векторным пространством. Его размерность обозначим через $l(D)$.

Рассмотрим пример. Пространство $L(D)$ для дивизора $D = 3P - 4Q$ состоит из всех таких функций $f \in \mathscr{M}(X)$, которые голоморфны в $X \setminus \{Q\}$, обязательно имеют нуль кратности $\geq 3$ в точке $P$ (допускаются нули и в других точках на $X$) и могут иметь полюс в $Q$ порядка $\leq 4$.

Следующая теорема является важным инструментом для проверки того, что $L(D)$ содержит непостоянные функции.

**Теорема** (неравенство Римана [4, с. 72]). *Пусть $X$ — риманова поверхность рода $g$ и $D \in \mathrm{Div}(X)$. Тогда верно неравенство $l(D) \geq -\deg D - g + 1$.*

Определение 4. Точка $P$ на римановой поверхности $X$ рода $g > 1$ называется *точкой Вейерштрасса*, если на $X$ существует мероморфная функция с полюсом порядка $\leq g$ в $P$ и голоморфная во всех других точках. На языке дивизоров точка $P$ является точкой Вейерштрасса, если и только если $l(-gP) \geq 2$.

## 4. Основные результаты

Регулярные и нерегулярные накрытия римановых поверхностей вместе образуют непостоянные голоморфные отображения этих поверхностей. В дальнейшем все голоморфные отображения предполагаются непостоянными. Неподвижная точка автоморфизма $\sigma$ порядка $n$ римановой поверхности $X$ является точкой ветвления регулярного накрытия $X \to X/\langle\sigma\rangle$. Порядок ветвления в такой точке равен $n-1$. Основная идея настоящей работы заключается в том, чтобы для произвольного голоморфного отображения римановых поверхностей в качестве аналога неподвижной точки рассматривать точки, порядок ветвления в которых равен $n-1$, где $n$ — степень отображения. Такие точки будем называть *точками полного ветвления.* Если $X$ нерегулярно накрывает $Y$, то, возможно, не все точки на $X$, лежащие над одной и той же точкой на $Y$, имеют одинаковый порядок ветвления. Это обстоятельство дает возможность обобщить классические результаты на случай нерегулярных накрытий.

**4.1. Обобщение теоремы Левитса.** Следующая теорема обобщает теорему Левитса на случай нерегулярных отображений.

**Теорема 3.** *Пусть $X$ и $Y$ — римановы поверхности и род $X$ больше* 1. *Пусть $\varphi : X \to Y$ — голоморфное отображение. Предположим, что $\varphi$ имеет не менее пяти точек полного ветвления. Тогда все они являются точками Вейерштрасса.*

Эта теорема является следствием из леммы ниже.

**Лемма 1.** *Пусть $X$ и $Y$ — римановы поверхности и род $X$ больше* 1. *Пусть $\varphi : X \to Y$ — голоморфное отображение степени $n$. Предположим, что $\varphi$ имеет точку полного ветвления $P$. Тогда $P$ будет точкой Вейерштрасса на $X$, если суммарный порядок ветвления $B$ отображения $\varphi$ удовлетворяет неравенству* $B \geq 4n-2$.

Доказательство. Пусть $X$ и $Y$ имеют рода $g$ и $\gamma$ соответственно. Покажем, что на $X$ существует мероморфная функция с единственным полюсом порядка $\leq g$ в точке $P$.

Пусть $Q = \varphi(P) \in Y$. Тогда на $Y$ существует функция $\tilde{f} \in \mathscr{M}(Y)$, голоморфная в $Y \setminus \{Q\}$ и имеющая полюс порядка $\leq \gamma+1$ в точке $Q$. Для доказательства этого факта воспользуемся неравенством Римана для дивизора $D = -(\gamma+1)Q$. В результате получим

$$l(D) \geq -\deg D - \gamma + 1 = \gamma + 1 - \gamma + 1 = 2,$$

поскольку $\deg D = -(\gamma+1)$. Таким образом, $l(D) \geq 2$, что влечет существование функции $\tilde{f}$.

Пусть $f = \tilde{f} \circ \varphi$ ($f$ является поднятием $\tilde{f}$ на $X$). Тогда $f \in \mathscr{M}(X)$, $f$ голоморфна в $X \setminus \{P\}$ и имеет в точке $P$ полюс порядка $\leq n(\gamma+1)$. Из формулы Римана — Гурвица для $\varphi$ и условия $B \geq 4n-2$ имеем

$$2g - 2 = n(2\gamma - 2) + B \geq 2n\gamma - 2n + 4n - 2$$

или $g \geq n(\gamma+1)$. Таким образом, $f$ в точке $P$ имеет полюс порядка $\leq g$. Следовательно, $P$ — точка Вейерштрасса на $X$. $\square$

Доказательство теоремы 3. Пусть $\varphi : X \to Y$ — голоморфное отображение степени $n$. Заметим, что суммарный порядок ветвления $B$ отображения

$\varphi$ удовлетворяет неравенству $B \geq 5(n-1)$, когда $n$ нечетное, и неравенству $B \geq 5(n-1)+1$, когда $n$ четное, поскольку $B$ — всегда четное число. Стало быть, для $n \geq 2$ выполнено $B \geq 4n-2$. Отсюда согласно лемме 1 следует, что каждая точка полного ветвления отображения $\varphi$ является точкой Вейерштрасса. $\square$

Замечание. Пусть в условиях теоремы 3 голоморфное отображение $\varphi$ имеет только $k$ точек полного ветвления, где $1 \leq k \leq 4$. Обозначим через $r_\varphi$ сумму порядков ветвления отображения $\varphi$ степени $n$ во всех точках, за исключением данных $k$. Согласно лемме 1 все эти $k$ точек будут точками Вейерштрасса, если $r_\varphi > (4-k)(n-1)$.

**4.2. Случай строго разветвленных голоморфных отображений.** Чтобы сформулировать следующую теорему, понадобится определение строго разветвленного голоморфного отображения. Оно введено в [12] Акколой и связано с обобщением понятия гиперэллиптичности.

Определение 5 [12]. Пусть $\varphi : X \to Y$ — голоморфное отображение римановых поверхностей родов $g$ и $\gamma$ соответственно. Отображение $\varphi$ называется *строго разветвленным*, если $g > n^2\gamma + (n-1)^2$.

**Теорема 4.** *Пусть $X$ и $Y$ — римановы поверхности и род $X$ больше* 1. *Пусть $\varphi : X \to Y$ — строго разветвленное отображение и $P$ — точка полного ветвления отображения $\varphi$. Тогда $P$ является точкой Вейерштрасса на $X$.*

Доказательство. Пусть $\gamma$ — род поверхности $Y$. Согласно [12, с. 316] условие на $\varphi$ быть строго разветвленным эквивалентно условию

$$B > 2n(n-1)(\gamma+1)$$

или, поскольку $B$ — всегда четное число, условию

$$B \geq 2n(n-1)(\gamma+1)+2.$$

Сравним последнее неравенство и $B \geq 4n-2$ из леммы 1. Имеем

$$2n(n-1)(\gamma+1)+2-(4n-2) = 2(n(\gamma+1)-2)(n-1) \geq 0$$

для $n \geq 2$. Поэтому $P$ — точка Вейерштрасса на $X$ согласно лемме 1. $\square$

**4.3. Случай, когда образ точки полного ветвления — точка Вейерштрасса.** Следующая лемма описывает случай, когда точка полного ветвления голоморфного отображения переходит в точку Вейерштрасса.

**Лемма 2.** *Пусть $X$ и $Y$ — римановы поверхности и род $Y$ больше* 1. *Пусть $\varphi : X \to Y$ — голоморфное отображение степени $n$. Предположим, что $\varphi$ имеет точку полного ветвления $P$ и переводит ее в точку Вейерштрасса на $Y$. Тогда $P$ будет точкой Вейерштрасса на $X$, если суммарный порядок ветвления $B$ отображения $\varphi$ удовлетворяет неравенству $B \geq 2n-2$.*

Доказательство. Пусть $X$ и $Y$ имеют рода $g$ и $\gamma$ соответственно. Покажем, что на $X$ существует мероморфная функция с единственным полюсом порядка $\leq g$ в точке $P$.

Пусть $P$ — точка полного ветвления отображения $\varphi$ и $Q = \varphi(P)$ — точка Вейерштрасса на $Y$. По определению точки Вейерштрасса на $Y$ существует функция $\tilde{f} \in \mathscr{M}(Y)$, голоморфная в $Y \setminus \{Q\}$ и имеющая полюс порядка $\leq \gamma$ в точке $Q$. Пусть $f = \tilde{f} \circ \varphi$, тогда $f \in \mathscr{M}(X)$, $f$ голоморфна в $X \setminus \{P\}$ и имеет полюс порядка $\leq n\gamma$ в $P$. Из формулы Римана — Гурвица для $\varphi$ и условия $B \geq 2n-2$ получим

$$2g - 2 = n(2\gamma - 2) + B \geq n(2\gamma - 2) + 2n - 2$$

или

$$g \geq n(\gamma - 1) + n - 1 + 1 = n\gamma.$$

Таким образом, $f$ в точке $P$ имеет полюс порядка $\leq g$. Стало быть, $P$ — точка Вейерштрасса на $X$. □

Непосредственным следствием из леммы 2 является

**Теорема 5.** *Пусть $X$ и $Y$ — римановы поверхности и род $Y$ больше 1. Пусть $\varphi : X \to Y$ — голоморфное отображение. Предположим, что $\varphi$ имеет не меньше двух точек полного ветвления. Пусть $P$ — одна из этих точек и $\varphi(P)$ — точка Вейерштрасса на $Y$. Тогда $P$ — точка Вейерштрасса на $X$.*

Замечание. В отличие от теоремы 3 в теореме 5 требуется меньше точек полного ветвления.

Автор благодарен своему научному руководителю, профессору А. Д. Медных за советы и плодотворное обсуждение результатов.

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Schöneberg B.* Über die Weierstrass-Punkte in den Körpern der elliptischen Modulfunktionen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1951. V. 17. P. 104–111.
2. *Lewittes J.* Automorphisms of compact Riemann surfaces // Amer. J. Math. 1963. V. 85, N 4. P. 734–752.
3. *Larcher H.* Weierstrass points at the cusps of $\Gamma_0(16p)$ and hyperellipticity of $\Gamma_0(n)$ // Can. J. Math. 1971. V. 23. P. 960–968.
4. *Farkas H. M., Kra I.* Riemann surfaces. New York: Springer-Verl., 1981. (Grad. Texts Math.; V. 71).
5. *Guerrero I.* Automorphisms of compact Riemann surfaces and Weierstrass points // Brook Conf. (State Univ. New York, Stony Brook, NY, 1978). Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1981. P. 215–224. (Ann. Math. Stud.; V. 97).
6. *Accola R. D. M.* On generalized Weierstrass points on Riemann surfaces // Modular functions in analysis and number theory. Pittsburgh, PA: Univ. Pittsburgh, 1983. P. 1–19. (Lect. Notes Math. Stat.; V. 5).
7. *Maclachlan C.* On Schoeneberg's theorem // Glasgow Math. J. 1973. V. 14, N 2. P. 202–204.
8. *McQuillan D. L.* A note on Weierstrass points // Can. J. Math. 1967. V. 19. P. 268–272.
9. *Wayman A. K.* An elementary proof of a fixed point theorem of J. Lewittes and D. L. McQuillan // Can. Math. Bull. 1978. V. 21. P. 99–101.
10. *Garcia A., Lax R. F.* Rational nodal curves with no smooth Weierstrass points // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124. P. 407–413.
11. *Springer G.* Introduction to Riemann surfaces. Reading, MA: Addison-Wesley, 1957.
12. *Accola R. D. M.* Strongly branched coverings of closed Riemann surfaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 26, N 2. P. 315–322.

*Статья поступила 7 февраля 2014 г.*

Лимонов Максим Петрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Челябинский гос. университет,
лаборатория квантовой топологии,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001
volsterm@gmail.com