Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6

УДК 514.763

АФФИНОРНЫЕ СТРУКТУРЫ НА ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЯХ

Е. С. Корнев

Аннотация. Аффинорная структура является обобщением понятия почти комплексной структуры, ассоциированной с симплектической формой на многообразии четной размерности для векторных расслоений произвольного ранга. Аффинорная структура — поле эндоморфизмов векторного расслоения, сохраняющих внешний дифференциал некоторой 1-формы с радикалом произвольной размерности. Внешний дифференциал всегда можно определить на специальном классе векторных расслоений — алгеброидах Ли. Поэтому теория аффинорных структур рассматривается на алгеброидах Ли. Показано, что такие классические объекты, как симплектическая структура, контактная структура и кэлерова структура, являются частными случаями общей теории аффинорных метрических структур.

Ключевые слова: аффинорная структура, радикал 1-формы, риманова метрика, алгеброид Ли.

§ 1. Внешние формы на векторных расслоениях

Пусть M — паракомпактное замкнутое многообразие размерности n класса C^∞, E — векторное расслоение ранга r над M и π — естественная проекция $E \mapsto M$. Слой этого векторного расслоения в точке $x \in M$ является векторным пространством над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ равно либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$. Обозначим через E_x^* множество всех линейных функционалов на слое E_x со значениями в $\mathbb{K}$. Тогда внешняя алгебра $\Lambda^p(E_x) = \wedge^p E_x^*$ — пространство всех кососимметрических p-форм на E_x со значениями в $\mathbb{K}$. Множество

$$\Lambda^p(E) = \bigcup_{x \in M} \Lambda^p(E_x)$$

образует векторное расслоение внешних p-форм над M с проекцией π^* и слоем $\Lambda^p(E_x)$ в точке $x \in M$. Сечение ω расслоения $\Lambda^p(E)$ называется *внешней p-формой на векторном расслоении E*. Фактически ω есть образ некоторого непрерывного отображения из M в $\Lambda^p(E)$ и задание внешней p-формы на векторном расслоении равносильно заданию такого непрерывного отображения. По определению получаем, что всякая внешняя p-форма ω на векторном расслоении E есть линейное относительно функций отображение из множества упорядоченных наборов $(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ в числовое поле $\mathbb{K}$, т. е. тензорное поле. Здесь $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ — сечения векторного расслоения E. Значением этого тензорного поля в точке x является внешняя p-форма на векторном пространстве E_x. Будем

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00873–а), а также Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–544.2012.1).

обозначать значение внешней p-формы ω на векторном расслоении E в точке x через ω_x.

Векторное расслоение E ранга r называется *ориентируемым*, если на E существует внешняя форма $\mu \in \Lambda^r(E)$, отличная от нуля в каждой точке из M. Говорят, что на E *задана положительная ориентация*, если $\mu_x(\sigma_1, \dots, \sigma_r) > 0$ для любого $x \in M$ и любых линейно независимых в точке x сечений $\sigma_1, \dots, \sigma_r$. Говорят, что на E *задана отрицательная ориентация*, если $\mu_x(\sigma_1, \dots, \sigma_r) < 0$ для любого $x \in M$.

На $\Lambda^p(E)$ всегда можно задать послойное скалярное произведение $\hat{g}$ (см. [1, 2]). Тогда на $\Lambda^p(E)$ в любой точке $x \in M$ определен *оператор Ходжа*

$$\star : \Lambda^p(E) \mapsto \Lambda^{r-p}(E) : \omega \wedge \star\omega = \hat{g}(\omega, \omega)\mu.$$

Если M — ориентируемое многообразие, то на M существует форма объема μ_M. Определим норму в пространстве сечений векторного расслоения $\Lambda^p(E)$ следующим образом: если ω — внешняя p-форма на E, то

$$\|\omega\| = \int\limits_M \sqrt{\hat{g}(\omega, \omega)}\mu_M. \tag{1}$$

Эта норма позволяет определить сходимость в пространстве сечений векторного расслоения $\Lambda^p(E)$.

Определение 1.1. Точка $x \in M$ называется *сингулярной точкой внешней формы ω на векторном расслоении E*, если $\omega_x = 0$, т. е. $\omega_x \equiv 0$ на слое E_x. Множество всех сингулярных точек внешней формы ω называется *множеством сингулярности* формы ω.

Множество сингулярности любой внешней p-формы замкнуто относительно нормы, заданной формулой (1). Если многообразие M компактно, то множество сингулярности компактно как замкнутое подмножество компактного множества. Отсюда получаем

Предложение 1.2. *Пусть E — векторное расслоение над компактным ориентируемым многообразием M и ω — внешняя p-форма на векторном расслоении E. Тогда множество сингулярности формы ω компактно.*

Векторное расслоение E над многообразием M называется *алгеброидом Ли*, если на множестве сечений этого расслоения $C^\infty(E)$ задана операция скобки Ли $[\,,]$, а также существует линейное отображение $\Psi : C^\infty(E) \to C^\infty(TM)$, обладающее следующими свойствами:

- $[\Psi\sigma, \Psi\tau] = \Psi[\sigma, \tau]$ для любых сечений $\sigma, \tau \in C^\infty(E)$;
- $[\sigma, f\tau] = (\Psi\sigma)(f)\tau + f[\sigma, \tau]$ для любой функции $f \in C^\infty(M)$ и любых сечений $\sigma, \tau \in C^\infty(E)$.

Отображение Ψ задает гомоморфизм $C^\infty(E) \to C^\infty(TM)$ и определяет действие сечения σ векторного расслоения E на функцию f по формуле

$$\sigma(f) = (\Psi\sigma)(f).$$

Простейшими примерами алгеброида Ли являются касательное расслоение с операцией скобки Ли векторных полей, когда $\Psi = \mathrm{id}$, и кокасательное расслоение с нулевой скобкой Ли и $\Psi \equiv 0$. Другие примеры алгеброидов Ли и описание их свойств можно найти в [3].

Обозначим через $\Lambda^*(E)$ сумму Уитни векторных расслоений

$$\Lambda^0(E) \oplus \Lambda^1(E) \oplus \dots \oplus \Lambda^r(E),$$

где $\Lambda^0(E) = \mathbb{K}$, а функции на M считаются 0-формами на E. *Внешним дифференциалом* на векторном расслоении E называют отображение $d : C^\infty(\Lambda^*(E)) \to C^\infty(\Lambda^*(E))$, обладающее следующими свойствами:

(1) если $\omega \in C^\infty(\Lambda^p(E))$, то $d\omega \in C^\infty(\Lambda^{p+1}(E))$;

(2) $d(\omega + \theta) = d\omega + d\theta$ для любых $\omega \in C^\infty(\Lambda^p(E))$ и $\theta \in C^\infty(\Lambda^k(E))$;

(3) $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta$ для любых $\omega \in C^\infty(\Lambda^p(E))$ и $\theta \in C^\infty(\Lambda^k(E))$;

(4) $d^2 = d \circ d = 0$.

Для алгеброида Ли внешний дифференциал всегда существует и определяется для произвольной внешней p-формы ω следующим образом (см. [3]):

$$\begin{aligned} d\omega(\sigma_1, \dots, \sigma_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \sigma_i(\omega(\sigma_1, \dots, \hat{\sigma}_i, \dots, \sigma_{p+1})) \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([\sigma_i, \sigma_j], \sigma_1, \dots, \hat{\sigma}_i, \dots, \hat{\sigma}_j, \dots, \sigma_{p+1}), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\hat{\sigma}_i$ означает исключение сечения σ_i. p-Форма ω на алгеброиде Ли E называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$, и *точной*, если существует $(p-1)$-форма θ такая, что $d\theta = \omega$.

Внутренним произведением сечения $\sigma \in C^\infty(E)$ и внешней формы $\omega \in C^\infty(\Lambda^p(E))$ называется внешняя $(p-1)$-форма $I_\sigma\omega$, определенная равенством

$$I_\sigma\omega(\sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}) = \omega(\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}),$$

где $\sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}$ — произвольные сечения векторного расслоения E. Используя понятия внешнего дифференциала и внутреннего произведения, можно определить производную Ли.

Производной Ли в направлении сечения σ на $C^\infty(\Lambda^p(E))$, $p \geq 1$, называется оператор

$$\mathrm{L}_\sigma : C^\infty(\Lambda^p(E)) \mapsto C^\infty(\Lambda^p(E)) : \mathrm{L}_\sigma = dI_\sigma + I_\sigma d.$$

Используя это определение, можно показать, что

$$\mathrm{L}_\sigma(\omega \wedge \theta) = \mathrm{L}_\sigma\, \omega \wedge \theta + \omega \wedge \mathrm{L}_\sigma\, \theta$$

для любых $\omega \in C^\infty(\Lambda^p(E))$, $\theta \in C^\infty(\Lambda^k(E))$.

§ 2. Радикал 1-форм

Пусть M — паракомпактное многообразие класса C^∞ и $E \xrightarrow{\pi} M$ — алгеброид Ли ранга r над полем $\mathbb{K}$. Если α — линейная 1-форма на E, то из формулы (2) следует, что

$$d\alpha(\sigma, \tau) = \sigma(\alpha(\tau)) - \tau(\alpha(\sigma)) - \alpha([\sigma, \tau]) \tag{3}$$

для любых сечений σ и τ векторного расслоения E. Из этой формулы видно, что $d\alpha$ — является внешней 2-формой на E, и если x — сингулярная точка 1-формы α, то она может не являться сингулярной точкой 2-формы $d\alpha$.

Определение 2.1. *Радикалом* 1-*формы* α в точке $x \in M$ на алгеброиде Ли E называется множество $\operatorname{rad}_x \alpha = \{\sigma_x \in E_x : I_{\sigma_x} d\alpha_x = 0\}$.

Обозначим через $\operatorname{rad} \alpha$ расслоение радикалов

$$\operatorname{rad} \alpha = \bigcup_{x \in M} \operatorname{rad}_x \alpha.$$

1-Форма α называется *регулярной*, если векторное расслоение $\operatorname{rad}\alpha$ имеет постоянный ранг. Очевидно, что радикал замкнутой 1-формы на алгеброиде Ли E равен E. Следовательно, любая замкнутая 1-форма на алгеброиде Ли регулярна. Аналогично из свойства внешнего дифференциала $d^2 = 0$ следует, что любая точная 1-форма на алгеброиде Ли является регулярной. Поскольку существование на M глобального сечения векторного расслоения E, всюду отличного от нуля, влечет, что класс Эйлера векторного расслоения E равен нулю (см. [4, 5]), а 2-форма $d\alpha$ на E — это глобальное сечение векторного расслоения $\Lambda^2(E)$, получаем

Предложение 2.2. *Пусть E — алгеброид Ли над паракомпактным многообразием M и класс Эйлера векторного расслоения $\Lambda^2(E)$ не равен нулю. Тогда на E не существует незамкнутых регулярных* 1*-форм.*

Перечислим еще несколько очевидных свойств, которые вытекают из определения радикала 1-формы:

(1) если α — регулярная 1-форма, а η — замкнутая 1-форма, то $\operatorname{rad}(\alpha+\eta) = \operatorname{rad}\alpha$;

(2) если α и β — незамкнутые регулярные 1-формы на E такие, что $\operatorname{rad}\alpha = \operatorname{rad}\beta$, то $\alpha - \beta = \eta$, где η — замкнутая 1-форма;

(3) если A — автоморфизм алгеброида Ли E и α — регулярная 1-форма на E, то

$$\operatorname{rad}(A^*\alpha) = A \operatorname{rad}\alpha.$$

В отличие от регулярных внешних форм степени 2 и выше регулярная 1-форма может иметь сингулярные точки. Поэтому нужно рассматривать два вида сингулярных точек для 1-форм.

Определение 2.3. Пусть E — алгеброид Ли над многообразием M и α — это 1-форма на E. Точка $x \in M$ называется *сингулярной точкой* 1*-формы α первого рода*, если $\alpha_x = 0$, и *сингулярной точкой второго рода*, если $d\alpha_x = 0$.

Сопоставляя определение регулярной 1-формы и определение 2.3, получаем, что регулярная незамкнутая 1-форма на алгеброиде Ли E не может иметь сингулярных точек второго рода. Если регулярная 1-форма на E имеет хотя бы одну сингулярную точку второго рода, то она замкнута. Точки, которые не являются сингулярными точками второго рода, называются *регулярными точками* 1-формы α.

Для радикала регулярной 1-формы получен следующий важный результат. Его подробное доказательство можно найти в [6].

Теорема 2.4. *Пусть E — алгеброид Ли ранга r над паракомпактным многообразием M и α — незамкнутая регулярная* 1*-форма на E.*

(1) *Если алгеброид Ли E имеет четный ранг, то расслоение радикалов $\operatorname{rad}\alpha$ также имеет четный ранг и справедливо неравенство*

$$0 \le \dim(\operatorname{rad}\alpha) \le r - 2.$$

(2) *Если алгеброид Ли E имеет нечетный ранг, то расслоение радикалов $\operatorname{rad}\alpha$ также имеет нечетный ранг и справедливо неравенство*

$$1 \le \dim(\operatorname{rad}\alpha) \le r - 2.$$

Из п. (2) теоремы 2.4 сразу получаем

Следствие 2.5. *На алгеброиде Ли нечетного ранга $r \geq 3$ любая незамкнутая регулярная* 1*-форма имеет нетривиальный радикал. При $r = 3$ размерность радикала равна* 1.

Поскольку на алгеброиде Ли E с паракомпактной базой всегда существует риманова метрика, векторное расслоение E всегда можно разложить в сумму Уитни расслоения $\operatorname{rad}\alpha$ и подрасслоения D, которое единственно определяется как ортогональное дополнение к $\operatorname{rad}\alpha$ относительно заданной метрики. Такое подрасслоение D будем называть *рабочим расслоением*. Так как разность любых двух чисел одинаковой четности всегда является четным числом, из теоремы 2.4 следует, что рабочее расслоение D всегда имеет четный ранг, а ограничение 2-формы $d\alpha$ на D задает симплектическую структуру на рабочем расслоении D. Если рабочее расслоение D инволютивно, то D — симплектический алгеброид Ли и на D можно построить полный аналог симплектической геометрии как для многообразий в [7].

Рассмотрим пример 1-формы, имеющей радикал максимальной размерности.

Пример 2.6. Пусть $E \xrightarrow{\pi} M$ — алгеброид Ли ранга $r \geq 3$ и f, h — линейно независимые в каждой точке функции класса C^1 на M, т. е. 1-формы df и dh линейно независимы в любой точке из M. Отсюда следует, что 1-формы df и dh не имеют на M сингулярных точек первого рода, а множество сингулярных точек второго рода этих 1-форм совпадает с M.

Введем на E 1-форму $\alpha = f dh$. Множество сингулярных точек первого рода 1-формы α есть множество нулей функции f. Имеем

$$d\alpha(\sigma, \tau) = df \wedge dh(\sigma, \tau) = df(\sigma)dh(\tau) - df(\tau)dh(\sigma)$$

для любых сечений σ, τ векторного расслоения E. Поскольку 1-формы df и dh линейно независимы, то

$$\dim(\ker(df) \cap \ker(dh)) = r - 2.$$

Если $\sigma \in \ker(df) \cap \ker(dh)$, то $d\alpha(\sigma, \tau) = 0$ для любого сечения τ, т. е. $\sigma \in \operatorname{rad}\alpha$. Так как 1-формы df и dh линейно независимы в любой точке из M, не существует функции $\lambda \in C^1(M)$ такой, что $df = \lambda dh$ и $df \wedge dh \neq 0$. Имеем

$$r - 2 = \dim(\ker(df) \cap \ker(dh)) \leq \dim(\operatorname{rad}\alpha).$$

В силу неравенств из теоремы 2.4 $\dim(\operatorname{rad}\alpha) \leq r - 2$. Отсюда получаем

$$\ker(df) \cap \ker(dh) = \operatorname{rad}\alpha$$

и $\dim(\operatorname{rad}\alpha) = r - 2$.

§ 3. Аффинорные структуры на алгеброидах Ли

Пусть M — паракомпактное многообразие класса C^∞, E — вещественный алгеброид Ли ранга r над M, π — проекция $E \mapsto M$ и α — регулярная 1-форма на E. Поскольку на E всегда существует риманова метрика, будем считать, что на нем задано послойное скалярное произведение $(\,,\,)$. Векторное расслоение E раскладывается в ортогональную сумму $\operatorname{rad}\alpha$ и рабочего расслоения D. Обозначим через $\varPhi$ непрерывное поле послойных эндоморфизмов векторного расслоения E, удовлетворяющее свойствам

$$(\varPhi\sigma, \varPhi\tau) = (\sigma, \tau), \quad d\alpha(\sigma, \tau) = (\varPhi\sigma, \tau) \tag{4}$$

для любых сечений σ и τ векторного расслоения E.

Предложение 3.1. *Поле эндоморфизмов Φ обладает следующими свойствами:*
(1) $\Phi^2|_D = -\,\mathrm{id}$;
(2) $\Phi^* d\alpha = d\alpha$;
(3) $\Phi^* = -\Phi$;
(4) $\operatorname{rad}\alpha = \ker\Phi$;
(5) *для любой точки $x \in M$ оператор Φ_x положительно определен.*

Доказательство. Используя (4), для любых сечений σ и τ векторного расслоения E имеем

$$(\Phi\sigma, \tau) = d\alpha(\sigma, \tau) = -d\alpha(\tau, \sigma) = -(\sigma, \Phi\tau),$$

откуда следует свойство (3).

С помощью свойства (3) и условия (4) получаем

$$(\Phi^2\sigma, \tau) = -(\Phi\sigma, \Phi\tau) = -(\mathrm{id}\,\sigma, \tau),$$

откуда выводим свойство (1).

Свойства (2), (4) и (5), очевидно, вытекают из условий (4). □

Чтобы определить поле операторов Φ, удовлетворяющее условиям (4), необходимо зафиксировать на алгеброиде Ли риманову метрику. Однако если отказаться от использования метрики, то можно определить такое поле операторов, используя свойства из предложения 3.1 как аксиомы.

Определение 3.2. Пусть E — алгеброид Ли с регулярной 1-формой α и рабочим векторным расслоением D. *Аффинором, ассоциированным с 1-формой* α, называется непрерывное поле послойных эндоморфизмов Φ векторного расслоения E, обладающее следующими свойствами:
(1) $\operatorname{rad}\alpha = \ker\Phi$;
(2) $\Phi D = D$, $\Phi^2|_D = -\,\mathrm{id}$;
(3) $\Phi^* d\alpha = d\alpha$;
(4) $d\alpha(\sigma, \Phi\sigma) \geq 0$ для любого сечения $\sigma \in D$.

Аффинорной структурой на алгеброиде Ли E называется пара α, Φ, где α — регулярная 1-форма на E, Φ — ассоциированный с 1-формой α аффинор.

Замечание 3.3. Для полной строгости определения аффинорной структуры необходимо также задать рабочее расслоение D. Поскольку на алгеброиде Ли с паракомпактной базой всегда существует риманова метрика (см. § 1), далее, если не будет явно указан выбор рабочего расслоения, будем подразумевать под рабочим расслоением расслоение ортогональных $\operatorname{rad}\alpha$ относительно некоторой римановой метрики векторных подпространств.

Обозначим через $d\alpha_D$ ограничение 2-формы $d\alpha$ на рабочее расслоение D. Поскольку D всегда имеет четный ранг, $d\alpha_D$ — симплектическая структура на D. Из определения 3.2 следует, что ограничение аффинора Φ на D есть комплексная структура на D, ассоциированная с 2-формой $d\alpha_D$. Таким образом, $d\alpha_D$ — кэлерова метрика на D. Обратно, если на D задана комплексная структура J, сохраняющая 2-форму $d\alpha_D$, то, полагая

$$\Phi\sigma = J\sigma | \sigma \in D, \quad \Phi\sigma = 0 | \sigma \in \operatorname{rad}\alpha,$$

получаем аффинор Φ на E. Таким образом, верно следующее

Предложение 3.4. *Пусть α — регулярная 1-форма на вещественном алгеброиде Ли E и D — расслоение векторных подпространств, дополнительных к $\operatorname{rad}\alpha$. Тогда множество аффиноров, ассоциированных с 1-формой α, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством комплексных структур на D, ассоциированных с 2-формой $d\alpha_D$.*

Для существования на алгеброиде Ли E аффинорной структуры необходимо существование на E регулярной 1-формы и существование на рабочем расслоении D комплексной структуры, ассоциированной с ее внешним дифференциалом. Комплексная структура на рабочем расслоении D задает ориентацию на векторном подрасслоении D. Первый класс Штифеля — Уитни ориентируемого векторного расслоения всегда равен нулю (см. [5]). Объединяя это с предложением 2.2, получаем необходимые условия существования на алгеброиде Ли аффинорной структуры.

Предложение 3.5. *Если на алгеброиде Ли E ранга $r \geq 3$ существует аффинорная структура с рабочим расслоением D, то*

$$e(\Lambda^2(E)) = w_1(D) = 0,$$

где $e(\lambda^2(E))$ — класс Эйлера векторного расслоения $\Lambda^2(E)$, $w_1(D)$ — первый класс Штифеля — Уитни подрасслоения D.

Пример 3.6 (точная кэлерова структура). Пусть E — вещественный алгеброид Ли ранга $2r$, Ω — симплектическая форма на E, J — комплексная структура на E, сохраняющая форму Ω, и $H^2(M;E;\mathbb{R}) = 0$. Тогда на E существует регулярная 1-форма α такая, что $d\alpha = \Omega$. Поскольку 2-форма Ω невырожденна, $\operatorname{rad}\alpha = \{0\}$ и рабочее расслоение совпадает с E. Если $\Omega(\sigma, J\sigma) \geq 0$ для любого сечения $\sigma \in C^\infty(E)$, то комплексная структура J удовлетворяет свойствам из определения 3.2, а следовательно, является аффинором, ассоциированным с 1-формой α.

Пример 3.7 (контактная структура). Пусть E — вещественный алгеброид Ли ранга $2r+1$ и α — 1-форма на E такая, что $(d\alpha)^r \wedge \alpha \neq 0$. Такая 1-форма α называется *контактной структурой* на алгеброиде Ли E. Положим $D = \ker\alpha$. Для контактной формы α существует всюду отличное от нуля трансверсальное D сечение ξ векторного расслоения E, порождающее одномерное расслоение радикалов контактной формы α, а 2-форма $d\alpha$ невырожденна на D (см. [8]).

Пусть J — комплексная структура на D такая, что $J^*d\alpha = d\alpha$ и $d\alpha(\sigma, J\sigma) \geq 0$ для любого $\sigma \in C^\infty(E)$. Введем поле эндоморфизмов Φ векторного расслоения E следующим образом:

$$\Phi\sigma = J\sigma | \sigma \in D, \quad \Phi\xi = 0.$$

Тогда Φ является аффинором, ассоциированным с контактной формой α.

Пример 3.8. Пусть Q — вещественное многообразие размерности $2n$, Ω — точная невырожденная внешняя 2-форма на Q и J — почти комплексная структура на Q, сохраняющая 2-форму Ω. Пусть $M = Q \times \mathbb{R}^k$ и α — 1-форма на Q такая, что $d\alpha = \Omega$. Продолжим 1-форму α на $\mathbb{R}^k$ нулем. Тогда $\operatorname{rad}\alpha = T\mathbb{R}^k$, $D = TQ$. Полагая

$$\Phi X = JX | X \in TQ, \quad \Phi X = 0 | X \in T\mathbb{R}^k,$$

получаем на M аффинор Φ, ассоциированный с 1-формой α. При этом 1-форма α регулярная и $\dim(\operatorname{rad}\alpha) = k$.

Пример 3.9. Пусть M — вещественное многообразие размерности $2n$ и $E = TM \oplus T^*M$ — векторное расслоение над M. Такое векторное расслоение можно наделить структурой алгеброида Ли с помощью скобки Куранта:

$$[X+\omega, Y+\theta] = [X,Y] + \mathrm{L}_X\,\theta - \mathrm{L}_Y\,\omega - \frac{1}{2}d(I_X\theta - I_Y\omega).$$

Пусть η — 1-форма на M такая, что 2-форма $d\eta$ является невырожденной формой на M. Введем на алгеброиде Ли E 1-форму α:

$$\alpha(X+\omega) = \eta(X).$$

Применяя формулу (3), получаем

$$d\alpha(X+\omega, Y+\theta) = d\eta(X,Y),$$

откуда

$$d\alpha(X+\omega, \theta) = 0, \quad \omega, \theta \in T^*M,\ X \in TM.$$

Стало быть, $\operatorname{rad}\alpha = T^*M$, $D = TM$.

Пусть J — почти комплексная структура, ассоциированная с симплектической формой $d\eta$ и сохраняющая ориентацию на M. Тогда поле эндоморфизмов $\varPhi$ векторного расслоения E, действующее на сечении $\sigma = X + \omega$ так:

$$\varPhi\sigma = JX,$$

определяет аффинор на E, а пара $\alpha, \varPhi$ — аффинорная структура на $TM \oplus T^*M$.

По аналогии с понятием гиперкомплексной структуры введем определение гипераффинорной структуры.

Определение 3.10. *Гипераффинорной структурой на алгеброиде Ли E* называется пара, состоящая из регулярной 1-формы α на E и ассоциированного аффинора $\varPhi$ вида

$$\varPhi = a\varPhi_1 + b\varPhi_2 + c\varPhi_3, \quad a, b, c \in C^\infty(M),$$

где $\varPhi_1, \varPhi_2, \varPhi_3$ — аффиноры, ассоциированные с 1-формой α и удовлетворяющие условию

$$\varPhi_i\varPhi_j = -\varPhi_j\varPhi_i, \quad i < j \le 3.$$

Так же, как для аффинорных структур, легко установить, что множество всех гипераффинорных структур с фиксированной регулярной 1-формой α находится во взаимно однозначном соответствии с множеством гиперкомплексных структур на рабочем расслоении D. Из определения 3.10 и условия (2) определения 3.2 следует, что функции a, b, c должны удовлетворять условию

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Отсюда вытекает, что функции a, b, c представляются в виде

$$a = \cos(u)\cos(v), \quad b = \cos(u)\sin(v), \quad c = \sin(v),$$

где u, v — некоторые функции класса C^∞ на M. Таким образом, любая гипераффинорная структура на алгеброиде Ли E задается регулярной 1-формой α, тройкой базисных сохраняющих $d\alpha$ комплексных структур $\varPhi_1, \varPhi_2, \varPhi_3$ на рабочем расслоении D и парой функций $u, v \in C^\infty(M)$.

§ 4. Аффинорные метрические структуры

Пусть M — паракомпактное многообразие размерности n, E — алгеброид Ли над M ранга r, α — регулярная 1-форма на E с ненулевым радикалом и рабочим расслоением D. Пусть Φ — аффинор, ассоциированный с 1-формой α. Из свойства (4) определения 3.2 следует, что симметрическая 2-форма $d\alpha_\Phi$ такая, что

$$d\alpha_\Phi(\sigma,\tau) = d\alpha(\sigma,\Phi\tau), \quad \sigma,\tau\in C^\infty(E),$$

является римановой метрикой на рабочем расслоении d. Таким образом, аффинорная структура на алгеброиде Ли E индуцирует субриманову структуру D, а именно $d\alpha_\Phi$. Однако чтобы продолжить эту субриманову метрику до римановой метрики на всем алгеброиде Ли E, необходимо определить дополнительный объект.

Определение 4.1. *Метрикой радикала регулярной 1-формы* α на алгеброиде Ли E называется симметрическая 2-форма β на E, обладающая следующими свойствами:

(1) ограничение формыβ на $\operatorname{rad}\alpha$ есть риманова метрика на $\operatorname{rad}\alpha$;

(2) $\operatorname{rad}\beta = D$.

Из определения 4.1 сразу следует, что $\beta(\sigma,\tau)$ может принимать ненулевые значения только при $\sigma,\tau\in\operatorname{rad}\alpha$.

Теперь можно задать риманову метрику на E в виде

$$g(\sigma,\tau) = d\alpha(\sigma,\Phi\tau) + \beta(\sigma,\tau), \quad \sigma,\tau\in C^\infty(E). \tag{5}$$

Эта метрика называется *аффинорной метрической структурой*. Для задания аффинорной метрической структуры необходимо задать регулярную 1-форму α, аффинор Φ и метрику радикала β. Однако в случае одномерного радикала, трансверсального рабочему расслоению, метрика радикала полностью определяется аффинорной структурой на E.

Пример 4.2. Пусть α — регулярная 1-форма на алгеброиде Ли E ранга $2r+1$ и ξ — сечение E, всюду отличное от нуля на M. Обозначим через D векторное подрасслоение ранга $2r$, трансверсальное сечению ξ. Предположим, что 2-форма $d\alpha$ невырожденна на D и $D=\ker\alpha$ (это всегда выполняется, если α — контактная структура на E). Тогда по теореме 2.4 ξ порождает одномерный радикал 1-формы α. Легко проверить, что симметрическая 2-форма $\beta=\alpha\otimes\alpha$ является метрикой радикала по определению 4.1. Любая комплексная структура на D, сохраняющая 2-форму $d\alpha$, однозначно определяет аффинор Φ на E, и получаем аффинорную метрическую структуру:

$$g = d\alpha_\Phi + \alpha\otimes\alpha.$$

При этом подрасслоение D и сечение ξ ортогональны относительно такой метрики g.

Докажем, что в случае одномерного радикала, трансверсального ядру регулярной 1-формы, любая метрика радикала пропорциональна форме β из примера 4.2.

Предложение 4.3. *Пусть α — регулярная 1-форма с одномерным радикалом на алгеброиде Ли E нечетного ранга и $E=\ker\alpha\oplus\operatorname{rad}\alpha$. Тогда любая метрика радикала на E имеет вид*

$$\exp(f)\alpha\otimes\alpha,$$

где f — функция класса C^∞ на M.

Доказательство. Пусть β — произвольная метрика радикала и ξ — сечение, порождающее одномерное расслоение $\operatorname{rad}\alpha$. Без потери общности можно считать, что $\alpha(\xi) = 1$. Обозначим ядро 1-формы α через D. Для любых сечений σ и τ имеем разложение

$$\sigma = \sigma' + \mu\xi, \quad \tau = \tau' + \nu\xi,$$

где σ' — проекция σ на D, τ' — проекция τ на D, $\mu = \alpha(\sigma)$, $\nu = \alpha(\tau)$ — функции на M. Тогда

$$\beta(\sigma, \tau) = \mu\nu\beta(\xi, \xi) = \beta(\xi, \xi)\alpha(\sigma)\alpha(\tau).$$

Полагая $f = \ln(\beta(\xi, \xi))$, получаем $\beta = \exp(f)\alpha \otimes \alpha$. □

Следствием предложения 4.3 является то, что для контактной формы α на алгеброиде Ли нечетного ранга метрика радикала может иметь только вид $\beta = \exp(f)\alpha \otimes \alpha$, т. е. все метрики радикала для одной и той же контактной структуры конформно эквивалентны. Получаем, что любая контактная метрическая структура на алгеброиде Ли полностью определяется тройкой α, J, f, где α — контактная форма, J — комплексная структура, сохраняющая 2-форму $d\alpha$ на $\ker(\alpha)$, f — глобальная функция на базе алгеброида Ли.

Пример 4.4. Пусть $E = TM \oplus T^*M$ — алгеброид Ли над компактным ориентируемым многообразием M со скобкой Куранта, как в примере 3.9. Пусть α — регулярная 1-форма на E такая, что $\operatorname{rad}\alpha = T^*M$, $D = TM$, и Φ — ассоциированный с α аффинор, как в примере 3.9. Зададим метрику радикала β на E следующим образом:

$$\beta(X + \omega, Y + \theta) = \int_M \omega \wedge \star\theta,$$

где $X, Y \in TM$, $\omega, \theta \in T^*M$, $\star\theta$ обозначает действие оператора Ходжа на 1-форму θ. В результате получаем на E аффинорную метрическую структуру $g = d\alpha_\Phi + \beta$.

Линейная связность на множестве сечений алгеброида Ли E определяется как отображение $\nabla : (C^\infty(E) \times C^\infty(E)) \to C^\infty(E)$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $\nabla_\sigma f = \sigma(f)$ для любой функции f на M и любого сечения σ;

(2) $\nabla_{\sigma+\tau}\rho = \nabla_\sigma\rho + \nabla_\tau\rho$, $\nabla_\sigma(\tau + \rho) = \nabla_\sigma\tau + \nabla_\sigma\rho$ для любых сечений σ, τ, ρ;

(3) $\nabla_{f\sigma}\tau = f\nabla_\sigma\tau$, $\nabla_\sigma(f\tau) = \sigma(f)\tau + f\nabla_\sigma\tau$ для любой функции f на M и любых сечений σ, τ.

Заметим, что ∇_τ задает эндоморфизм пространства $C^\infty(E)$ при фиксированном сечении τ, а ∇_σ — дифференцирование пространства $C^\infty(E)$ при фиксированном сечении σ. Если ω — p-форма на E, а σ — фиксированное сечение E, то $\nabla_\sigma\omega$ определяется как p-форма, действующая на наборе из p сечений следующим образом:

$$(\nabla_\sigma\omega)(\tau_1, \dots, \tau_p) = \sigma(\omega(\tau_1, \dots, \tau_p) - \omega(\nabla_\sigma\tau_1, \dots, \tau_p) \\ - \omega(\tau_1\nabla_\sigma\tau_2, \dots, \tau_p) - \omega(\tau_1, \dots, \nabla_\sigma\tau_p).$$

Говорят, что связность ∇ на алгеброиде Ли E с римановой метрикой g *риманова*, если $\nabla g = 0$. Кручение T связности ∇ на алгеброиде Ли для любых двух сечений σ и τ задается так:

$$T(\sigma, \tau) = \nabla_\sigma\tau - \nabla_\tau\sigma - [\sigma, \tau].$$

Риманова связность с нулевым кручением называется *связностью Леви-Чивиты.* Такая связность всегда существует и единственна. Для связности Леви-Чивиты римановой метрики g выполняется следующее равенство (см. [1, 2]):

$$2\,g(\nabla_\sigma\tau,\rho)=\sigma(g(\tau,\rho))+\tau(g(\sigma,\rho))-\rho(g(\sigma,\tau))\\ +g(\sigma,[\tau,\rho])-g(\tau,[\rho,\sigma])+g(\rho,[\sigma,\tau]),\quad \sigma,\tau,\rho\in C^\infty(E). \tag{6}$$

Пусть ∇ — связность Леви-Чивиты на $C^\infty(E)$ аффинорной метрической структуры $g=d\alpha_\Phi+\beta$, $\widehat{\nabla}$ — связность Леви-Чивиты на $C^\infty(D)$ метрики $d\alpha_\Phi$, а ∇^β — связность Леви-Чивиты на $C^\infty(\operatorname{rad}\alpha)$ метрики радикала β. Из формулы (6) следует, что $\widehat{\nabla}_\sigma\tau=\nabla_\sigma\tau$ для любых сечений $\sigma,\tau\in D$, только когда $[\sigma,\tau]\in D$; $\nabla^\beta_\sigma\tau=\nabla_\sigma\tau$ для любых сечений $\sigma,\tau\in\operatorname{rad}\alpha$, только когда $[\sigma,\tau]\in\operatorname{rad}\alpha$. Таким образом, получаем следующий критерий.

Предложение 4.5. *Пусть ∇ — связность Леви-Чивиты аффинорной метрической структуры $g=d\alpha_\Phi+\beta$ на алгеброиде Ли $E=D\oplus\operatorname{rad}\alpha$. Тогда $\nabla|_D=\widehat{\nabla}$ и $\nabla|_{\operatorname{rad}\alpha}=\nabla^\beta$ тогда и только тогда, когда векторные подрасслоения D и $\operatorname{rad}\alpha$ инволютивны, т. е. являются подалгеброидами.*

Пусть $g=d\alpha_\Phi+\beta$ — аффинорная метрическая структура на алгеброиде Ли $E=D\oplus\operatorname{rad}\alpha$ ранга r. Введем обозначения:

$$Q_0=D,\quad Q_i=[Q_{i-1},Q_0],\quad i=1,\dots,r.$$

Алгеброид Ли E называется *алгеброидом Карно — Каратеодори*, если существует индекс i такой, что $Q_i=E$. Из предложения 4.5 следует, что если E — алгеброид Карно — Каратеодори, то ограничение связности Леви-Чивиты ∇ аффинорной метрической структуры g на рабочее расслоение D и $\operatorname{rad}\alpha$ не совпадает с $\widehat{\nabla}$ и ∇^β соответственно. В этом случае возникают две новые линейные (не обязательно римановы) связности: $\nabla'=\frac{\nabla^D+\widehat{\nabla}}{2}$ на D и $\nabla''=\frac{\nabla^{\operatorname{rad}\alpha}+\nabla^\beta}{2}$ на $\operatorname{rad}\alpha$. Здесь $\nabla^D_\sigma\tau$ — проекция сечения $\nabla_\sigma\tau$ на D, $\nabla^{\operatorname{rad}\alpha}_\sigma\tau$ — проекция сечения $\nabla_\sigma\tau$ на $\operatorname{rad}\alpha$.

§ 5. Характеристическое сечение

Пусть E — вещественный алгеброид Ли над паракомпактным многообразием M, α — незамкнутая регулярная 1-форма на E, Φ — ассоциированный с 1-формой α аффинор, D — рабочее расслоение на M, β — метрика радикала 1-формы α и $g=d\alpha_\Phi+\beta$ — аффинорная метрическая структура на E. Поскольку $\Phi\sigma\in D=\operatorname{rad}\beta$ для любого сечения $\sigma\in C^\infty(E)$, имеем $\beta(\Phi\sigma,\tau)=0$ для любых сечений $\sigma,\tau\in C^\infty(E)$ и

$$g(\Phi\sigma,\tau)=d\alpha(\sigma,\tau).$$

По теореме Рисса о линейном функционале (см. [9]) на M существует единственное глобальное сечение ξ алгеброида Ли E такое, что $\alpha(\sigma)=g(\xi,\sigma)$ для любого сечения $\sigma\in C^\infty(E)$. Такое сечение называют *характеристическим сечением* для аффинорной метрической структуры g. Сразу из определения характеристического сечения получаем следующие очевидные свойства.

Предложение 5.1. *Пусть α — регулярная 1-форма на алгеброиде Ли E и ξ — характеристическое сечение для соответствующей аффинорной метрической структуры g. Тогда*

(1) *если 1-форма α не имеет сингулярных точек первого рода, то $\xi \neq 0$ во всех точках из M;*

(2) $\alpha(\xi) = g(\xi, \xi) > 0$;

(3) *для любого сечения σ векторного расслоения E*

$$d\alpha(\xi, \sigma) = g(\varPhi\xi, \sigma) = -\alpha(\varPhi\sigma);$$

(4) *сечение ξ ортогонально подрасслоению $\ker \alpha$ в любой точке из M.*

В случае контактной 1-формы α характеристическое сечение всегда порождает одномерный радикал 1-формы α, т. е. $\operatorname{rad} \alpha = \mathbb{R}\xi$. Однако в случае неконтактной 1-формы с произвольным радикалом характеристическое сечение может как принадлежать радикалу, так и не принадлежать ему.

Лемма 5.2. *Пусть α — незамкнутая регулярная 1-форма на алгеброиде Ли E, g — соответствующая аффинорная метрическая структура и ξ — характеристическое сечение для аффинорной метрической структуры g. Тогда для любого сечения $\sigma \in C^\infty(E)$*

$$(\mathrm{L}_\xi \alpha)(\sigma) = d\alpha(\xi, \sigma) + d(\alpha(\xi))(\sigma) = g(\varPhi\xi, \sigma) + \sigma(g(\xi, \xi)).$$

Доказательство. Используя определение 1.1 производной Ли и предложение 5.1, имеем

$$\begin{aligned}(\mathrm{L}_\xi \alpha)(\sigma) = I_\xi d\alpha(\sigma) + dI_\xi\alpha(\sigma) &= d\alpha(\xi, \sigma) + d(\alpha(\xi))(\sigma) \\ &= g(\varPhi\xi, \sigma) + \sigma(\alpha(\xi)) = g(\varPhi\xi, \sigma) + \sigma(g(\xi, \xi)). \quad \square\end{aligned}$$

Определение 5.3. *Строгой аффинорной метрической структурой* называется аффинорная метрическая структура $g = d\alpha_\varPhi + \beta$ с характеристическим сечением ξ таким, что $d\alpha \neq 0$, $\xi \in \operatorname{rad} \alpha$.

Будем обозначать $g(\xi, \xi)$ через $|\xi|^2$. Из леммы 5.2 сразу следует, что

$$I_\xi d\alpha = \mathrm{L}_\xi \alpha - d(|\xi|^2).$$

Отсюда получаем критерий того, когда характеристическое сечение принадлежит радикалу 1-формы.

Предложение 5.4. *Характеристическое сечение ξ алгеброида Ли E для аффинорной метрической структуры g на E лежит в* $\operatorname{rad} \alpha$ (*аффинорная метрическая структура g строгая*) *тогда и только тогда, когда $\mathrm{L}_\xi \alpha = d|\xi|^2$.*

Из предложения 5.4 легко вытекает полезное

Следствие 5.5. *Характеристическое сечение ξ алгеброида Ли E для строгой аффинорной метрической структуры g на E имеет постоянную длину на M тогда и только тогда, когда $\mathrm{L}_\xi \alpha = 0$.*

Аффинорные метрические структуры с характеристическим сечением постоянной длины представляют важный специальный класс аффинорных метрических структур. Для таких структур функция $\alpha(\xi)$ постоянна на M. Также для таких структур имеется простой критерий принадлежности характеристического сечения радикалу 1-формы.

Предложение 5.6. *Пусть α — незамкнутая регулярная 1-форма на алгеброиде Ли E, $\varPhi$ — ассоциированный с 1-формой α аффинор и g — соответствующая аффинорная метрическая структура с характеристическим сечением ξ постоянной длины. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\xi \in \operatorname{rad} \alpha$;

(2) $\varPhi\xi = 0$;

(3) $\mathrm{L}_\xi\, \alpha = 0$.

Доказательство. Эквивалентность условий (1) и (2) следует из свойства (3) предложения 5.1, эквивалентность условий (2) и (3) — из леммы 5.2. Наконец, поскольку (1) эквивалентно (2), а (2) эквивалентно (3), то (1) эквивалентно (3). □

Производная Ли метрики g на алгеброиде Ли E вдоль сечения ρ определяется как симметричная 2-форма $\mathrm{L}_\rho\, g$, действующая на любой паре сечений σ, τ следующим образом:

$$(\mathrm{L}_\rho\, g)(\sigma, \tau) = \rho(g(\sigma, \tau)) - g([\rho, \sigma], \tau) - g(\sigma, [\rho, \tau]).$$

Это позволяет определить следующий важный специальный класс аффинорных метрических структур.

Определение 5.7. Аффинорная метрическая структура g на алгеброиде Ли E с характеристическим сечением ξ называется K-*аффинорной метрической структурой*, если $\mathrm{L}_\xi\, g = 0$.

В случае, когда $E = TM$, характеристическое векторное поле для K-аффинорной метрической структуры g на M является киллинговым векторным полем, т. е. порождает однопараметрическую группу локальных изометрий M относительно метрики g (см. [1]). Уникальность K-аффинорных метрических структур заключается в том, что для них всегда можно явно описать аффинор $\varPhi$.

Предложение 5.8. *Пусть α — незамкнутая регулярная 1-форма на алгеброиде Ли E, $\varPhi$ — ассоциированный с 1-формой α аффинор, g — соответствующая K-аффинорная метрическая структура на E с характеристическим сечением ξ и ∇ — связность Леви-Чивиты метрики g. Тогда $\varPhi = 2\nabla\xi$.*

Доказательство. Используя формулы (3), (6) и определение 5.7, для любых сечений σ, τ векторного расслоения E получаем

$$\begin{aligned} 2(\nabla_\sigma \xi, \tau) &= \sigma(g(\xi,\tau)) + \xi(g(\sigma,\tau)) - \tau(g(\xi,\sigma)) - g([\xi,\sigma],\tau) - g([\xi,\tau],\sigma) + g([\sigma,\tau],\xi) \\ &= \sigma(\alpha(\tau)) - \tau(\alpha(\sigma)) - \alpha([\sigma,\tau]) + (\mathrm{L}_\xi\, g)(\sigma,\tau) = d\alpha(\sigma,\tau) = g(\varPhi\sigma,\tau). \end{aligned}$$

Из невырожденности метрики g на E вытекает, что

$$\varPhi\sigma = 2\nabla_\sigma \xi$$

для любого сечения $\sigma \in C^\infty(E)$. □

Лемма 5.9. *Пусть $g = d\alpha_\varPhi + \beta$ — K-аффинорная метрическая структура на алгеброиде Ли E с характеристическим сечением ξ. Для любого сечения $\sigma \in C^\infty(E)$ имеет место равенство*

$$d\alpha(\xi, \sigma) = -\sigma(|\xi|^2).$$

Доказательство. Используя формулу (6) и предложение 5.8, для любого сечения σ векторного расслоения E имеем

$$d\alpha(\xi,\sigma) = g(\Phi\xi,\sigma) = 2\,g(\nabla_\xi\xi,\sigma) = 2\xi(g(\xi,\sigma)) - \sigma(g(\xi,\xi)) - 2\,g([\xi,\sigma],\xi)$$
$$= -\sigma(|\xi|^2) + 2\,(\mathrm{L}_\xi\, g)(\xi,\sigma) = -\sigma(|\xi|^2). \quad \square$$

Теорема 5.10. *Пусть g — К-аффинорная метрическая структура на алгеброиде Ли E, ξ — характеристическое сечение для g и ∇ — связность Леви-Чивиты метрики g. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *g является строгой метрической структурой;*

(2) $\nabla_\xi\xi = 0$;

(3) *характеристическое сечение ξ имеет постоянную длину на M.*

Доказательство. Поскольку $\operatorname{rad}\alpha = \ker\Phi$, эквивалентность утверждений (1) и (2) следует из предложения 5.8, эквивалентность (1) и (3) — из леммы 5.9, эквивалентность (2) и (3) — из транзитивности последовательности

$$(2) \leftrightarrow (1) \leftrightarrow (3). \quad \square$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. В 2 т. М.: Мир, 1990.
2. *Кобаяси Ш., Намидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. В 2 т. М.: Наука, 1981.
3. *Mackenzie K.* Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. (London Math. Soc. Lect. Notes Ser.; V. 124).
4. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970.
5. *Милнор Дж., Сташеф Дж.* Характеристические классы. М.: Мир, 1979.
6. *Корнев Е. С.* Инвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 107–123.
7. *Фоменко А. Т.* Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: МГУ, 1988.
8. *Blair D. E.* Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. Boston: Birkhauser, 2010.
9. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

Статья поступила 29 ноября 2013 г.

Корнев Евгений Сергеевич
Кемеровский гос. университет,
ул. Красная, 6, Кемерово 650043
q148@mail.ru