*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6*

*УДК 510.5*

# $Q$–СВОДИМОСТЬ И $m$–СВОДИМОСТЬ НА ВЫЧИСЛИМО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВАХ

**И. И. Батыршин**

**Аннотация.** Исследуются различия $Q$-сводимости и $m$-сводимости на вычислимо перечислимых множествах. Строится такое не вычислимое не $m$-полное вычислимо перечислимое множество $B$, что для всех вычислимо перечислимых множеств $A \leq_Q B$ выполняется $A \leq_m B$. Доказывается, что для любого не вычислимого вычислимо перечислимого множества $A$ существует такое вычислимо перечислимое множество $B$, что $A \leq_Q B$, но $A \nleq_m B$. Доказывается, что для любого простого множества $B$ существует такое вычислимо перечислимое множество $A$, что $A \leq_Q B$, но $A \nleq_m B$. Из последнего результата, в частности, следует, что в $Q$-степени любого простого множества содержится бесконечно много в. п. $m$-степеней.

**Ключевые слова:** $Q$-сводимость, $m$-сводимость, вычислимо перечислимое множество, простое множество.

## 1. Введение

Основной задачей теории вычислимости является изучение сложности математических проблем. Одним из ключевых инструментов для решения этой задачи выступают алгоритмические сводимости, которые задают степени неразрешимости этих проблем и позволяют сводить разрешимость одних проблем к другим. Наиболее естественной и широко изученной алгоритмической сводимостью является тьюрингова сводимость ($T$-сводимость), которая максимально полно отражает интуитивное понятие сведения разрешимости одной математической проблемы к другой.

Изучение вычислимо перечислимых (в. п.) $T$-степеней началось со статьи Поста [1], ставшей классической и задавшей направления развития теории вычислимости на десятилетия вперед. В этой статье Пост поставил проблему построения не вычислимой не $T$-полной в. п. $T$-степени и предложил программу по достижению этой цели, которая заключалась в построении в. п. множества с очень «жидким» дополнением, гарантирующим его неполноту. Для реализации этой программы он ввел несколько алгоритмических сводимостей, в настоящее время называемых в литературе *сильными сводимостями* (см. [2–4]), изучение которых хоть и не привело к решению поставленной им проблемы, но позволило получить ряд важных результатов и дало толчок к постановке и решению новых проблем.

Одной из введенных Постом сводимостей была много-одно сводимость (также известная как $m$-сводимость), получившая приложения не только в теории вычислимости, но и в теории вычислительной сложности, а также в ряде других смежных дисциплин (множество $A$ *$m$-сводится к множеству* $B$ ($A \leq_m B$), если существует такая вычислимая функция $f$, что для всех $x \in \omega$ выполняется $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$).

В настоящее время существует целый ряд независимых решений проблемы Поста, основанных на принципиально разных подходах. Самым известным решением этой проблемы является теорема Фридберга — Мучника (см. [5]), для доказательства которой был разработан метод приоритета, впоследствии ставший одним из наиболее мощных методов в арсенале теории вычислимости. Другим решением проблемы Поста [6] стали $K$-тривиальные множества — естественный и просто определяемый класс множеств, являющийся одним из ключевых объектов изучения в теории алгоритмической случайности и сложности.

Однако оба эти решения основаны на подходах, весьма далеких от изначальной программы Поста по построению в. п. множества с «жидким» дополнением. Тем не менее программа Поста была выполнена С. С. Марченковым [7], который, используя одну из алгоритмических сводимостей, а именно квазисводимость ($Q$-сводимость), показал, что $\eta$-гипергиперпростые множества, введенные Ю. Л. Ершовым [8], не могут быть $T$-полными.

Квазисводимость ($Q$-сводимость) введена Тенненбаумом как одно из естественных усилений $T$-сводимости (см. [2]) на в. п. множествах. Напомним, что множество $A$ *квазисводится к множеству* $B \subseteq \omega$ ($A \leq_Q B$), если существует такая вычислимая функция $g$, что для всех $x \in \omega$ выполняется $x \in A \Leftrightarrow W_{g(x)} \subseteq B$.

$Q$-сводимость по сравнению с другими алгоритмическими сводимостями до недавнего времени привлекала мало внимания в связи с тем, что она не влечет $T$-сводимости на всех подмножествах множества натуральных чисел. Поэтому с позиции глобальной теории степеней она не представляет такого интереса, как сильные сводимости. Однако на в. п. степенях $Q$-сводимость влечет $T$-сводимость, тем самым считаем, что с точки зрения локальной теории степеней она имеет не меньшее значение, чем табличная сводимость или другие сильные сводимости.

Еще одной замечательной особенностью $Q$-сводимости, помимо участия в решении проблемы Поста, является ее прямая и тесная связь с алгебраическими отношениями между группами, как было показано в [9, 10]. Кроме того, в [11, 12] изучены свойства $Q$-полных множеств с точки зрения теории алгоритмической случайности и сложности.

В последние годы алгебраическая структура в. п. и $n$-в. п. $Q$-степеней интенсивно изучалась. В частности, в [13–19] показано, что верхняя полурешетка в. п. $Q$-степеней не дистрибутивна и не является решеткой, построены примеры минимальных пар в. п. $Q$-степеней, изучены дополняемые и недополняемые, расщепляемые и нерасщепляемые, ветвящиеся и неветвящиеся в. п. и $n$-в. п. $Q$-степени, доказано что в. п. $Q$-степени плотны, рассмотрены изолированные и неизолированные 2-в. п. $Q$-степени, а также ряд других свойств этой алгебраической структуры.

В [14, 20, 21] изучены теории первого порядка в. п. $Q$-степеней, $\Pi^0_2$ $Q$-степеней и $Q$-степеней в целом и показано, что первые две теории неразрешимы, а последняя вычислимо изоморфна теории арифметики второго порядка.

Однако взаимосвязь $Q$-сводимости с $m$-сводимостью и другими алгоритмическими сводимостями в настоящее время практически не изучена. В частности, до сих пор остается открытым [22] вопрос о существовании в. п. не вычислимой $Q$-степени, состоящей ровно из одной $m$-степени.

Целью данной статьи является изучение вопроса о том, насколько сильно $m$-сводимость и $Q$-сводимость различаются на в. п. множествах.

В [23] в качестве ключевого вопроса, характеризующего взаимосвязь произвольных алгоритмических сводимостей $r_1$ и $r_2$, поставлена проблема существования $r_1$-степеней, имеющих «$r_2$-вершину» или «$r_2$-дно». Говорят, что $r_1$-степень $\mathbf{b}$ *имеет $r_2$-вершину*, если в $r_1$-степени $\mathbf{b}$ существует такое в. п. множество $B$, что для всех в. п. множеств $A$ из $r_1$-степени $\mathbf{b}$ выполняется $A \leq_{r_2} B$. Аналогично $r_1$-степень $\mathbf{b}$ *имеет $r_2$-дно*, если в $r_1$-степени $\mathbf{b}$ существует такое в. п. множество $B$, что для всех в. п. множеств $A$ из $r_1$-степени $\mathbf{b}$ выполняется $B \leq_{r_2} A$.

Главным результатом данной статьи является построение такого не вычислимого не $m$-полного в. п. множества $B$, что для всех в. п. $A \leq_Q B$ выполняется $A \leq_m B$, т. е. множества, которое является $m$-вершиной своей $Q$-степени.

Также в работе доказываются следующие теоремы, касающиеся различий $m$-сводимости и $Q$-сводимости на в. п. множествах.

(i) Для любого не вычислимого в. п. множества $A$ существует такое в. п. множество $B$, что $A \leq_Q B$, но $A \not\leq_m B$.

(ii) Для любого простого множества $B$ существует такое в. п. множество $A$, что $A \leq_Q B$, но $A \not\leq_m B$.

Из последнего результата, в частности, следует, что в $Q$-степени любого простого множества содержится бесконечно много в. п. $m$-степеней.

## 2. Различия $m$-сводимости и $Q$-сводимости на в. п. множествах

В работе используются стандартные определения и обозначения, которые могут быть найдены в [2, 3, 5].

При доказательстве предложения 1, теорем 2 и 5 для обеспечения условия $A \leq_Q B$ будем тем или иным способом строить равномерную в. п. последовательность $\{U_x\}_{x\in\omega}$ такую, что $x \in A \Leftrightarrow U_x \subseteq B$. Тогда сводимость $A \leq_Q B$ будет обеспечиваться вычислимой функцией $g$, удовлетворяющей равенству $W_{g(x)} = U_x$. Однако во избежание излишней загруженности доказательств техническими деталями при доказательстве этих теорем будем сразу говорить, что *строим функцию $g$ и перечисляем элементы в $W_{g(x)}$*, имея при этом в виду, что строим $\{U_x\}_{x\in\omega}$ и затем определяем описанным выше способом функцию $g$.

В статье изучается вопрос о различии $Q$-сводимости и $m$-сводимости на в. п. множествах. Ясно, что $m$-сводимость влечет $Q$-сводимость на всех множествах (если $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ для вычислимой функции $f$, то $x \in A \Leftrightarrow W_{g(x)} \subseteq B$ для вычислимой функции $g$, определяемой следующим образом: $W_{g(x)} = \{f(x)\}$). Верно ли обратное на всех или некоторых в. п. множествах? Есть ли такие в. п. множества $A$ и $B$, что из $A \leq_Q B$ следует $A \leq_m B$?

Эти сводимости совпадают в тривиальных случаях: если множество $A$ вычислимо, то оно $m$-сводится и $Q$-сводится ко всем другим множествам, кроме $\varnothing$ и $\omega$, а если множество $B$ $m$-полное, то к нему $m$-сводятся и $Q$-сводятся все в. п. множества.

Совпадают ли эти сводимости в общем случае на всех в. п. множествах? Легко показать, что это не так, а именно существуют в. п. множества, на которых эти две сводимости не совпадают. Далее в статье доказываются более сильные утверждения, однако для удобства понимания читателем доказательств последующих теорем и специфики работы с $Q$-сводимостью приведем набросок построения таких множеств.

**Предложение 1.** *Существуют такие в. п. множества $A$ и $B$, что $A \leq_Q B$, но $A \nleq_m B$.*

Доказательство. Строим множества $A$ и $B$ по шагам, удовлетворяя глобальное требование $\mathscr{R}$ и для каждого $e \in \omega$ требования $\mathscr{P}_e$:

$$\mathscr{R} : A \leq_Q B; \quad \mathscr{P}_e : (\exists x)(\Phi_e(x) \uparrow \vee \neg(x \in A \Leftrightarrow \Phi_e(x) \in B).$$

Фиксируем какой-либо $\bar{b}$, который никогда не будем класть в $B$ в процессе нашей конструкции.

Для удовлетворения требования $\mathscr{R}$ строим такую вычислимую функцию $g$, что $x \in A \Leftrightarrow W_{g(x)} \in B$. Для каждого $x \in \omega$ на всех шагах $s > x$, если $x \notin A_s$ и $W_{g(x),s} \subseteq B_s$, перечисляем в $W_{g(x),s+1}$ некий элемент $b \notin B_s$. Если впоследствии $x$ перечисляется в $A_t$ на шаге $t > s$, то перечисляем этот $b$ в $B_t$.

Базовый модуль для $\mathscr{P}_e$ на шаге $s$. Если на этом шаге у требования отсутствует свидетель, то назначаем в качестве свидетеля наименьший $x \notin A_s$, не использовавшийся до этого в нашей конструкции, и определяем $W_{g(x),s} = \{b_{x,e}\}$ для некоторого $b_{x,e} \notin B$, также пока не использовавшегося в конструкции.

Проверяем для свидетеля $x$ (уже имевшегося или вновь назначенного) выполнение следующих условий.

Если $x \notin A_s$ и $W_{g(x),s} \subseteq B$ (т. е. стратегия требования $\mathscr{P}_i$ для некоторого $i < e$ на предыдущем шаге перечислила $b_{x,e}$ в $B$), то перечисляем в $W_{g(x),s}$ новый не использовавшийся ранее элемент $b'_{x,e}$.

Если $(\Phi_e(x) \uparrow \vee \neg(x \in A \Leftrightarrow \Phi_e(x) \in B))[s]$, то на этом шаге больше ничего не делаем.

(1) Если $x \notin A_s$ и $\Phi_{e,s}(x) \downarrow= y \notin B_s$, то возможен один из следующих вариантов:

(1a) если $y = \bar{b}$, то перечисляем $x$ в $A_{s+1}$ и перечисляем $b_{x,e}$ в $B_{s+1}$; имеем $x \in A$, но $\Phi_e(x) \notin B$, требование удовлетворено и больше не предпринимает никаких действий на следующих шагах;

(1b) если $y \neq \bar{b}$ и $y \neq b_{z,i}$ для всех $i < e$, то перечисляем $y$ в $B_{s+1}$, навсегда оставляем $x$ в $\bar{A}$ и перечисляем $\bar{b}$ в $W_{g(x),s+1}$; имеем $x \notin A$, но $\Phi_e(x) \in B$, требование удовлетворено и больше не предпринимает никаких действий на следующих шагах;

(1c) если $y = b_{z,i}$ для некоторого $i < e$, то перечисляем $x$ в $A_{s+1}$ и перечисляем $b_{x,e}$ в $B_{s+1}$.

(2) Если $x \in A_s$ и $W_{g(x),s} \subseteq B_s$ (т. е. на предыдущем шаге стратегия требования $\mathscr{P}_i$ для некоторого $i < e$ перечислила $y$ из п. (1c) в $B$), то отменяем $x$ как свидетеля.

Конструкция. Положим $A_0 = B_0 = \varnothing$. На шаге $s$ последовательно работаем на требованиях $\mathscr{P}_0$, $\mathscr{P}_1$, ... , $\mathscr{P}_s$ в соответствии с приведенным выше модулем.

Легко видеть, что для каждого $\mathscr{P}_e$ будет выбрано не более чем $e$ свидетелей, на одном из которых требование будет удовлетворено, и тем самым конструкция приведет нас к построению искомых множеств. $\square$

Следующим естественным вопросом является вопрос о том, различаются ли $Q$-сводимость и $m$-сводимость на всех в. п. множествах или существует такое в. п. множество $A$, на котором $Q$-сводимость не отличима от $m$-сводимости, т. е. все в. п. множества, лежащие по $Q$-сводимости выше $A$ (или ниже $A$), лежат выше $A$ (ниже $A$) и по $m$-сводимости? Другими словами, можно ли усилить предыдущее предложение, если мы строим только одно множество, а второе фиксировано?

Следующая теорема показывает, что если зафиксировать нижнее множество, то по-прежнему можно построить верхнее множество с теми же свойствами, что и в предыдущем предложении, т. е. что $Q$-сводимость и $m$-сводимость различаются *над* всеми в. п. не вычислимыми множествами (над вычислимыми множествами, как упоминалось выше, эти сводимости совпадают).

**Теорема 2.** *Для любого в. п. не вычислимого $A$ существует такое в. п. множество $B$, что $A \leq_Q B$, но $A \not\leq_m B$.*

Доказательство. Строим множество $B$ по шагам, удовлетворяя те же требования, что и в предложении 1:

$$\mathscr{R} : A \leq_Q B, \quad \mathscr{P}_e : (\exists x)(\Phi_e(x) \uparrow \vee \neg(x \in A \Leftrightarrow \Phi_e(x) \in B).$$

Базовая стратегия для удовлетворения глобального требования $\mathscr{R}$ остается такой же, как и в предыдущем предложении: строим вычислимую функцию $g$ такую, что $x \in A \Leftrightarrow W_{g(x)} \in B$. Для каждого $x \in \omega$, пока $x$ не перечислен в $A$, обеспечиваем, чтобы в $W_{g(x)}$ лежал некий элемент $b_x \notin B$. Если $x$ перечисляется в $A$, то перечисляем этот $b$ в $B$.

Однако стратегия удовлетворения требования $\mathscr{P}_e$ становится более сложной, так как уже не можем контролировать перечисление элементов в множество $A$.

Поэтому для каждого $\mathscr{P}_e$ строим такое в. п. множество $C_e$, что если $(\forall x)(\Phi_e(x) \downarrow \&(x \in A \Leftrightarrow \Phi_e(x) \in B)$, то $\overline{A} = C_e$, что противоречило бы тому, что $A$ не вычислимо.

Базовый модуль для $\mathscr{P}_e$ отдельно от глобального требования $\mathscr{R}$. Используем $\omega$-последовательность циклов $k = 0, 1, 2 \ldots$, каждый из которых действует следующим образом.

(1) Ждем такого шага $s$, что или $k \in A_s$, или $k \notin A_s$ и $\Phi_{e,s}(k) \downarrow= y \notin B_s$.

(2) В первом случае закрываем цикл $k$ и открываем цикл $k+1$, во втором случае запрещаем $y$ перечисляться в $B$, перечисляем $k$ в $C_e$ и открываем цикл $k+1$.

(3) Если впоследствии $k$ перечислится в $A$, то закрываем все циклы.

Модуль имеет следующие выходы.

(А) Какой-то цикл $k$ бесконечно ждет в п. (1) или достигает п. (3). В этом случае или $\Phi_e(k) \uparrow$, или $k \notin A \& \Phi_e(k) \in B$, или $k \in A \& \Phi_e(k) \notin B$. Цикл $k$ является свидетелем того, что $A \not\leq_m B$ посредством $\Phi_e$, требование удовлетворено.

(Б) Каждый цикл работает на конечном числе шагов, и в процессе конструкции открывается бесконечно много циклов. Это означает, что для всех $k \notin A$ цикл $k$ достигнет п. (2) и никогда впоследствии не достигнет п. (3), тем самым $\overline{A} = C_e$, что противоречит тому, что $A$ не вычислимо. Таким образом, этот выход невозможен.

Сложность взаимодействия этой стратегии со стратегией удовлетворения глобального требования $\mathscr{R}$ заключается в том, что последняя может на шаге $s_0$ для некоторого $x$ перечислить в $W_{g(x)}$ некий элемент $b_x$, затем на шаге $s_1 > s_0$ для некоторого цикла $k$ окажется, что $\Phi_{e,s_1}(k) \downarrow= b_x$, этот $k$ будет перечислен в

$C_e$, потом на шаге $s_2 > s_1$ элемент $x$ будет перечислен в $A_{s_2}$, стратегия для $\mathscr{R}$ перечислит $b_x$ в $B_{s_2}$, а затем на шаге $s_3 > s_2$ элемент $k$ будет перечислен в $A_{s_3}$ и тем самым будет нарушено условие $C = \overline{A}$. При этом стратегия для $\mathscr{R}$ может нарушать каждое требование $\mathscr{P}_e$ подобным образом бесконечное количество раз на бесконечном количестве циклов.

Этой проблемы можно избежать, если в базовом модуле для $\mathscr{P}_e$ в п. (2) вместо запрещения перечисления $y$ в $B$, наоборот, будем перечислять $y$ в $B$, чтобы обеспечить $k \notin A$, но $\Phi_e(k) \in B$, после чего ждать, когда $k$ перечислится в $A$, и открывать цикл $k+1$. Если при этом окажется, что $y = b_x$ для некоторого $x$, то для удовлетворения требования $\mathscr{R}$ перечислим в $W_{g(x)}$ еще один элемент $b_x^1 \notin B$. При этой стратегии, так как $A \neq \omega$, будет открыто не более $k_0$ циклов, где $k_0$ — наименьший элемент, не принадлежащий $A$.

Однако при этой стратегии возникает вторая сложность: может случиться так, что для некоторого $x \notin A$ все элементы $b_x^1$, $b_x^2$ ..., которые перечисляем в $W_{g(x)}$, будут впоследствии перечислены в $B$ одним из требований $\mathscr{P}_i$, $i \in \omega$, и тем самым окажется, что $W_{g(x)} \subseteq B$, хотя на каждом шаге $s$ и будет выполняться $W_{g(x)} \nsubseteq B[s]$. Таким образом для этого $x \notin A$ не сможем обеспечить выполнение условия $W_{g(x)} \nsubseteq B$.

Чтобы обойти эту сложность, будем комбинировать обе стратегии: стратегию запрещения перечисления $y$ в $B$ и стратегию перечисления $y$ в $B$.

Базовый модуль для $\mathscr{P}_e$, учитывающий глобальное требование $\mathscr{R}$. Используем $\omega$-последовательность циклов $k = 0, 1, 2\dots$, каждый из которых действует следующим образом.

(1) Ждем такого шага $s$, что или $k \in A_s$, или $k \notin A_s$ и $\Phi_{e,s}(k)\downarrow = y \notin B_s$.

(2a) Если $k \in A_s$, то открываем цикл $k+1$.

(2b) Если $\Phi_{e,s}(k)\downarrow = y$ и $y = b_x$ для $x > e$, то перечисляем $y$ в $B$ и ждем, пока $k$ перечислится в $A$.

(3b) Если впоследствии $k$ перечислится в $A$, то открываем цикл $k+1$.

(2c) Если $\Phi_{e,s}(k)\downarrow = y$ и $y = b_x$ для $x < e$, то запрещаем перечислять $y = b_x$ в $B$, перечисляем $k$ в $C_e$ и открываем цикл $k+1$.

(3c) Если впоследствии $k$ перечислится в $A$, то закрываем все циклы.

(4c) Если впоследствии $y$ будет перечислен в $B$, то открываем цикл $k+1$.

Модуль имеет следующие выходы.

(A) Какой-то цикл $k$ бесконечно ждет в п. (1) или бесконечно ждет в п. (2b), или достигает п. (3c) и не достигает п. (4c). В этом случае или $\Phi_e(k)\uparrow$, или $k \notin A \& \Phi_e(k) \in B$, или $k \in A \& \Phi_e(k) \notin B$. Цикл $k$ является свидетелем того, что $A \nleq_m B$ посредством $\Phi_e$, требование удовлетворено и действует конечное число раз.

(Б) Каждый цикл работает на конечном числе шагов и в процессе конструкции открывается бесконечно много циклов. Это означает, что для всех $k \notin A$ цикл $k$ достигнет п. (2c) и не достигнет п. (3c), или достигнет п. (4c). Однако п. (4c) может достигнуть только конечное число циклов (пусть $s$ — наименьший шаг такой, что $(\forall x < e)(A_s(x) = A(x))$, тогда все циклы, впервые открытые после шага $s$ никогда не достигнут п. (4c)). Поэтому имеем $C_e =^* \overline{A}$, что по-прежнему будет противоречить тому, что $A$ не вычислимо. Таким образом, этот выход по-прежнему невозможен.

В связи с тем, что каждое требование $\mathscr{P}_i$ будет действовать только конечное число раз, избежим второй сложности: для каждого $x \notin A$ в $W_{g(x)}$ будет перечислено только конечное число элементов из-за действий требований $\mathscr{P}_i$ для $i < x$ и тем самым будет обеспечено $x \in A \Leftrightarrow W_{g(x)} \in B$.

Конструкция. Определим функцию длины $l(e,s) = \max\{n < s \mid (\forall k < n)(k \in A \Leftrightarrow \Phi_e(k) \in B)[s]\}$.

Шаг $s = 0$. Положим $B_0 = B_{1,0} = B_{2,0} = \varnothing$ и $W_{g(x),0} = \varnothing$ для всех $x \in \omega$.

Шаг $s+1$. Для всех $k < s$, если $k \notin A_s \& W_{g(k),s} \subseteq B_s$, полагаем $W_{g(k),s+1} = W_{g(k),s} \cup \{s_k\}$ для некоторых не использовавшихся до этого в конструкции и не принадлежащих $B$ элементов $s_k \neq s_m$ при $k \neq m$.

Полагаем $B_{s+1} = B_s \cup B_{1,s} \cup B_{2,s}$, где

$$B_{1,s} = \Big\{\Phi_{e,s}(k) \mid e < s,\ k < l(e,s),\ k \notin A_s,\ \Phi_{e,s}(k) \in \bigcup_{e<x<s} W_{g(x),s}\Big\},$$

$$B_{2,s} = \{x \mid x \in W_{g(k),s},\ k < s,\ k \in A_s \& W_{g(k),s} \nsubseteq B_s\}.$$

Конец конструкции.

Верификация. Определим $B_1 = \bigcup\limits_{s\in\omega} B_{1,s}$, $B_2 = \bigcup\limits_{s\in\omega} B_{2,s}$, $B = \bigcup\limits_{s\in\omega} B_s$ и $W_{g(x)} = \bigcup\limits_{s\in\omega} W_{g(x),s}$ для всех $x \in \omega$.

**Лемма 3.** *Пусть для всех $n < e$ требование $\mathscr{P}_n$ удовлетворено. Тогда $\mathscr{P}_e$ удовлетворено и найдется такой шаг $s_e$, что $l(e,s) = l(e,s_e)$ для всех $s > s_e$.*

Доказательство. Пусть $s_0$ — шаг такой, после которого ни одно $\mathscr{P}_n, n < e$, больше не действует и $A \upharpoonright e = A_{s_0} \upharpoonright e$. Предположим, что $(\Phi_e(k)\downarrow \& (k \in A \Leftrightarrow \Phi_e(k) \in B))$ для всех $k \in \omega$, и пусть тогда $s_k > s_0$ — наименьшие шаги, на которых $\Phi_{e,s_k}(k)\downarrow$.

Покажем, что для всех $k \in \omega$ выполняется $k \in A \Leftrightarrow \Phi_{e,s_k}(k) \in B_{s_k+1}$, т. е. что $A$ вычислимо; противоречие с условиями теоремы.

Если $\Phi_{e,s_k}(k) \in B_{s_k+1}$, то $k \in A$ согласно предположению.

Если $\Phi_{e,s_k}(k) \notin B_{s_k+1}$, то $\Phi_{e,s_k}(k) \notin \bigcup\limits_{e<x<s_k} W_{g(x),s_k} \Rightarrow \Phi_{e,s_k}(k) \notin \bigcup\limits_{e<x} W_{g(x)}$, так как в $W_{g(x)}$ перечисляются только не использовавшиеся до этого элементы. Значит, $\Phi_{e,s_k}(k) \notin B_1$. Если $\Phi_{e,s_k}(k) \in W_{g(x),s_k}$ для некоторого $x < e$, то отметим, что $x \notin A_{s_k}$ (иначе $\Phi_{e,s_k}(k)$ на шаге $s_k+1$ был бы перечислен в $B_{s_k+1}$). Так как $s_k > s_0$ (а значит, $A \upharpoonright e = A_{s_k} \upharpoonright e$), то $x \notin A$ и, стало быть, $\Phi_{e,s_k}(k) \notin B_2$. Поэтому $\Phi_{e,s_k}(k) \notin B$ и по предположению $k \notin A$.

Таким образом, наше предположение неверно и $\lim\limits_s l(e,s) < \infty$, т. е. найдется такой шаг $s_e$, что $l(e,s) = l(e,s_e)$ для всех $s > s_e$. $\square$

**Лемма 4.** *$A \leq_Q B$ посредством вычислимой функции $g$.*

Доказательство. Покажем, что для всех $x \in \omega$ выполняется $x \in A \Leftrightarrow W_{g(x)} \subseteq B$.

Если $x \in A_s$ для некоторого наименьшего $s$, то по конструкции $W_{g(x)} = W_{g(x),s+1} \subseteq B_{2,s+1} \subseteq B$.

Если $x \notin A$, то пусть $s_x = \max\limits_{e<x}\{s_e\}$, где $s_e, e \in \omega$ — шаги из предыдущей леммы. По конструкции существует такой $y \in W_{g(x),s_x+1} - B_{s_x}$, что $y \neq \Phi_e(k)$, для всех $e < x$, $k < \max\limits_{e<x} l(e,s_x)$, поэтому $y \notin B_1$. В силу того, что $x \notin A$, $y \in W_{g(x)}$ и $W_{g(i)} \cap W_{g(j)} = \varnothing$ для всех $i,j$, имеем $y \notin B_2$, поэтому $y \notin B$ и $W_{g(x)} \nsubseteq B$. $\square$

Эти леммы доказывают теорему. $\square$

Ситуация становится гораздо сложнее, если зафиксировать не нижнее множество из предложения 1, а верхнее. В этом случае ответ на вопрос о различии $Q$-сводимости и $m$-сводимости зависит от свойств верхнего множества. Сначала покажем, что $Q$-сводимость и $m$-сводимость отличаются *под* всеми простыми множествами.

**Теорема 5.** *Пусть $B$ — простое множество. Тогда существует такое в. п. множество $A$, что $A \leq_Q B$, но $A \nleq_m B$. В частности, можно построить такое простое множество $A$, что $A \leq_Q B$, но $A \nleq_m B$.*

Доказательство. Строим множество $A$ по шагам, удовлетворяя те же требования, что и в предложении 1 и теореме 2:

$$\mathscr{R} : A \leq_Q B, \quad \mathscr{P}_e : (\exists x)(\Phi_e(x) \uparrow \vee \neg(x \in A \Leftrightarrow \Phi_e(x) \in B).$$

Для удовлетворения требования $\mathscr{P}_e$ строим такое бесконечное в. п. множество $C_e$, что если $(\forall x)(\Phi_e(x) \downarrow \wedge (x \in A \Leftrightarrow \Phi_e(x) \in B))$, то $C_e \subseteq \omega - B$, а это противоречило бы тому, что $B$ — простое множество. Для этого будем строить такую бесконечную последовательность свидетелей $x_{e,k}$, что или на одном из них будет нарушено условие $(\Phi_e(x_{e,k}) \downarrow \wedge (x_{e,k} \in A \Leftrightarrow \Phi_e(x_{e,k}) \in B))$, или они составят бесконечное в. п. множество $C_e \subseteq \omega - B$.

Для обеспечения условия $A \leq_Q B$ для каждого выбранного свидетеля $x_{e,k}$ кладем в $W_{g(x_{e,k})}$ некий элемент $b_{e,k,0} \notin B$, не участвовавший до этого момента в конструкции. Если впоследствии $b_{e,k,0}$ будет перечислен в $B$, то перечисляем в $W_{g(x_{e,k})}$ новый элемент $b_{e,k,1} \notin B$, не участвовавший в конструкции, и т. д.

Базовый модуль для требования $\mathscr{P}_e$.

(1) Выбираем свидетеля $x_{e,0} \notin A$, кладем в $W_{g(x_{e,0})}$ наименьший элемент $b_{e,0,0} \notin B$.

(2) Ждем, пока $\Phi_e(x_{e,0}) \downarrow= y_0 \notin B$. Если до того, как это произошло, $b_{e,0,n}, n \in \omega$, перечислится в $B$, то перечисляем в $W_{g(x_{e,0})}$ наименьший элемент $b_{e,0,n+1} \notin B$.

(3) Если $\Phi_e(x_{e,0}) \downarrow= y_0 \notin B$, то запрещаем $x_{e,0}$ перечислять в $A$, перечисляем $y_0$ в $C_e$ и выбираем свидетеля $x_{e,1} \notin A$.

(4) Если $y_0$ позднее перечислится в $B$, то прекращаем дальнейшую работу.

(5) Пусть выбраны свидетели $x_{e,0}, x_{e,1}, \dots, x_{e,k-1}$, для каждого из которых нашелся соответствующий $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$, удовлетворяющий условию $\Phi_e(x_{e,i}) \downarrow= y_i \notin B$, $i = 0, \dots, k-1$.

(6) Выбираем свидетеля $x_{e,k} \notin A$, кладем в $W_{g(x_{e,k})}$ наименьший элемент $b_{e,k,0} \notin B$. Аналогично обеспечиваем $W_{g(x_{e,k})} \nsubseteq B$ путем последовательного перечисления в этом множестве элементов $b_{e,k,n} \notin B$, $n \in \omega$.

(7) Ждем, пока $\Phi_e(x_{e,k}) \downarrow= y_k \notin B$. Возможны два варианта.

(7a) Если $y_k \notin \{y_0, \dots, y_{k-1}\}$, то запрещаем $x_{e,k}$ перечислять в $A$, перечисляем $y_k$ в $C_e$ и переходим в п. (5) для выбора нового свидетеля $x_{e,k+1} \notin A$.

(7b) Если $y_k = y_i$ для некоторого $i < k$, то перечисляем $b_{e,k,n}$ и $b_{e,i,m}$ в $C_e$, где $b_{e,k,n}$ и $b_{e,i,m}$ — наибольшие числа, принадлежащие $W_{g(x_{e,k})}$ и $W_{g(x_{e,i})}$ соответственно. Переходим в п. (5) для выбора нового свидетеля $x_{e,k+1} \notin A$.

(8b) Если впоследствии $b_{e,k,n}$ (или $b_{e,i,m}$) перечислится в $B$, то перечисляем $x_{e,k}$ (или соответственно $x_{e,i}$, но только один из них) в $A$ и прекращаем дальнейшую работу.

(9) Если один из $y_i$, $i = 0, \dots, k$, перечислится в $B$, то прекращаем дальнейшую работу.

Модуль имеет следующие выходы.

(А) Для некоторого свидетеля $x_{e,k}$ модуль бесконечно ждет в п. (7) или достигает п. (9). В этом случае или $\Phi_e(x_{e,k})\uparrow$, или $x_k \notin A$ и $\Phi_e(x_{e,k}) \in B$, тем самым $x_{e,k}$ является свидетелем того, что требование $\mathscr{P}_e$ удовлетворено.

(Б) Для некоторого свидетеля $x_{e,k}$ модуль достигнет п. (8b). В этом случае существует такой $x_{e,i}$, что $\Phi_e(x_{e,k}) = \Phi_e(x_{e,i})$, но $A(x_{e,k}) \neq A(x_{e,i})$, так как один из них перечислен в $A$, а второй нет. Поэтому или $x_{e,k}$, или $x_{e,i}$ является свидетелем того, что требование $\mathscr{P}_e$ удовлетворено.

(В) Модуль выбирает бесконечно много свидетелей, для каждого из которых достигает п. (7a) или п. (7b), и ни для одного из них не достигает п. (8b) или п. (9). В этом случае множество $C_e$ бесконечно и $C_e \subseteq \omega - B$, что противоречит условиям теоремы.

Таким образом, выход (В) невозможен, модуль имеет или выход (А), или выход (Б), поэтому он запрещает перечислять в $A$ только конечное число элементов и сам перечисляет в $A$ не более одного элемента.

Используя метод конечного приоритета, описанный выше модуль можно сочетать с любым другим модулем, имеющим только конечные выходы, например, можно построить множество $A$ низким. Однако для целей нашего исследования будет полезно построить множество $A$ простым, поэтому приведем формальную конструкцию такого построения.

Стратегия обеспечения простоты множества $A$ стандартна: для каждого требования $S_e : |W_e| = \infty \Rightarrow A \cap W_e \neq \varnothing$ ждем, пока в $W_e$ перечислится некий $y > 4e$ (для обеспечения бесконечности $\overline{A}$), и перечисляем его в $A$. Небольшая модификация требуется только для обеспечения условия $A \leq_Q B$: будем перечислять $y$ в $A$ на шаге $s$, только если $W_{g(y),s} \subseteq B_s$. Это обеспечивается с помощью следующего наблюдения: если $W_e$ бесконечно, то в $W_e$ будет перечисляться бесконечное количество элементов $y_i > 4e$, $i \in \omega$, на соответствующих шагах $s_i$. Если для каждого из этих элементов в $W_{g(y_i),s_i}$ будут содержаться некие элементы $c_i \notin B_{s_i}$, то аналогично с базовым модулем для требования $\mathscr{P}_e$ строим бесконечное в. п. множество $C = \bigcup\limits_i c_i \subseteq \omega - B$, вынуждая один из этих $c_i$ перечислиться в $B$, после чего перечисляем соответствующий $y_i$ в $A$.

Для обеспечения бесконечности $\overline{A}$ в базовом модуле для требований $\mathscr{P}_e$ будем выбирать свидетелей $x_{e,k} > 4e$.

Конструкция.

Шаг $s = 0$. Положим $A_0 = \varnothing$ и $W_{g(x),0} = M_{x,0} = \varnothing$ для всех $x \in \omega$.

Шаг $s + 1$. Говорим, что требование $\mathscr{S}_e$ *требует внимания*, если оно не *получало внимания* и

$$(\exists z > 4e)(\forall i < e)(z \notin M_{i,s} \& z \in \overline{A}_s \cap W_{e,s} \& W_{g(z),s} \subseteq B).$$

Говорим, что требование $\mathscr{P}_e$ *диагонализировано*, если $(\exists x < s)(\Phi_e(x)\downarrow \& \neg(x \in A_s \Leftrightarrow \Phi_{e,s}(x) \in B_s)$. Говорим, что требование $\mathscr{P}_e$ *требует внимания*, если оно не диагонализировано и выполнено одно из следующих условий:

(i) $\mathscr{P}_e$ не имеет ни одного свидетеля;

(ii) $\mathscr{P}_e$ имеет свидетелей $\{x_{e,1}, x_{e,1}, \dots, x_{e,n}\}$, для каждого из которых имеет место $\Phi_e(x_{e,k})\downarrow = y_{e,k} \notin B_s$.

Находим наименьший $e < s$, для которого $\mathscr{S}_e$ или $\mathscr{P}_e$ требует внимания (если такого $e$ нет, то переходим к следующему шагу). Если $\mathscr{S}_e$ требует внимания, то перечисляем $z$ в $A_{s+1}$ и инициализируем все требования $\mathscr{P}_i$, $i \geq e$. Говорим, что $\mathscr{S}_e$ *получило внимание*.

Если $\mathscr{S}_e$ не требует внимания и $\mathscr{P}_e$ требует внимания, то возможны три варианта. Если $\mathscr{P}_e$ не имеет ни одного свидетеля, то назначаем в качестве свидетеля $x_{e,0}$ для $\mathscr{P}_e$ наименьшее число, не использовавшееся до этого в нашей конструкции. Если существуют два свидетеля $x_{e,i}, x_{e,j} \notin A_s$ для $\mathscr{P}_e$, для которых $\Phi_e(x_{e,i}) = \Phi_e(x_{e,j})$ и $W_{g(x_{e,i})} \subseteq B$, то перечисляем $x_{e,i}$ в $A$. Если таких свидетелей нет, то выбираем нового свидетеля $x_{e,n+1} > 4e$ для $\mathscr{P}_e$, который больше всех чисел, использовавшихся до этого в нашей конструкции. Говорим, что $\mathscr{P}_e$ *получило внимание*. Определяем множество запрещенных элементов $M_{e,s+1} = \{x_{e,k}\}_{1\leq k\leq n}$.

Для всех $k < s$ если $k \notin A_{s+1} \& W_{g(k),s} \subseteq B_s$, то перечисляем в $W_{g(k),s+1}$ наименьшие не использовавшиеся до этого в конструкции элементы $s_k \neq s_m$ при $k \neq m$.

Если для всех $e < s$ требования $\mathscr{S}_e$ *получили внимание* путем перечисления соответствующих $z_e$ в $A$ и для всех $i < s$ требования $\mathscr{P}_i$ *диагонализированы*, то для всех таких $x < \max\limits_{e<s}\{z_e\}$, что $x \notin A_s$, перечисляем в $W_{g(x)}$ некоторый фиксированный $\bar{b} \notin B$ (так как $B$ простое, $B \neq \omega$ и такой $\bar{b}$ существует).

Конец конструкции.

Упорядочим требования $\mathscr{S}_e$ и $\mathscr{P}_e$ в один $\omega$-список $\mathscr{Q}_e$, где $\mathscr{Q}_{2k} = \mathscr{S}_k$ и $\mathscr{Q}_{2k+1} = \mathscr{P}_k$.

**Лемма 6.** *Пусть для всех $i < 2k$ требования $\mathscr{Q}_i$ удовлетворены и действуют только конечное число раз. Тогда требование $\mathscr{Q}_{2k} = \mathscr{S}_k$ удовлетворено и действует только конечное число раз.*

Доказательство. Пусть $s_0$ — шаг, после которого требования $\mathscr{Q}_i$, $i < 2k$, не действуют, и пусть $m = \max\{x \mid (\exists i < k)(x \in M_{i,s_0})\}$. Предположим, что $\mathscr{S}_k$ не удовлетворено, т. е. $|W_k| = \infty \& A \cap W_k = \varnothing$. Определим в. п. множество $C_k = \{y \mid (\exists t > s_0)(\exists x \in W_{k,t})(x > m \& y \in W_{g(x),t} \cap \overline{B}_t)\}$. В силу предположения $|C_k| = \infty$. Пусть $C_k \cap B \neq \varnothing$, т. е. существует $x \in W_k$ такое, что для некоторого $y \in W_{g(x)}$ найдутся два шага $s > t > s_0$ такие, что $y \in C_{k,t} \cap \overline{B}_t$ и $y \in B_s - B_{s-1}$. По конструкции $\mathscr{S}_k$ получит внимание на шаге $s+1$ и $x$ будет перечислен в $A$, тем самым $A \cap W_k \neq \varnothing$, что противоречит предположению. Поэтому $C_k \subseteq \omega - B$, что противоречит условиям теоремы. Тем самым $\mathscr{S}_k$ будет удовлетворено и по конструкции получит внимание не более одного раза. $\square$

**Лемма 7.** *Пусть для всех $i < 2k+1$ требования $\mathscr{Q}_i$ удовлетворены и действуют только конечное число раз. Тогда требование $\mathscr{Q}_{2k+1} = \mathscr{P}_k$ удовлетворено, действует только конечное число раз и множество $M_k$ конечно.*

Доказательство. Пусть $s_0$ — шаг, после которого требования $\mathscr{Q}_i$, $i < 2k+1$, не действуют, и пусть $m = \max\{x \mid (\exists i < k)(x \in M_{i,s_0})\} \cup A_{s_0}$. Предположим, что требование $\mathscr{P}_k$ не удовлетворено, т. е. $(\forall x)(\Phi_k(x)\downarrow \& (x \in A \Leftrightarrow \Phi_k(x) \in B))$. Определим бесконечное в. п. множество $C_k = C_{1,k} \cup C_{2,k}$, где

$$C_{1,k} = \{y \mid (\exists t > s_0)(\exists x > m)(x \notin A_t \& y = \Phi_k(x) \notin B_t)\},$$

$$C_{2,k} = \{y \mid (\exists t > s_0)(\exists x_1, x_2 > m)(x_1, x_2 \notin A_t \& \Phi_k(x_1) = \Phi_k(x_2) \notin B_t) \\ \& y \in W_{g(x_1),t} \cap \overline{B_t}\}.$$

Предположим, что $C_k \cap B \neq \varnothing$, т. е. существует $y \in C_k \cap B$. Если $y \in C_{1,k}$, то найдутся два шага $s > t > s_0$ такие, что $y = \Phi_{k,t}(x)$ для некоторого $x > m$,

$x \notin A_t$, и $y \in B_s - B_{s-1}$. По конструкции $x \in M_{k,t}$, и так как $t > s_0$, то $x \notin A$; противоречие с предположением, что требование $\mathscr{P}_k$ не удовлетворено.

Если $y \in C_{2,k}$, то найдутся два шага $s > t > s_0$ такие, что для некоторых $x_1, x_2 > m$, $x_1 \notin A_t$, $x_2 \notin A_t$, выполняется $\Phi_{k,t}(x_1) = \Phi_{k,t}(x_2)$, $y \in W_{g(x_1),t} \cap \overline{B_t}$ и $y \in B_s - B_{s-1}$. По конструкции $\mathscr{P}_k$ получит внимание на шаге $s+1$, $x_1$ будет перечислен в $A_{s+1}$ и $x_2 \in M_{k,s+1}$. Таким образом, $A(x_1) \neq A(x_2)$, но $B(\Phi_k(x_1)) = B(\Phi_k(x_2))$, противоречие с предположением, что требование $\mathscr{P}_k$ не удовлетворено.

Поэтому $C_k \cap B = \varnothing$, т. е. бесконечное в. п. множество $C_k$ содержится в $\omega - B$; противоречие с условиями теоремы.

Тем самым $\mathscr{P}_k$ будет удовлетворено, т. е. $(\exists x)(\Phi_e(x) \uparrow \vee \neg(x \in A \Leftrightarrow \Phi_e(x) \in B)$. Таким образом, $\mathscr{P}_k$ будет диагонализировано на каком-то шаге $s$, перестанет требовать внимания после этого шага и $M_k = M_{k,s}$. $\square$

**Лемма 8.** *Множество $A$ простое.*

Доказательство. (1) $\overline{A}$ бесконечно. Заметим, что $A$ содержит не более $2e$ элементов из $\{0, 1, 2, \dots, 4e\}$ для любого $e$, а именно по одному свидетелю от требований $\mathscr{P}_0$, $\mathscr{P}_1, \dots$, $\mathscr{P}_{e-1}$ и $\mathscr{S}_0$, $\mathscr{S}_1, \dots$, $\mathscr{S}_{e-1}$. Таким образом, $|\overline{A} \restriction (4e+1)| > 2e$, поэтому $\overline{A}$ бесконечно.

(2) По лемме 1 для всех $e \in \omega$ требования $\mathscr{S}_e$ удовлетворены. $\square$

**Лемма 9.** *$A \leq_Q B$ посредством вычислимой функции $g$.*

Доказательство. По конструкции $x \in A_{s+1} - A_s$, только если $W_{g(x),s} \subseteq B$, тем самым $x \in A \Rightarrow W_{g(x)} \subseteq B$. Если $x \notin A$, то пусть в силу предыдущих лемм шаг $s$ такой, что все $\mathscr{S}_e, e < x$ получили внимание и все $\mathscr{P}_i$, $i < x$, диагонализированы на этом шаге. По конструкции $\bar{b} \in W_{g(x),s}$, поэтому $W_{g(x)} \nsubseteq B$. $\square$

Эти леммы завершают доказательство теоремы. $\square$

Теорема 5 имеет ряд интересных следствий, касающихся одного из основных вопросов в теории вычислимости о структуре степеней более сильной сводимости внутри степени более слабой сводимости.

Пусть $r_1$ и $r_2$ — алгоритмические сводимости такие, что для всех множеств $A$ и $B$ выполняется $A \leq_{r_1} B \Rightarrow A \leq_{r_2} B$. Тогда каждая $r_2$-степень состоит из некоторой совокупности $r_1$-степеней. Существует ли такая $r_2$-степень, которая состоит только из одной $r_1$-степени? Существует ли такая $r_2$-степень, которая состоит ровно из двух или трех $r_1$-степеней или из бесконечного количества степеней? Верны ли эти утверждения, если мы рассматриваем не все множества, а ограничиваемся только вычислимо перечислимыми?

Теорема 5 отвечает на некоторые из этих вопросов.

**Следствие 10.** *В $Q$-степени любого простого множества существует бесконечное число в. п. $m$-степеней.*

Доказательство. Пусть $B$ — простое множество и $A$ — множество, построенное в теореме 5. Так как $A \leq_Q B$, то $A \oplus B \equiv_Q B$. При этом $A \oplus B \nleq_m B$ (иначе $A \leq_m B$). Таким образом, в $Q$-степени множества $B$ существуют две несравнимые в. п. $m$-степени.

Множество $A \oplus B$ является простым множеством, поскольку $A$ и $B$ простые. Согласно теореме 5 для $A \oplus B$ существует такое множество $C$, что $C \leq_Q A \oplus B$, но $C \nleq_m A \oplus B$. Поэтому аналогично имеем $(A \oplus B) \oplus C \equiv_Q A \oplus B \equiv_Q B$ и

$(A \oplus B) \oplus C \not\leq_m A \oplus B$, а также $(A \oplus B) \oplus C \not\leq_m B$. Таким образом, в $Q$-степени множества $B$ существуют три в. п. несравнимые $m$-степени.

Продолжая эту процедуру далее, можно построить в $Q$-степени множества $B$ бесконечное число в. п. множеств, каждое из которых лежит в отдельной $m$-степени. $\square$

Еще одним следствием теоремы 5 является то, что в любой в. п. $T$-степени содержится бесконечное число в. п. $m$-степеней (этот результат не был ранее нигде прямо сформулирован и доказан, хотя известны гораздо более сильные результаты, например, что в любой в. п. $T$-степени содержится бесконечное число в. п. $tt$-степеней, см. [2]).

**Следствие 11.** *В $T$-степени любого не вычислимого в. п. множества содержится бесконечное число в. п. $m$-степеней.*

Доказательство следует из того, что на в. п. множествах $Q$-сводимость влечет $T$-сводимость и что в любой в. п. не вычислимой $T$-степени существует простое множество (а именно, так называемое *дефицитное множество*, см. [2]). $\square$

В случае $Q$-сводимости дело обстоит гораздо сложнее. Как показал Омандзе (см. [15]), в отличие от $T$-степеней не в каждой $Q$-степени есть простое множество. Поэтому доказанная теорема не дает нам оснований полагать, что в каждой не вычислимой в. п. $Q$-степени существует бесконечное количество в. п. $m$-степеней.

Если бы нам удалось усилить теорему, убрав из ее условий требование простоты множества $B$, то был бы получен отрицательный ответ на вопрос о существовании в. п. $Q$-степени, состоящей из одной в. п. $m$-степени. Однако следующая теорема показывает, что этого сделать нельзя. Ее доказательство оказывается гораздо сложнее, чем доказательство предыдущих теорем, в частности, требует использования метода бесконечного приоритета.

### 3. $Q$-степень, имеющая $m$-вершину

В разд. 2 показано, что $Q$-сводимость и $m$-сводимость различаются *над* всеми в. п. множествами и *под* простыми множествами. Напрашивается вопрос, существует ли такое в. п. множество, *под* которым эти сводимости не отличимы друг от друга? Существуют тривиальные примеры таких множеств. Если множество вычислимо и какое-то множество $Q$-сводится к нему, то оно само вычислимо и поэтому $m$-сводится к нему. Если же множество $m$-полно, то все в. п. множества $m$-сводятся к нему. Поэтому более точно было бы сформулировать вопрос следующим образом: существует ли такое в. п. не вычислимое, не $m$-полное множество, что любое в. п. множество, которое $Q$-сводится к нему, одновременно и $m$-сводится к нему?

Следующая теорема дает положительный ответ на этот вопрос, что, в терминах работы [23], означает существование нетривиальной $Q$-степени, имеющей $m$-вершину.

**Теорема 12.** *Существует такое в. п. не вычислимое, не $m$-полное множество $B$, что $(A \leq_Q B \Rightarrow A \leq_m B)$ для любого в. п. $A$.*

Доказательство. Строим множество $B$ по шагам, удовлетворяя для каждого $e \in \omega$ следующие требования, где $K$ — креативное множество:

$\mathscr{P}_e : \overline{B} \neq W_e$;

$\mathscr{N}_e : K \not\leq_m B$ посредством $\Phi_e$;

$\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle} : (W_i \leq_Q B$ посредством $\Phi_j) \Rightarrow W_i \leq_m B$.

Стратегии для удовлетворения $\mathscr{P}_e$ и $\mathscr{N}_e$ стандартны. Для удовлетворения $\mathscr{P}_e$ выбираем свидетеля $x$ и ждем, пока $x$ перечислится в $W_e$. Если этого никогда не произойдет, то $x \in \overline{B} \cap \overline{W_e}$, и требование удовлетворено. Если $x$ перечислится в $W_e$, то перечисляем $x$ в $A$, удовлетворяя таким образом $\mathscr{P}_e$.

Для удовлетворения $\mathscr{N}_e$ используем $\omega$-последовательность циклов $\{0, 1, \dots\}$ с целью построить в. п. множество $C_e = \overline{K}$, что противоречило бы тому, что $K$ — креативное множество. На каждом цикле $x$ ждем, пока или $x$ перечислится в $K$, или функция $\Phi_e$ определится на элементе $x$, причем $\Phi_e(x) \downarrow= y \notin B$. Если ни то, ни другое не произойдет, то $x$ будет тем элементом, на котором $\Phi_e$ не будет сводить $K$ к $B$. Если $x$ перечислится в $K$, то открываем следующий цикл. Если $\Phi_e(x) \downarrow= y \notin B$, то запрещаем $y$ перечислять в $B$, перечисляем $x$ в $C_e$ и открываем следующий цикл. Так как $C_e$ не может совпасть с $\overline{K}$, рано или поздно какой-то $x$ перечислится в $K$ после того, как положим его в $C_e$. Тогда наш запрет будет гарантировать, что $x \in K$, но $\Phi_e(x) \notin B$, и $\mathscr{N}_e$ будет тем самым удовлетворено.

Для удовлетворения $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ строим такую вычислимую сводящую функцию $f_{\langle i,j\rangle}$, чтобы добиться выполнения следующего условия:

$$\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle} : (\exists x)(\Phi_j(x)\uparrow \vee \neg(x \in W_i \Leftrightarrow W_{\Phi_j(x)} \subseteq B)) \\ \vee (\forall x)(x \in W_i \Leftrightarrow f_{\langle i,j\rangle}(x) \in B).$$

Для построения такой функции возможны два варианта базового модуля, каждый из которых приводит к удовлетворению $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$, если рассматривать его в отдельности от стратегий требований $\mathscr{P}_e$ и $\mathscr{N}_e$.

Первый вариант базового модуля для требования $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$. Используем $\omega$-последовательность циклов $\{0, 1, \dots\}$, где каждый цикл действует следующим образом.

(1) Ждем пока или $k$ перечислится в $W_i$, или $\Phi_j(x)\downarrow$ и появится $y \in W_{\Phi_j(x)} \cap \overline{B}$.

(2a) Если $k$ перечислится в $W_i$, то определяем $f_{\langle i,j\rangle}(k) = b_0$ для некоторого фиксированного $b_0 \in B$ и открываем цикл $k+1$.

(2b) Если появится $y \in W_{\Phi_j(x)} \cap \overline{B}$, то определяем $f_{\langle i,j\rangle}(k) = y$, запрещаем $y$ перечисляться в $B$ и открываем цикл $k+1$.

(3b) Если впоследствии $k$ перечислится в $W_i$, то закрываем все циклы.

Модуль имеет следующие возможные выходы.

(A) Некоторый цикл $k$ бесконечно ждет в п. (1) или достигает п. (3b). В этом случае или $\Phi_j(x)\uparrow$, или $k \notin W_i \& W_{\Phi_j(x)} \subseteq B$, или $k \in W_i \& W_{\Phi_j(x)} \not\subseteq B$. Цикл $k$ является свидетелем того, что $W_i \not\leq_Q B$ посредством $\Phi_j$, требование удовлетворено.

(Б) Каждый цикл работает конечное число шагов, и в процессе конструкции открывается бесконечно много циклов. В этом случае $W_i \leq_m B$ посредством $f_{\langle i,j\rangle}$, требование удовлетворено.

Второй вариант базового модуля для требования $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$. Используем $\omega$-последовательность циклов $\{0, 1, \dots\}$, где каждый цикл действует следующим образом:

(1) Ждем пока $k$ перечислится в $W_i$ или $\Phi_j(x)\downarrow$ и появится $y \in W_{\Phi_j(x)} \cap \overline{B}$.

(2a) Если $k$ перечислится в $W_i$, то определяем $f_{\langle i,j\rangle}(k) = b_0$ для некоторого фиксированного $b_0 \in B$ и открываем цикл $k+1$.

(2b) Если появится $y \in W_{\Phi_j(x)} \cap \overline{B}$, то определяем $f_{\langle i,j\rangle}(k) = z_k^{\langle i,j\rangle}$ для некоторого не использовавшегося до этого $z_k^{\langle i,j\rangle} \notin B$ (используем $z_k^{\langle i,j\rangle}$ как замену для $y$) и открываем цикл $k+1$.

(3b) Если впоследствии $k$ перечислится в $W_i$, то перечисляем $z_k^{\langle i,j\rangle}$ в $B$ и открываем цикл $k+1$.

Модуль имеет следующие возможные выходы.

(А) Некоторый цикл $k$ бесконечно ждет в п. (1). В этом случае или $\Phi_j(x)\uparrow$, или $k \notin W_i \& W_{\Phi_j(x)} \subseteq B$. Цикл $k$ является свидетелем того, что $W_i \not\leq_Q B$ посредством $\Phi_j$, требование удовлетворено.

(Б) Каждый цикл работает конечное число шагов, и в процессе конструкции открывается бесконечно много циклов. В этом случае $W_i \leq_m B$ посредством $f_{\langle i,j\rangle}$, требование удовлетворено.

К сожалению, в случае выбора первого варианта базового модуля для требования $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ при выходе (Б) модуль может запрещать перечислять в $B$ бесконечно много элементов, создавая бесконечные нарушения для требований $\mathscr{P}_e$ с более низким приоритетом, а в случае второго варианта базового модуля для требования $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ при выходе (Б) модуль может перечислять бесконечно много элементов в $B$, создавая бесконечные нарушения для требований $\mathscr{N}_e$ с более низким приоритетом.

Для преодоления этой трудности будем комбинировать оба варианта базового модуля для $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ и учитывать стратегии удовлетворения требований $\mathscr{P}_e$ и $\mathscr{N}_e$ с более низким приоритетом.

Базовый модуль для требования $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$, учитывающий требования с более низкими приоритетом. Используем $\omega$-последовательность циклов $\{0,1,\dots\}$, где каждый цикл действует следующим образом.

(1) Ждем пока $k$ перечислится в $W_i$ или $\Phi_j(k)\downarrow$ и появится $y \in W_{\Phi_j(k)} \cap \overline{B}$.

(2a) Если $k$ перечислится в $W_i$, то определяем $f_{\langle i,j\rangle}(k) = b_0$ для некоторого фиксированного $b_0 \in B$ и открываем цикл $k+1$.

(2b) Если появится $y \in W_{\Phi_j(k)} \cap \overline{B}$, который не совпадает ни с одним из свидетелей требований $\mathscr{P}_e$, то определяем $f_{\langle i,j\rangle}(k) = y$, запрещаем $y$ перечисляться в $B$ и открываем цикл $k+1$.

(3b) Если впоследствии $k$ перечислится в $W_i$, то закрываем все циклы.

(2c) Если появившийся $y \in W_{\Phi_j(k)} \cap \overline{B}$ и $y$ уже был выбран в качестве свидетеля для какого-то из требований $\mathscr{P}_e$, $e > \langle i,j\rangle$, то определяем $f_{\langle i,j\rangle}(k) = z_k^{\langle i,j\rangle}$ для какого-то не использовавшегося до этого $z_k^{\langle i,j\rangle} \notin B$ и открываем цикл $k+1$.

(3c) Если впоследствии $z_k^{\langle i,j\rangle}$ оказывается запрещенным стратегией требования $\mathscr{N}_{e'}$, то возможны два варианта:

(3c1) если $e' < e$, то запрещаем $y$ перечисляться в $B$ и инициализируем требование $\mathscr{P}_e$;

(3c2) если $e' > e$ и впоследствии $y$ перечислится в $B$ и $k$ перечислится в $W_i$, то перечисляем $z_k^{\langle i,j\rangle}$ в $B$, инициализируем требование $\mathscr{N}_{e'}$ и открываем цикл $k+1$.

(4c1) Если впоследствии $k$ перечислится в $W_i$, то закрываем все циклы.

Модуль имеет следующие возможные выходы.

(А) Некоторый цикл $k$ бесконечно ждет в п. (1) или достигает п. (3b), или достигает п. (4c1). В этом случае или $\Phi_j(x)\uparrow$, или $k \notin W_i \& W_{\Phi_j(x)} \subseteq B$, или $k \in$

$W_i \& W_{\Phi_j(x)} \not\subseteq B$. Цикл $k$ является свидетелем того, что $W_i \not\leq_Q B$ посредством $\Phi_j$, требование удовлетворено и действует только на конечном числе шагов.

(Б) Каждый цикл работает конечное число шагов, и в процессе конструкции открывается бесконечно много циклов. В этом случае $W_i \leq_m B$ посредством $f_{\langle i,j\rangle}$, требование удовлетворено. При этом требования $\mathscr{P}_e$ (или соответственно $\mathscr{N}_e$), $e > \langle i,j\rangle$, инициализируются только конечное число раз, а именно из-за действий требований $\mathscr{N}_{e'}$, $\langle i,j\rangle < e' < e$ (или соответственно из-за действий $\mathscr{P}_{e'}$, $\langle i,j\rangle < e' < e$). Так как требования $\mathscr{P}_e$ и $\mathscr{N}_{e'}$ действуют только конечное число раз, каждое требование, лежащее под $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$, дождется, что через конечное число шагов стратегия для $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ будет действовать, чтобы удовлетворить именно его.

Однако и при таком модифицированном модуле остаются еще две трудности. Первая трудность заключается в том, что может произойти следующая ситуация: на некотором шаге $s_0$ какой-то $y$ был выбран свидетелем для требования $\mathscr{P}_e$, затем на шаге $s_1 > s_0$ этот $y$ перечислится в $W_{\Phi_j(k)} \cap \overline{B}$ для какого-то цикла $k$ требования $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}, \langle i,j\rangle < e$, после чего базовый модуль для $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ определит $f_{\langle i,j\rangle}(k) = z_k^{\langle i,j\rangle}$ для некоторого $z_k^{\langle i,j\rangle}$. После этого на шаге $s_2 > s_1$ требование $\mathscr{P}_e$ перечислит $y$ в $B$. Затем на шаге $s_3 > s_2$ стратегия для требования $\mathscr{N}_{e'}, \langle i,j\rangle < e' < e$, запретит перечислять $z_k^{\langle i,j\rangle}$ в $B$, а после этого на шаге $s_4 > s_3$ $k$ перечислится в $W_i$. Так как $y$ уже был перечислен в $B$ (и тем самым $W_{\Phi_j(k)} \subseteq B$), будем вынуждены перечислить $f_{\langle i,j\rangle}(k) = z_k^{\langle i,j\rangle}$ в $B$, чтобы обеспечить условие $k \in W_i \Leftrightarrow f_{\langle i,j\rangle}(k) \in B$, тем самым нарушая требование $\mathscr{N}_{e'}$ из-за действий $\mathscr{P}_e$ при $e > e'$, что может приводить к бесконечным нарушениям требования $\mathscr{N}_{\langle i,j\rangle}$.

Именно для решения этой трудности необходимо прибегнуть к методу бесконечного приоритета. На приоритетном дереве требование $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ будет иметь два выхода: левый (бесконечный), соответствующий ситуации, когда $W_i$ $Q$-сводится к $B$ посредством $\Phi_j$, и правый (конечный), соответствующий ситуации, когда $W_i$ не $Q$-сводится к $B$ посредством $\Phi_j$. Если истинным является правый выход, то требование $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ действует только конечное число раз и конечное число раз нарушает требования с более низким приоритетом. Если истинным будет являться левый выход, то будем попадать на этот выход только на тех шагах, на которых $(\forall x)(x \in W_i \Leftrightarrow W_{\Phi_j(x)} \subseteq B)[s]$, и тем самым описанная выше ситуация не возникнет, а именно между шагами $s_2$ и $s_3$ в $W_{\Phi_j(k)} \cap \overline{B}$ будет перечислен какой-то новый $y'$, который будет запрещен требованием $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ в соответствии с п. (3с1), как только $\mathscr{N}_{e'}$, $\langle i,j\rangle < e' < e$, запретит перечислять $z_k^{\langle i,j\rangle}$ в $B$.

Еще одной трудностью является то, что теперь базовые модули для требований $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ могут конфликтовать друг с другом. В частности, может оказаться так, что в базовом модуле требования $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ на цикле $k$ на шаге (2) $y$ может совпасть с $z_{k'}^{\langle i',j'\rangle}$ для некоторого цикла $k'$ некоторого требования $\mathscr{R}_{\langle i',j'\rangle}$ (в том числе при $i = i'$, $j = j'$). Это означает, что требование $\mathscr{R}_{\langle i',j'\rangle}$ на цикле $k'$ достигло шага (2с), т. е. нашелся некий $y \in W_{\Phi_{j'}(i)} \cap \overline{B}$, выбранный в качестве свидетеля для требования $\mathscr{P}_e$ (или в качестве $z_{k''}^{\langle i'',j''\rangle}$ для требования $\mathscr{R}_{\langle i'',j''\rangle}$ и т. д., но эта цепочка рано или поздно закончится некоторым свидетелем $y$ требования $\mathscr{P}_e$). В этом случае для удовлетворения $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ определяем $f_{\langle i,j\rangle}(k) = z_k^{\langle i,j\rangle}$ и запрещаем перечислять этот $y$ в $B$, дальше действуя, как описано в модуле.

Приоритетное дерево. Используем бесконечное дерево $\mathscr{T} = 2^{<\omega}$ со стандартным лексикографическим упорядочением $0 <_L 1$.

Упорядочим требования $\mathscr{P}_e$, $\mathscr{N}_e$ и $\mathscr{R}_e$ в единый список $\mathscr{S}_i$ такой, что $\mathscr{S}_i = \mathscr{R}_e$ при $i = 3e$, $\mathscr{S}_i = \mathscr{P}_e$ при $i = 3e+1$, $\mathscr{S}_i = \mathscr{N}_e$ при $i = 3e+2$. Для каждой вершины $\sigma \in \mathscr{T}$ длины $n$ назначаем требование $\mathscr{S}_n$.

Определения. Определим функции длины для требований $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ и $\mathscr{N}_e$:

$$l^R(\langle i,j\rangle, s) = \max\{n \mid (\forall x < n)(x \in W_i \Leftrightarrow W_{\Phi_j(k)} \subseteq B)[s]\},$$

$$l^N(e,s) = \max\{n \mid (\forall x < n)(x \in K \Leftrightarrow \Phi_e(x) \in \ B[s])\}.$$

Называем $z$ *заменой* для $x$ на шаге $s$, если для некоторого $n > 0$ существуют индексы $i_1, \dots, i_n$ и элементы $z_0, \dots, z_n$, $y_0, \dots, y_n$, удовлетворяющие следующим условиям: 1) $z_k = f_{i_k}(y_k)[s]$ для всех $k = \overline{1,n}$; 2) $z_k \in W_{\Phi_{i_{k+1}}(y_{k+1})} \cap \overline{B}[s]$ для всех $k = \overline{0, n-1}$; 3) $z_0 = x$ является свидетелем для некоторого $\mathscr{P}_\sigma$ на шаге $s$ и $z_n = z$.

Введем индукцией по $|\tau|$ определения $\tau$-шага, $m^R(\tau,s)$ и $m^N(\tau,s)$.

(i) Каждый шаг является $\lambda$-шагом (где $\lambda$ — пустая строка).

(ii) Пусть $s$ является $\tau$-шагом и $|\tau| = 3e$. Определим $m^R(\tau,s) = \max\{l^R(e,t) \mid t < s$ является $\tau$-шагом$\}$. Если $l^R(e,s) > m^R(\tau,s)$, то называем $s$ $\tau\hat{}0$-*шагом*, в ином случае — $\tau\hat{}1$-*шагом.*

(iii) Пусть $s$ является $\tau$-шагом и $|\tau| = 3e+1$. Определим $m^N(\tau,s) = max\{l^N R(e,t)| \ t < s$ является $\tau$-шагом$\}$. Тогда если $l^N(e,s) > m^N(\tau,s)$, то называем $s$ $\tau\hat{}0$-*шагом*, в ином случае — $\tau\hat{}1$-*шагом.*

(iv) Пусть $s$ является $\tau$-шагом и $|\tau| = 3e+2$. Тогда если $W_{e,s} \cap B_s \neq \varnothing$, то называем $s$ $\tau\hat{}0$-*шагом*, в ином случае — $\tau\hat{}1$-шагом.

Обозначим через $TP_s$ такую уникальную вершину $\tau$ длины $s$, что $s$ является $\tau$-шагом.

Говорим, что требование $\mathscr{P}_\tau$ *требует внимания* на $\tau$-шаге $s > |\tau| = 3e+1$, если $W_{e,s} \cap B_s = \varnothing$ и либо $\mathscr{P}_\tau$ не имеет свидетеля на шаге $s$, либо $\mathscr{P}_\tau$ имеет свидетеля $x \in W_{e,s}$.

Говорим, что требование $\mathscr{N}_\tau$ *требует внимания* на $\tau$-шаге $s > |\tau| = 3e+2$, если $l^N(e,s) > m^N(\tau,s)$.

Конструкция.

Шаг $s = 0$. Полагаем $B_0 = \varnothing$ и для всех $\tau$ и $k$ полагаем сводящие функции $f^k_\tau$ для $\mathscr{R}_\tau$ неопределенными для всех $x$: $f^k_{\tau,0}(x)\uparrow$.

Шаг $s > 0$.

1. Вычисляем $TP_s$. Инициализируем все стратегии, прикрепленные к вершинам справа от $TP_s$: у стратегий $\mathscr{P}_\tau$ отменяем выбранных свидетелей, у стратегий $\mathscr{R}_\tau$ — сводящую функцию $f^k_\tau$.

2. Находим наименьшую $\tau \prec TP_s$ такую, что $\mathscr{S}_\tau$ требует внимания.

Если $|\tau| = 3e+1$ для некоторого $e$ и $\mathscr{P}_\tau$ не имеет свидетеля на шаге $s$, то назначаем нового свидетеля для $\mathscr{P}_\tau$, в ином случае перечисляем свидетеля $\mathscr{P}_\tau$ в $B$. Говорим, что $\mathscr{P}_\tau$ *получает внимание*, и инициализируем все стратегии, назначенные вершинам, продолжающим $\tau$.

Если $|\tau| = 3e+2$ для некоторого $e$, то инициализируем все стратегии, назначенные вершинам, продолжающим $\tau$, и говорим, что $\mathscr{N}_\tau$ *получает внимание.*

В обоих случаях для всех $\sigma \prec \tau$ (или для всех $\sigma \prec TP_s$, если ни одна из стратегий не требует внимания) при $|\sigma| = 3\langle i,j\rangle$ для каких-либо $i,j$ если $s$ является $\sigma\hat{}0$-шагом, определяем сводящую функцию для $\mathscr{R}_\sigma$. Если сводящая функция $f^k_\sigma$, определенная на последнем $\sigma$-шаге $t < s$, была отменена на некотором шаге $u$, $t < u < s$, то строим новую сводящую функцию $f^{k+1}_\sigma$, полагая далее $m = k + 1$. Если она не была отменена, то полагаем далее $m = k$. Для всех $x < l^R(\langle i, j\rangle, s)$ таких, что $f^m_{\sigma,s-1}(x)\uparrow$, определяем $f^m_{\sigma,s}(x)$. Если $x \in W_{i,s}$, то полагаем $f^m_{\sigma,s}(x) = b_0$ для некоторого фиксированного $b_0 \in B$. Если $x \notin W_{i,s}$ и существует $y_x \in W_{\Phi_j(x)} \cap \overline{B}$, не использующийся ни одной из стратегий для требований $\mathscr{P}_e$ и $\mathscr{R}_e$ для всех $e \in \omega$, то определяем $f^m_{\sigma,s}(x) = y_x$. Если $x \notin W_{i,s}$ и существует $y_x \in W_{\Phi_j(x)} \cap \overline{B}$, являющийся для некоторого $\sigma'$ свидетелем для $\mathscr{P}_{\sigma'}$ или заменой для $\mathscr{R}_{\sigma'}$, то полагаем $f^m_{\sigma,s}(x) = z_x$ для некоторого не использовавшегося элемента $z_x$. Для всех $x < l^R(\langle i, j\rangle, s)$ если $x \in W_{i,s}$, то перечисляем $f^m_{\sigma,s}(x)$ в $B$.

Отметим, что конструкция обеспечивает следующее: если $z$ является заменой для $x$, то $z$ будет перечислен в $B$ только после того, как $x$ будет перечислен в $B$.

Конец конструкции.

Верификация. Определим истинный путь $TP$ как самый левый путь, лежащий на $\mathscr{T}$ и посещаемый на бесконечном количестве шагов. Другими словами, пусть $TP$ будет уникальным путем, лежащим на $\mathscr{T}$, таким, что

$$\sigma \prec TP \Leftrightarrow \exists^\infty s(\sigma \prec TP_s) \& \exists^{<\infty} s(TP_s <_{lex} \sigma).$$

**Лемма 13.** *Для всех $e \in \omega$ требования $\mathscr{P}_e$ удовлетворены стратегией $\mathscr{P}_\tau$ при $\tau = TP \upharpoonright 3e + 1$.*

Доказательство. Полагаем по индукции, что для всех $\sigma \prec \tau$ все стратегии для требований $\mathscr{R}_\sigma$ при $\sigma\hat{\ }1 \prec TP \upharpoonright 3e+1$ и для $\mathscr{P}_\sigma$ и $\mathscr{N}_\sigma$ действуют только конечное число раз. Пусть $s$ — наименьший шаг такой, что для всех $t > s$ эти стратегии не действуют на шаге $t$ и $TP_t$ не находится слева от $\tau$.

Так как $s$ выбран как наименьший шаг, удовлетворяющий этим условиям, стратегия для $\mathscr{P}_\tau$ инициализирована на шаге $s$. Поэтому на следующем $\tau$-шаге $t > s$, на котором $\mathscr{P}_\tau$ получит внимание, для $\mathscr{P}_\tau$ будет назначен свидетель $x$. Поскольку стратегия $\mathscr{P}_\tau$ не может быть инициализирована после шага $t$, этот свидетель не будет отменен. Если $x$ будет перечислен в $W_e$ на шаге $u > t$, то на первом шаге $v > u$, на котором $\mathscr{P}_\tau$ получит внимание, он будет перечислен в $B$. Если $x \notin W_e$, то стратегия для $\mathscr{P}_\tau$ не перечислит $x$ в $B$. Так как стратегии для требований $\mathscr{P}_e$ выбирают свидетелей, а стратегии для требований $\mathscr{R}_e$ выбирают замены только среди не использовавшихся до этого чисел, то $x$ не может быть перечислен в $B$ из-за действий стратегий для других требований. Поэтому $x$ будет свидетелем того, что $\overline{B} \neq W_e$, тем самым требование $\mathscr{P}_e$ будет удовлетворено стратегией $\mathscr{P}_\tau$, которая будет действовать не более двух раз, что позволяет нам продолжать индукционное предположение. $\square$

**Лемма 14.** *Для всех $e \in \omega$ требования $\mathscr{N}_e$ удовлетворены стратегией $\mathscr{N}_\tau$ при $\tau = TP \upharpoonright 3e + 2$.*

Доказательство. Полагаем по индукции, что для всех $\sigma \prec \tau$ все стратегии для требований $\mathscr{R}_\sigma$ при $\sigma\hat{\ }1 \prec TP \upharpoonright 3e+1$ и для $\mathscr{P}_\sigma$ и $\mathscr{N}_\sigma$ действуют только конечное число раз. Пусть $s$ — наименьший шаг такой, что для всех $t > s$ эти стратегии не действуют на шаге $t$ и $TP_t$ не находится слева от $\tau$.

Предположим, что $\mathscr{N}_e$ не удовлетворено, т. е. $x \in K \Leftrightarrow \Phi_e(x) \in B$. Покажем, что тогда $K$ вычислимо. Для всех $x > s$ пусть $t > s$ — наименьший шаг, на котором $\mathscr{N}_\tau$ получает внимание, и либо $x \in K_t$, либо $\Phi_{e,t}\downarrow= y \notin B$.

На этом шаге будут инициализированы все стратегии, назначенные вершинам, продолжающим $\tau$ или лежащим правее $\tau$, поэтому на шагах $u > t$ эти стратегии не перечислят $y$ в $B$. В силу выбора $s$ стратегии для $\mathscr{P}_\sigma$, $\sigma \prec \tau$, также не перечислят $y$ в $B$. Если $y$ является заменой для некоторого $z \notin B$ на шаге $t$, то в силу выбора $s$ стратегии $\mathscr{R}_\sigma$ и $\mathscr{R}_\sigma$ при $\sigma \prec \tau$ на шагах $u > t$ не перечислят $z$ в $B$, все другие стратегии будут инициализированы на шаге $t$, поэтому также не перечислят $z$ в $B$ на шагах $u > t$. Как отмечалось выше, $y$ не будет перечислен в $B$, так как $z$ никогда не будет перечислен в $B$.

Таким образом, $x \in K \Leftrightarrow x \in K_t$, что противоречит тому, что $K$ — креативное множество. Итак, $\mathscr{N}_e$ удовлетворено стратегией $\mathscr{N}_\tau$, т. е. существует такой $y$, что $\Phi_e(y) \uparrow$ или $y \in K \& \Phi_e(y) \notin B$, или $y \notin K \& \Phi_e(y) \in B$. Поэтому $\mathscr{N}_\tau$ не будет действовать после шага $t$, на котором $y \in K_t$ или $\Phi_{e,t}(y) \downarrow \in B_t$. $\square$

**Лемма 15.** *Для всех $e \in \omega$ требования $\mathscr{R}_e$ удовлетворены стратегией $\mathscr{R}_\tau$ при $\tau = TP \upharpoonright 3e$.*

Доказательство. Полагаем по индукции, что для всех $\sigma \prec \tau$ все стратегии для требований $\mathscr{R}_\sigma$ при $\sigma\hat{\ }1 \prec TP \upharpoonright 3e+1$ и для $\mathscr{P}_\sigma$ и $\mathscr{N}_\sigma$ действуют только конечное число раз. Пусть $s$ — наименьший шаг такой, что для всех $t > s$ эти стратегии не действуют на шаге $t$ и $TP_t$ не находится слева от $\tau$.

Если $\tau\hat{\ }1 \prec TP$, то существует только конечное число шагов, на которых $l^R(e,s) > m^R(e,s)$, следовательно, требование $\mathscr{R}_e$ удовлетворено. Поэтому рассмотрим случай, когда $\tau\hat{\ }0 \prec TP$. Покажем, что в этом случае $W_e \leq_m B$.

Так как $s$ выбран как наименьший шаг, удовлетворяющий описанным выше условиям, на этом шаге была отменена функция $f^k_\tau$ для некоторого $k$. Покажем, что $x \in W_e \Leftrightarrow f^{k+1}_\tau(x) \in B$. Поскольку $\tau\hat{\ }0 \prec TP$, для всех $x \in \omega$ найдется наименьший шаг $t > s$, на котором $l^R(e,t) > x$. По конструкции $f^{k+1}_{\tau,t}(x)$ будет определена, причем $x \in W_{e,t} \Leftrightarrow f^{k+1}_{\tau,t}(x) \in B_t$. Если для некоторого шага $u > t$ имеем $x \in W_{e,u} - W_{e,u-1}$, то по конструкции $f^{k+1}_{\tau,t}(x)$ будет перечислено в $B_u$. Поэтому $x \in W_e \Rightarrow f^{k+1}_\tau(x) \in B$. Если $x \notin W_e$, то стратегия $\mathscr{R}_\tau$ никогда не перечислит $f^{k+1}_{\tau,t}(x)$ в $B$. Так как стратегии для требований $\mathscr{P}_e$ выбирают свидетелей, а стратегии для требований $\mathscr{R}_e$ выбирают замены только среди не использовавшихся до этого чисел, то $x$ не может быть перечислен в $B$ из-за действий стратегий для других требований. Значит, $x \notin W_e \Rightarrow f^{k+1}_\tau(x) \notin B$. В силу выбора шага $s$, $f^{k+1}_\tau(x)$ никогда не будет отменена. Поэтому $x \in W_e \Leftrightarrow f^{k+1}_\tau(x) \in B$, следовательно, требование $\mathscr{R}_e$ удовлетворено. $\square$

Леммы показывают, что все требования удовлетворены, и тем самым завершают доказательство теоремы. $\square$

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Post E. L.* Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. V. 50, N 5. P. 284–316.
2. *Odifreddi P.* Classical recursion theory. The Theory of Functions and Sets of Natural Numbers. Amsterdam: Elsevier, 1989. (Stud. Logic Found. Math; V. 125).
3. *Odifreddi P.* Classical recursion theory. V. II. Amsterdam: Elsevier, 1999. (Stud. Logic Found. Math; V. 143).
4. *Odifreddi P.* Reducibilities // Handbook of computability theory. Amsterdam: Elsevier, 1999. P. 89–120. (Stud. Logic Found. Math; V. 140).
5. *Соар Р. И.* Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казан. мат. о-во, 2000.

**6.** *Kučera A.* An alternative, priority-free, solution to Post's problem // Math. Foundations Comp. Sci. (Bratislava, 1986). Berlin: Springer-Verl., 1986. P. 493–500. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 233).

**7.** *Марченков С. С.* Об одном классе неполных множеств // Мат. заметки. 1976. Т. 20, № 4. С. 473–478.

**8.** *Ершов Ю. Л.* Позитивные эквивалентности // Алгебра и логика. 1971. Т. 10, № 6. С. 620–650.

**9.** *Добрица В. П.* О проблеме равенства слов на рекурсивно определенных группах // Третья Всесоюз. конф. по мат. логике: Тез. докл. Новосибирск: Ин-т математики, 1974. С. 63–65.

**10.** *Белеградек О. В.* Об алгебраически замкнутых группах // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 3. С. 239–255.

**11.** *Kummer M.* Kolmogorov complexity and instance complexity of recursively enumerable sets // SIAM J. Comput. 1996. N 25. P. 1123–1143.

**12.** *Batyrshin I. I.* Quasi-completeness and functions without fixed points // Math. Log. Q. 2006. V. 52, N 6. P. 595–601.

**13.** *Fischer P.* Some results on recursively enumerable degrees of weak reducibilities: Dissertation. Universität Bielefeld, 1986.

**14.** *Downey R. R., LaForte G. G., Nies A.* Computably enumerable sets and quasi-reducibility // Ann. Pure Appl. Logic. 1998. V. 95. P. 1–35.

**15.** *Omanadze R. Sh.* Quasi-degrees of recursively enumerable sets // Computability and models: Perspectives East and West. New York; Boston; Dordrecht; London; Moscow: Kluwer Acad.; Plenum Publ., 2002. P. 289–319.

**16.** *Arslanov M. M., Omanadze R. Sh.* $Q$-degrees of n-c.e. sets // Illinois J. Math. 2007. V. 51, N 4. P. 1189–1206.

**17.** *Arslanov M. M., Batyrshin I. I., Omanadze R. Sh.* Structural properties of $Q$-degrees of n-c.e. sets // Ann. Pure Appl. Logic. 2008. V. 156. P. 13–20.

**18.** *Батыршин И. И.* Изолированные 2-вычислимо перечислимые $Q$-степени // Изв. вузов. Математика. 2010. № 4. С. 3–9.

**19.** *Batyrshin I. I.* Non-isolated quasi-degrees // Math. Log. Q. 2009. V. 55, N 6. P. 587–597.

**20.** *Affatato M. L., Kent T. F., Sorbi A.* Undecidability of local structures of $s$-degrees and $Q$-degrees // Tbilisi Math. J. 2008. V. 1. P. 15–32.

**21.** *Marsibilio D., Sorbi A.* First order theory of the $s$-degrees and arithmetic // J. Log. Comp. 2013. V. 23, N 6. P. 1267–1292.

**22.** *Omanadze R. Sh., Chitaia I. O.* $Q1$-degrees of c.e. sets // Arch. Math. Logic. 2012. V. 51, N 5–6. P. 503–515.

**23.** *Downey R. G., Jockush C. G.* $T$-degrees, jump classes and strong reducibilities // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 301, N 1. P. 103–136.

*Статья поступила 27 ноября 2013 г.*

Батыршин Ильнур Ильдарович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
batyrshin@gmail.com