Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2014. Том 55, № 5

УДК 517.518.23+517.518.83+519.651

ПОГРЕШНОСТЬ И ГАРАНТИРОВАННАЯ ТОЧНОСТЬ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ В МНОГОМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

В. Л. Васкевич

Аннотация. Проведена оценка сверху уклонения нормы возмущенного функционала погрешности от нормы исходного функционала погрешности кубатурной формулы на многомерной ограниченной области. Уклонение возникает в результате комбинированного влияния на итог вычислений малых изменений весов кубатурной формулы и округлений при последующем подсчете кубатурной суммы в условиях заданных стандартов (форматов) приближения вещественных чисел. Дана оценка практической погрешности кубатурной формулы при ее действии на произвольную функцию из единичного шара нормированного пространства подынтегральных функций. Полученные оценки применены при исследовании практической погрешности кубатурных формул в случае подынтегральных функций из пространств Соболева на многомерном кубе. Норма функционала погрешности в сопряженном соболевскому классу пространстве представлена в виде положительно определенной квадратичной формы от весов кубатурной формулы. Проведена оценка практической погрешности для кубатурных формул, каждая из которых конструируется как прямое произведение квадратурных формул прямоугольников по ребрам единичного куба. Веса такого прямого произведения положительны.

Ключевые слова: кубатурные формулы, функционалы погрешности, периодические пространства Соболева, константы и функции вложения, практическая погрешность, гарантированная точность.

Посвящается Ю. Г. Решетняку

Введение

На ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, рассматриваются кубатурные формулы [1] вида

$$\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi(x^{(j)}), \tag{1}$$

где $|\Omega|$ — объем области Ω, $x^{(j)}$ — лежащие в Ω узлы формулы, а c_j — ее ненулевые веса, подчиненные условию

$$\sum_{j=1}^{N} c_j = 1. \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00061).

Таким образом, все рассматриваемые далее кубатурные формулы на тождественно постоянных функциях точны. Правила, указывающие узлы $x^{(j)}$ и веса c_j кубатурной формулы (1), от выбора конкретной подынтегральной функции $\varphi(x)$ не зависят; варьируемая же часть формулы (1) — это подынтегральные функции φ.

Множество подынтегральных функций предполагается банаховым пространством $X = X(\Omega)$, вложенным ограниченным образом в пространство $C(\overline{\Omega})$ непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций. При этом существует конечная *константа вложения* [2–4] — минимальное положительное число $A_n = A_n(\Omega)$, для которого имеют место неравенства

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} |\varphi(x)| \le A_n \|\varphi \mid X(\Omega)\| \quad \forall\, \varphi \in X(\Omega). \tag{3}$$

Указанная константа A_n представляет собой норму действующего из $X(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ оператора вложения. Если тождественно единичная функция принадлежит $X(\Omega)$, имея здесь единичную же норму, то $A_n \ge 1$ — именно так далее и предполагается.

Кубатурную формулу (1) естественно рассматривать как некоторый стандарт приближения обобщенной функции $M_\Omega(x)$, действие которой на пробную функцию $\varphi(x)$ представляет собой среднее по Ω значение от этой самой функции:

$$(M_\Omega, \varphi) = \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_\Omega \varphi(x)\, dx.$$

В качестве типичных средств для такого стандартного приближения используются линейные комбинации сдвигов хорошо известной дельта-функции Дирака $\delta(x)$, т. е. кубатурные суммы вида

$$(\Sigma_N, \varphi) \equiv \left(\sum_{j=1}^{N} c_j \delta(x - x^{(j)}), \varphi(x) \right) = \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi(x^{(j)}) \quad \forall\, \varphi \in C(\overline{\Omega}).$$

Действие функционала $\Sigma_N(x)$ на пробную функцию $\varphi(x)$ полностью определяется значениями этой пробной функции в узлах кубатурной формулы.

Теоретически погрешность приближения обобщенной функции $M_\Omega(x)$ кубатурной суммой $\Sigma_N(x)$ исследуется в $[1, 5, 6]$, где даны оценки значений на конкретных элементах φ из $X(\Omega)$ *функционала погрешности* l_N формулы, задаваемого равенством

$$(l_N, \varphi) = (M_\Omega - \Sigma_N, \varphi) = \left(M_\Omega(x) - \sum_{j=1}^{N} c_j \delta(x - x^{(j)}), \varphi(x) \right) \quad \forall\, \varphi \in X(\Omega).$$

Естественная область определения функционала погрешности l_N — пространство $C(\overline{\Omega})$ непрерывных функций, где l_N линеен и ограничен. *Погрешность формулы* на произвольной функции φ из $X(\Omega)$ подчинена оценке

$$|(l_N, \varphi)| \le \|l_N \mid X(\Omega)^*\| \cdot \|\varphi \mid X(\Omega)\| \quad \forall\, \varphi \in X(\Omega). \tag{4}$$

В реальности при заданных узловых значениях подынтегральной функции φ приблизить среднее (M_Ω, φ) кубатурной суммой (Σ_N, φ) возможно, лишь вычислив эту кубатурную сумму. В общем случае для этого придется выполнить N умножений и N сложений вещественных чисел, что по известным причинам можно сделать лишь приближенно. Обозначив через $(\widetilde{\Sigma}_N, \varphi)$ результат, получающийся в итоге указанных вычислений кубатурной суммы, заметим, что эта величина с исходной суммой (Σ_N, φ), вообще говоря, совпадать не обязана. Таким образом, вместе с теоретической появляется иная погрешность — практическая [7–9].

§ 1. Практическая погрешность

Практическая погрешность кубатурной формулы характеризуется уже не функционалом l_N, а его аналогом — функционалом $\tilde{l}_N$:

$$(\tilde{l}_N, \varphi) = (M_\Omega - \widetilde{\Sigma}_N, \varphi) \quad \forall\, \varphi \in X(\Omega).$$

Функционал практической погрешности $\tilde{l}_N$ нелинеен, с исходным функционалом l_N не совпадает, и оценка (4) к нему неприменима. В этих условиях если только хотим найти действие (M_Ω, φ) численно и с гарантированной точностью, для оценки практической погрешности необходимо иметь какой-либо аналог неравенства (4).

Главная причина различия теоретической и практической погрешностей состоит в необходимости приближать вещественные числа элементами некоторого конечного и дискретного подмножества $\mathbf{F}$ числовой оси $\mathbb{R}$. Элементы множества $\mathbf{F}$ называют *машинными числами* (именно с ними оперирует компьютер). Вполне определенные стандарты приближения вещественных чисел машинными описаны в рамках широко известной модели двоичной арифметики с конечной точностью (или представления вещественных чисел с плавающей точкой) [10–12]. В множестве $\mathbf{F}$ выделяются три фундаментальные положительные константы: порог машинного нуля ε_0, порог переполнения ε_∞ и относительная погрешность ε_1 (определяемая тем условием, что $1 + \varepsilon_1$ принадлежит $\mathbf{F}$, а на интервале $(1, 1 + \varepsilon_1)$ нет ни одного числа из $\mathbf{F}$). Число ε_0 значительно меньше числа ε_1, которое, в свою очередь, значительно меньше единицы, в то время как ε_∞ превосходит единицу во много раз. Далее предполагается, что ε-константы, соответствующие принятому в вычислениях стандарту представления с плавающей точкой, удовлетворяют следующим необременительным ограничениям:

$$\varepsilon_1 \le 1/2, \quad 2\varepsilon_\infty^{1/3} \le \sqrt{\varepsilon_\infty \varepsilon_1}, \quad \varepsilon_0 \le \sqrt{2}\varepsilon_1^{11/2}. \tag{5}$$

Общепринятый IEEE-стандарт двоичной арифметики отводит под запись машинного числа с двойной точностью 64 бита (1 бит под двоичную запись знака s числа, 11 бит под двоичную запись показателя e числа и 52 бита под двоичные цифры его мантиссы f). Заданным s, e и f соответствует машинное число $(-1)^s 2^{e-1023}(1+f)$. В этом случае ε-константы задаются соотношениями [12]:

$$\varepsilon_0 = 2^{-1022} \approx 10^{-308}, \quad \varepsilon_\infty = 2^{1023}(2 - 2^{-52}) \approx 4 \times 10^{308}, \quad \varepsilon_1 = 2^{-53} \approx 10^{-16}. \tag{6}$$

Константы (6) ограничениям (5) удовлетворяют.

В общем случае кубатурная сумма (Σ_N, φ) представляет собой скалярное произведение вектора $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_N)$ ее весов на вектор $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$, $\varphi_j = \varphi(x^{(j)})$, значений подынтегральной функции в узлах:

$$(\Sigma_N, \varphi) = (\vec{c}, \vec{\varphi}) \quad \forall\, \varphi \in X(\Omega).$$

Следовательно, величину $(\widetilde{\Sigma}_N, \varphi)$ естественно рассматривать как результат работы того или иного метода вычисления скалярного произведения (Σ_N, φ) в арифметике с заданным набором ε-констант. Простейшая оценка уклонения $(\widetilde{\Sigma}_N, \varphi)$ от исходной кубатурной суммы содержится в [13]. Переформулируем эту оценку в принятых нами обозначениях.

Предложение. *Пусть* $N\varepsilon_1 \leq 2h(1+h)$, $h > 0$. *Тогда*

$$|(\vec{c}, \vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \leq (N+1)\varepsilon_1(1+h)\,\|\vec{c}\|_2\,\|\vec{\varphi}\|_2, \tag{7}$$

где через $\|\cdot\|_2$ *обозначена евклидова норма вектора.*

Вернувшись к практической погрешности, предложим для нее аналог оценки (4), потребовав его выполнения уже не для всех функций φ из $X(\Omega)$, а лишь для тех из них, которые принадлежат следующему шаровому слою:

$$\mathbf{B}L_\varepsilon = \bigl\{\varphi \in X(\Omega) \mid \sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2} \leq A_n\|\varphi \mid X(\Omega)\| \leq \varepsilon_\infty^{1/3}\bigr\}. \tag{8}$$

Изначально потребуем, чтобы этот слой содержал внутри себя единичную сферу пространства $X(\Omega)$, т. е. чтобы удовлетворялись условия $\sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2} \leq A_n \leq \varepsilon_\infty^{1/3}$. Левое из этих неравенств заведомо выполнено, ибо в силу первого из условий (5) справедлива оценка $\sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2} \leq 1$, а константа вложения A_n не меньше единицы. Неравенство же $A_n \leq \varepsilon_\infty^{1/3}$ дает явное ограничение сверху на нормы допустимых операторов вложений $X(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$. Рассмотрим следующую величину:

$$\mathbf{R_F} = \sup_{\sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2} \leq A_n\|\varphi|X(\Omega)\| \leq \varepsilon_\infty^{1/3}} \frac{|M_\Omega(\varphi) - (\widetilde{\Sigma}_N, \varphi)|}{\|\varphi \mid X(\Omega)\|}. \tag{9}$$

При любом числе узлов N на основании оценок (4) и (7), а также неравенства треугольника $|M_\Omega(\varphi) - (\widetilde{\Sigma}_N, \varphi)| \leq |(l_N, \varphi)| + |(\Sigma_N, \varphi) - (\widetilde{\Sigma}_N, \varphi)|$ заключаем, что величина $\mathbf{R_F}$ неотрицательна и конечна.

Из определения (9) следует, что практическая погрешность подчинена следующей оценке:

$$|M_\Omega(\varphi) - (\widetilde{\Sigma}_N, \varphi)| \leq \mathbf{R_F}\|\varphi \mid X(\Omega)\| \quad \forall\, \varphi \in \mathbf{B}L_\varepsilon. \tag{10}$$

Величина $\mathbf{R_F}$ играет здесь ту же роль, что и норма $\|l_N \mid X(\Omega)^*\|$ в оценке (4).

§ 2. Обусловленность кубатурной формулы

При определенных условиях введенный выше параметр $\mathbf{R_F}$ мало отличается от нормы $\|l_N \mid X(\Omega)^*\|$ (именно такие кубатурные формулы интересны практически). Сформулируем такого рода условия и с этой целью остановимся на конкретном алгоритме Υ вычисления скалярного произведения в формулировке, к примеру, из [13] или из [10]. Ключевую роль в дальнейшем анализе играет приведенная в [10] оценка практической погрешности упомянутого алгоритма Υ при $N < 2/\varepsilon_1$:

$$|(\vec{c}, \vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \leq \frac{N\varepsilon_1}{1 - N\varepsilon_1/2}\sum_{j=1}^{N}|c_j\varphi(x^{(j)})| + \frac{N\varepsilon_0}{1 - N\varepsilon_1/2}. \tag{11}$$

Для выполнимости выбранного алгоритма Υ достаточно потребовать, чтобы векторы $\vec{c} = (c_1, \dots, c_N)$ и $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ удовлетворяли следующим условиям [10]:

$$\left(\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^2\right)^{1/2} \leq \frac{\sqrt{\varepsilon_\infty}}{2}, \quad \left(\sum_{j=1}^{N}c_j^2\right)^{1/2} \leq \frac{\sqrt{\varepsilon_\infty}}{2}.$$

В этом случае никаких аварийных остановок из-за переполнений возникнуть не может и машинное число $\widetilde{\Sigma}_N(\varphi)$ гарантированно будет получено при $N \leq 1/\varepsilon_1$.

Теорема 1. *Пусть соответствующие стандарту представления машинных чисел константы ε_0, ε_1 и ε_∞ подчинены ограничениям* (5), *константа вложения A_n подчинена условиям $1 \le A_n \le \varepsilon_\infty^{1/3}$, а веса $(c_1, \dots, c_N)$ кубатурной формулы таковы, что $\left(\sum\limits_{j=1}^{N} c_j^2\right)^{1/2} \le \sqrt{\varepsilon_\infty}/2$. Тогда уклонение введенного равенством* (9) *параметра $\mathbf{R_F}$ от нормы $\|l_N \mid X(\Omega)^*\|$ функционала погрешности при $N \le 1/\varepsilon_1$ удовлетворяет следующей оценке:*

$$|\mathbf{R_F} - \|l_N \mid X(\Omega)^*\|\,| \le 2NA_n\varepsilon_1\left(\sum_{j=1}^{N}|c_j| + 1\right). \tag{12}$$

Доказательство. Пусть функция φ лежит в шаровом слое (8). С помощью оценки (3) и неравенств $N \le 1/\varepsilon_1$, $2\varepsilon_\infty^{1/3} \le \sqrt{\varepsilon_\infty\varepsilon_1}$, первое из которых справедливо по условию теоремы, а второе имеет место в силу ограничений (5), получаем

$$\left(\sum_{j=1}^{N}|\varphi(x^{(j)})|^2\right)^{1/2} \le A_n\sqrt{N}\|\varphi \mid X(\Omega)\| \le \frac{A_n}{\sqrt{\varepsilon_1}}\|\varphi \mid X(\Omega)\| \le \frac{\varepsilon_\infty^{1/3}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \le \frac{\sqrt{\varepsilon_\infty}}{2}.$$

Эта оценка и условие $\|\vec{c}\|_2 \le \sqrt{\varepsilon_\infty}/2$ достаточны для выполнимости всех операций алгоритма Υ. В частности, справедливо соотношение

$$|(\vec{c}, \vec{\varphi})| \le \|\vec{c}\|_2\|\vec{\varphi}\|_2 \le \varepsilon_\infty/4,$$

и к скалярному произведению $(\vec{c}, \vec{\varphi}) = \Sigma_N(\varphi)$ применимо округление в избранном двоичном формате.

Пусть $R_{\mathbf{F}}(\varphi, \Sigma_N) = |M_\Omega(\varphi) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)|$. Пользуясь неравенством треугольника, имеем

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{F}}(\varphi, \Sigma_N) &\le |(l_N, \varphi)| + |(\vec{c}, \vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \\ &\le \|l_N \mid X(\Omega)^*\| \cdot \|\varphi \mid X(\Omega)\| + |(\vec{c}, \vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)|. \end{aligned} \tag{13}$$

По условию $\varepsilon_1 N \le 1$ и, следовательно, $1 - N\varepsilon_1/2 \ge 1/2$. Подставляя эту оценку в (11) и пользуясь неравенством (3), приходим к соотношению

$$|(\vec{c}, \vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \le 2N\varepsilon_1\left(A_n\|\varphi \mid X(\Omega)\|\sum_{j=1}^{N}|c_j| + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right). \tag{14}$$

В условиях (5) и (8) справедливы оценки $\varepsilon_0/\varepsilon_1 \le \sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2} \le A_n\|\varphi \mid X(\Omega)\|$. После подстановки этих неравенств в (14) имеем

$$|(\vec{c}, \vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \le 2NA_n\varepsilon_1\left(\sum_{j=1}^{N}|c_j| + 1\right)\|\varphi \mid X(\Omega)\|. \tag{15}$$

Подставив (15) в (13), получаем

$$\frac{R_{\mathbf{F}}(\varphi, \Sigma_N)}{\|\varphi \mid X(\Omega)\|} \le \|l_N \mid X(\Omega)^*\| + 2NA_n\varepsilon_1\left(\sum_{j=1}^{N}|c_j| + 1\right).$$

Взяв точную верхнюю грань от обеих частей этого неравенства по функциям φ из шарового слоя (8) и воспользовавшись определением (9), получаем оценку

$$\mathbf{R_F} - \|l_N \mid X(\Omega)^*\| \le 2NA_n\varepsilon_1\left(\sum_{j=1}^N |c_j| + 1\right). \tag{16}$$

Пусть φ — произвольный элемент единичной сферы пространства $X(\Omega)$, вложенной по условию в шаровой слой (8). К функции φ применим оценку (15) вместе с неравенством треугольника:

$$R_\mathbf{F}(\varphi,\Sigma_N) \ge |(l_N,\varphi)| - |(\vec{c},\vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \ge |(l_N,\varphi)| - 2NA_n\varepsilon_1\left(\sum_{j=1}^N |c_j| + 1\right).$$

Переходя здесь к точной верхней грани по всем φ из единичной сферы, а также пользуясь линейностью и ограниченностью функционала l_N, получаем

$$\sup_{\|\varphi|X(\Omega)\|=1} R_\mathbf{F}(\varphi,\Sigma_N) \ge \|l_N \mid X(\Omega)^*\| - 2NA_n\varepsilon_1\left(\sum_{j=1}^N |c_j| + 1\right).$$

В силу вложения единичной сферы пространства $X(\Omega)$ в шаровой слой (8) и определения (9) имеем оценку $\mathbf{R_F} \ge \sup\limits_{\|\varphi|X(\Omega)\|=1} R_\mathbf{F}(\varphi,\Sigma_N)$. Из двух последних неравенств вытекает следующая оценка уклонения снизу:

$$\mathbf{R_F} - \|l_N \mid X(\Omega)^*\| \ge -2NA_n\varepsilon_1\left(\sum_{j=1}^N |c_j| + 1\right).$$

Объединяя ее с (16), приходим к искомому неравенству (12). □

Следствие. *Практическая погрешность кубатурной формулы* (1) *на всякой функции φ из единичного шара пространства $X(\Omega)$ допускает при $N \le 1/\varepsilon_1$ следующую оценку сверху:*

$$|M_\Omega(\varphi) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \le \|l_N \mid X(\Omega)^*\| + 2NA_n\varepsilon_1\left(\sum_{j=1}^N |c_j| + 1\right). \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $\|\varphi \mid X(\Omega)\| \le 1$ и при этом φ принадлежит $\mathbf{B}L_\varepsilon$. Тогда $|M_\Omega(\varphi) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \le \mathbf{R_F}\|\varphi \mid X(\Omega)\| \le \mathbf{R_F}$. Применив к правой части этого неравенства оценку (16), получим (17).

Если же $\|\varphi \mid X(\Omega)\| \le 1$ и $\varphi \notin \mathbf{B}L_\varepsilon$, то в силу (8) справедливы неравенства

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} |\varphi(x)| \le A_n\|\varphi \mid X(\Omega)\| \le \sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2}. \tag{18}$$

В соответствии с оценкой (13) при $\|\varphi \mid X(\Omega)\| \le 1$ справедливо

$$|M_\Omega(\varphi) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \le \|l_N \mid X(\Omega)^*\| + |(\vec{c},\vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)|.$$

Второе слагаемое в правой части при $N \le 1/\varepsilon_1$ оценим с помощью (11):

$$|(\vec{c},\vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \le 2N\varepsilon_1\left(\sum_{j=1}^N |c_j|\right)\sup_{x\in\overline{\Omega}} |\varphi(x)| + 2N\varepsilon_0.$$

Подставив сюда оценку (18) и учтя, что $\varepsilon_0/\varepsilon_1 \leq \sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2}$, получим

$$|(\vec{c}, \vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \leq 2N\varepsilon_1 \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j| + 1 \right) \sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2}.$$

В силу первого из ограничений (5) имеем $\sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2} \leq 2^{-4} < 1$ и далее

$$|M_\Omega(\varphi) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \leq \|l_N \mid X(\Omega)^*\| + 2N\varepsilon_1 \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j| + 1 \right).$$

Это неравенство вместе с соотношением $A_n \geq 1$ приводит к искомой оценке (17). $\square$

Как вытекает из оценок (12) и (17), произведение $2NA_n\left(\sum\limits_{j=1}^{N} |c_j| + 1\right)$ естественно рассматривать в качестве числа обусловленности кубатурной формулы $M_\Omega(\varphi) \approx \Sigma_N(\varphi)$ на пространстве $X(\Omega)$ (см. также [7–9]).

Применим полученные оценки к погрешности кубатурных формул на многомерных периодических пространствах Соболева различной гладкости, но прежде уточним, что это за пространства.

§ 3. Классы подынтегральных функций

Рассмотрим произвольный тригонометрический полином $\varphi(x)$, представленный линейной комбинацией экспонент:

$$\varphi(x) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^n} c[\beta] e^{-i2\pi\beta x}. \tag{19}$$

Здесь $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — мультииндекс, $\beta x = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j x_j$ и лишь конечное число коэффициентов $c[\beta]$ отлично от нуля.

Если координаты ненулевого мультииндекса β изменяются на множестве целых чисел независимо друг от друга, то квадрат его евклидовой нормы $|\beta|^2 = \beta_1^2 + \dots + \beta_n^2$ пробегает некоторое подмножество натурального ряда. Элементы этого подмножества обозначим через N_j, полагая при этом $N_j < N_{j+1}$. Очевидно, что $N_1 = 1$. Полагая еще $N_0 = 0$, индукцией по j легко обосновать неравенство $N_j \geq j$ для $j \geq 0$.

Если $n \geq 4$, то имеет место точное равенство $N_j = j$, как это следует из известной теоремы Лагранжа о представимости любого натурального числа суммой четырех квадратов. Если $n = 1$, то $N_j = j^2$.

Последовательность $\{(2\pi)^2 N_j \mid j = 0, 1, \dots\}$ состоит из всевозможных собственных чисел оператора $-\Delta$, противоположного лапласиану и действующего на периодических с периодом 1 по каждой из компонент функциях переменной $x = (x_1, \dots, x_n)$. Общее число мультииндексов β, удовлетворяющих условию $|\beta|^2 = N_j$, обозначается через $r_n(N_j)$ [14]. Ясно, что $r_n(0) = 1$ и $r_n(1) = 2n$.

В пространстве периодических собственных функций оператора Лапласа, соответствующих собственному числу $-(2\pi)^2 N_j$, множество $\{e^{-i2\pi\beta x} \mid |\beta|^2 = N_j\}$ представляет собой ортонормированный базис:

$$\int\limits_Q e^{-i2\pi\beta x} e^{i2\pi\gamma x}\, dx = \delta_\beta^\gamma.$$

В качестве области интегрирования здесь и далее рассматривается единичный куб:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ 0 \le x_j < 1,\ j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Величина $r_n(N_j)$ представляет собой кратность собственного числа $(2\pi)^2 N_j$.

Вместе с формулой (19) используем следующее эквивалентное разложение:

$$\varphi(x) = c[0] + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\beta|^2 = N_j} c[\beta] e^{-i2\pi\beta x}. \tag{19$'$}$$

В качестве пространства подынтегральных функций условимся рассматривать пополнение совокупности всех тригонометрических полиномов $\varphi(x)$ вида (19) по норме

$$\|\varphi \mid \widetilde{H}^s(Q)\| = \left\{ |c[0]|^2 + (2\pi)^{2s} \sum_{j=1}^{\infty} N_j^s \sum_{|\beta|^2 = N_j} |c[\beta]|^2 \right\}^{1/2} \tag{20}$$

или, что то же самое, по норме

$$\|\varphi \mid \widetilde{H}^s(Q)\| = \Big\{ |c[0]|^2 + \sum_{\beta \ne 0} |2\pi\beta|^{2s} |c[\beta]|^2 \Big\}^{1/2}. \tag{20$'$}$$

Здесь число s, возможно, и дробное, характеризует минимально допустимую гладкость элементов из рассматриваемого класса, т. е. s — это *гладкость класса*. Предполагается, что $s > n/2$. Суммирование в (20$'$) производится по всем ненулевым β из $\mathbb{Z}^n$.

Пополнение пространства тригонометрических полиномов по норме (20$'$) известно как пространство Соболева $\widetilde{H}^s(Q)$ порядка s. Произвольный элемент φ из $\widetilde{H}^s(Q)$ представляет собой периодическую функцию: $\varphi(x+\gamma) = \varphi(x)$ для $\forall\, \gamma \in \mathbb{Z}^n$. Равенства (20), (20$'$) дают выражение нормы произвольного элемента $\varphi(x)$ из $\widetilde{H}^s(Q)$ через его коэффициенты Фурье

$$c[\beta] = c_\varphi[\beta] = \int_Q \varphi(x) e^{i2\pi\beta x}\, dx \quad \forall\, \beta \in \mathbb{Z}^n.$$

Произвольный элемент φ из $\widetilde{H}^s(Q)$ разлагается в сходящийся по норме (20), (20$'$) ряд (19), (19$'$). Тождественно единичная функция принадлежит классу $\widetilde{H}^s(Q)$, имея здесь единичную норму. Пространство $\widetilde{H}^s(Q)$ гильбертово со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_s = c_\varphi[0]\bar{c}_\psi[0] + \sum_{\beta \ne 0} |2\pi\beta|^{2s} c_\varphi[\beta]\bar{c}_\psi[\beta]$$
$$= c_\varphi[0]\bar{c}_\psi[0] + (2\pi)^{2s} \sum_{j=1}^{\infty} N_j^s \sum_{|\beta|^2 = N_j} c_\varphi[\beta]\bar{c}_\psi[\beta].$$

Если s равно m — натуральному числу, то $\widetilde{H}^s(Q)$ совпадает с $\widetilde{W}_2^m(Q)$ — пространством периодических с единичной матрицей периодов функций из $L_2(Q)$, обобщенные производные которых до порядка m включительно также принадлежат $L_2(Q)$. Норма в $\widetilde{W}_2^m(Q)$ задается равенством [5]

$$\big\|\varphi \mid \widetilde{W}_2^m(Q)\big\| = \left[\Big| \int_Q \varphi(x)\, dx \Big|^2 + \int_Q \sum_{|\alpha| = m} \frac{m!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi|^2\, dx \right]^{1/2}$$

и совпадает с нормой $\|\varphi \mid \widetilde{H}^m(Q)\|$, определяемой соотношениями (20), (20′).

В принятых в [1] обозначениях $\widetilde{H}^s(Q)$ как множество совпадает с пространством $\widetilde{H}_2^s$ из бесселевой шкалы гильбертовых пространств с нулевым пространством $\widetilde{L}_2$ и весовой функцией $\mu(\xi) = (1 + |2\pi\xi|^2)^{s/2}$. Норма в $\widetilde{H}_2^s$ задается соотношением

$$\|\varphi \mid \widetilde{H}_2^s\| = \Big\{\sum_{\beta}(1 + |2\pi\beta|^2)^s |c_\varphi[\beta]|^2\Big\}^{1/2}. \tag{21}$$

При этом $\|\varphi \mid \widetilde{H}^s(Q)\|^2 \le \|\varphi \mid \widetilde{H}_2^s\|^2 \le 2^s\|\varphi \mid \widetilde{H}^s(Q)\|^2$, т. е. нормы (20) и (21) эквивалентны. Известно [5], что при $s > n/2$ пространство $\widetilde{H}^s(Q)$ вложено в $C(\overline{Q})$ с оценкой

$$\sup_{x\in\overline{Q}} |\varphi(x)| \le \widetilde{A}_n^s \|\varphi \mid \widetilde{H}^s(Q)\| \quad \forall\, \varphi \in \widetilde{H}^s(Q). \tag{22}$$

Точный вид константы $\widetilde{A}_n^s$ этого вложения приведен в [3].

Теорема 2. *При $s > n/2$ константа вложения $\widetilde{A}_n^s$ представима в виде*

$$\widetilde{A}_n^s = \Big\{1 + \sum_{\beta\neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}}\Big\}^{1/2} = \Big\{1 + \frac{1}{(2\pi)^{2s}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r_n(N_j)}{N_j^s}\Big\}^{1/2}, \tag{23}$$

причем ряд в правой части равенства (23) *сходится. В* $\widetilde{H}^s(Q)$ *существует функция вложения* $u_0(x)$, *на которой в* (22) *достигается равенство:*

$$u_0(x) = 1 + \sum_{\beta\neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}}\, e^{-i2\pi\beta x} = 1 + \frac{1}{(2\pi)^{2s}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{N_j^s} \sum_{|\beta|^2 = N_j} e^{-i2\pi\beta x}. \tag{24}$$

Функция вложения $u_0(x)$ *из* $\widetilde{H}^s(Q)$ *с точностью до постоянного слагаемого и скалярного сомножителя представляет собой обобщенную дзета-функцию Эпштейна* [15], *при этом* $\|u_0 \mid \widetilde{H}^s(Q)\| = \widetilde{A}_n^s$.

Из (23) следует, что $\widetilde{A}_n^s$ монотонно убывает по s при $s > n/2$. В [3] приведена также справедливая для всех $s > n/2$ формула

$$\big(\widetilde{A}_n^s\big)^2 = 1 + \frac{1}{(2\pi)^{2s}} \sum_{j=1}^{n} 2^j \binom{n}{j} \sum_{\beta_1=1}^{\infty} \sum_{\beta_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{\beta_j=1}^{\infty} \frac{1}{\big(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_j^2\big)^s}. \tag{25}$$

В случае $n = 1$ равенство (25) принимает вид

$$\big(\widetilde{A}_1^s\big)^2 = 1 + \frac{2}{(2\pi)^{2s}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} = 1 + \frac{2\zeta(2s)}{(2\pi)^{2s}}, \tag{25′}$$

где $\zeta(\cdot)$ — известная дзета-функция Римана. В случае $n \ge 2$ и $s > n/2$, оставляя в правой части (25) ровно одно соответствующее $j = 1$ слагаемое, получаем

$$\big(\widetilde{A}_n^s\big)^2 \ge 1 + \frac{2n}{(2\pi)^{2s}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} > 1 + n\big[\big(\widetilde{A}_1^s\big)^2 - 1\big].$$

Оценим величину $\widetilde{A}_1^s$ при $s > 1/2$. Учитывая, что при любом натуральном k справедливы неравенства $k^{-2s} \le \int\limits_{k-1}^{k} x^{-2s}\,dx$ и $k^{-2s} \ge \int\limits_{k}^{k+1} x^{-2s}\,dx$ (в силу монотонного убывания подынтегральной функции x^{-2s}), из $(25')$ получаем

$$\big(\widetilde{A}_1^s\big)^2 - 1 = \frac{2}{(2\pi)^{2s}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} \le \frac{2}{(2\pi)^{2s}} \left(1 + \int\limits_1^{\infty} x^{-2s}\,dx\right) = \frac{2s}{(2\pi)^{2s}(s-1/2)},$$

$$\big(\widetilde{A}_1^s\big)^2 - 1 = \frac{2}{(2\pi)^{2s}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} \ge \frac{2}{(2\pi)^{2s}} \int\limits_1^{\infty} x^{-2s}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{2s}(s-1/2)}.$$

Таким образом, имеют место неравенства

$$\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^{2s}(s-1/2)}\right)^{1/2} < \widetilde{A}_1^s < \left(1 + \frac{2s}{(2\pi)^{2s}(s-1/2)}\right)^{1/2}. \tag{26}$$

Лемма. *При любом $s > n/2$ константа вложения $\widetilde{A}_n^s$ мажорируется величиной*

$$\widetilde{M}_n^s = \left\{1 + \frac{1}{(2\pi)^{2s}} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{j^s} \left(\frac{2s}{s - \frac{j}{2}}\right)^j\right\}^{1/2}, \tag{27}$$

т. е. имеет место оценка $\widetilde{A}_n^s \le \widetilde{M}_n^s$. Мажоранта $\widetilde{M}_n^s$ по s монотонно убывает, а по n монотонно возрастает.

Доказательство. Для любого набора $(\beta_1, \dots, \beta_j)$ натуральных чисел известно неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим их квадратов:

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_j^2 \ge j\left(\beta_1^2\beta_2^2 \dots \beta_j^2\right)^{1/j}.$$

Используя его, для всех $s > j/2$ получаем следующее неравенство:

$$\sum_{\beta_1=1}^{\infty} \sum_{\beta_2=1}^{\infty} \dots \sum_{\beta_j=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_j^2\right)^s} \le \frac{1}{j^s} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s/j}}\right)^j = \frac{(2\pi)^{2s}}{2^j j^s} \left(\big(\widetilde{A}_1^{s/j}\big)^2 - 1\right)^j.$$

Подставляя его в представление (25) и пользуясь (26), имеем

$$\big(\widetilde{A}_n^s\big)^2 - 1 \le \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{j^s} \left(\big(\widetilde{A}_1^{s/j}\big)^2 - 1\right)^j \le \frac{1}{(2\pi)^{2s}} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{j^s} \left(\frac{2s}{s - \frac{j}{2}}\right)^j = \big(\widetilde{M}_n^s\big)^2 - 1.$$

Это и означает, что $\widetilde{A}_n^s \le \widetilde{M}_n^s$. $\square$

Числовые значения мажоранты $\widetilde{M}_n^s$ для некоторых s и n приведены в табл. 1.

§ 4. Экстремальные функции и нормы функционалов погрешности

Пусть функционал l линеен и ограничен на пространстве $\widetilde{H}^s(Q)$. Функцию $u(x)$ из $\widetilde{H}^s(Q)$ называют *экстремальной* для l, если выполняются соотношения [5]

$$\|l \mid \widetilde{H}^s(Q)^*\|^2 = (l, u) = \|u \mid \widetilde{H}^s(Q)\|^2. \tag{28}$$

Таблица 1. Мажоранта $\widetilde{M}_n^s$

s	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=6$	$n=8$
1	1.0495				
1.5	1.0061	1.0371			
2	1.0009	1.0030	1.0245		
2.5	1.0002	1.0004	1.0011		
3	1.0001	1.0001	1.0002		
3.5			1.0001	1.0189	
4				1.0002	
4.5				1.0001	1.0309
5					1.0001

Как следует из строгой выпуклости единичной сферы в гильбертовом пространстве, *для данного функционала l из $\widetilde{H}^s(Q)$ может существовать не более одной экстремальной функции.*

Существование экстремальной для l функции вытекает из теоремы Рисса об общем виде линейного ограниченного на гильбертовом пространстве функционала. В соответствии с ней в $\widetilde{H}^s(Q)$ имеется единственная функция $u(x)$ такая, что для всех функций φ из $\widetilde{H}^s(Q)$ справедливо равенство $(l,\varphi) = \big(\varphi, u\big)_s$. Именно эта функция $u(x)$, как легко убедиться, является для l экстремальной.

Вернемся к функционалу погрешности кубатурной формулы (1) в случае интегрирования по кубу Q:

$$(l_N,\varphi) \equiv \int\limits_Q \varphi(x)\,dx - \sum_{j=1}^N c_j\varphi(x^{(j)}), \qquad \sum_{j=1}^N c_j = 1. \tag{1$'$}$$

Функционал l_N линеен и ограничен на $C(\overline{Q})$, а значит, в силу (22) и теоремы 2 он же ограничен на $\widetilde{H}^s(Q)$, $s > n/2$. Экстремальная для l_N функция $u_N(x)$ определяется из соотношений

$$\|l_N \mid \widetilde{H}^s(Q)^*\|^2 = (l_N, u_N) = \|u_N \mid \widetilde{H}^s(Q)\|^2. \tag{29}$$

Из равенств $(l_N, 1) = \big(1, u_N\big)_s = 0$ и определения скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_s$ вытекает, что экстремальная функция ортогональна тождественной единице:

$$\int\limits_Q u_N(x)\,dx = 0.$$

Теорема 3 (общий вид экстремальных функций). *При $s > n/2$ экстремальная в $\widetilde{H}^s(Q)$ функция $u_N(x)$ заданной кубатурной формулы (1$'$) представима в виде следующей линейной комбинации:*

$$u_N(x) = u(x \mid x^{(1)},\dots,x^{(N)}) = \sum_{j=1}^N c_j u(x \mid x^{(j)}). \tag{30}$$

Каждая из функций $u(x \mid x^{(j)})$ здесь экстремальна для кубатурной формулы с единственным узлом $x^{(j)}$, т. е. для формулы $\int\limits_Q \varphi(x)\,dx \approx \varphi(x^{(j)})$. Функция

$u(x \mid x^{(j)})$ зависит от разности $x - x^{(j)}$ и представима в виде следующего абсолютно сходящегося ряда:

$$u(x \mid x^{(j)}) = -\sum_{\beta\neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}} e^{i2\pi\beta(x-x^{(j)})} = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{2s} N_j^s} \sum_{|\beta|^2=N_j} e^{i2\pi\beta(x-x^{(j)})}. \tag{31}$$

Доказательство. Зафиксировав в кубе Q узел $x^{(1)}$, рассмотрим функционал погрешности кубатурной формулы с этим узлом:

$$(l_1(x \mid x^{(1)}), \varphi(x)) = \int\limits_Q \varphi(x)\,dx - \varphi(x^{(1)}).$$

Функционал $l_1(x \mid x^{(1)})$ на пространстве $C(\overline{Q})$ линеен и ограничен:

$$|(l_1(x \mid x^{(1)}), \varphi(x))| \leq \int\limits_Q |\varphi(x)|\,dx + |\varphi(x^{(1)})| \leq 2 \sup_{x\in\overline{Q}} |\varphi(x)| \quad \forall\, \varphi \in C(\overline{Q}).$$

В силу вложения $\widetilde{H}^s(Q)$ в $C(\overline{Q})$ функционал $l_1(x \mid x^{(1)})$ ограничен и на $\widetilde{H}^s(Q)$.

По теореме Рисса об общем виде линейного функционала на гильбертовом пространстве существует такая функция $u_1(x)$ из $\widetilde{H}^s(Q)$, что для всякой функции φ из $\widetilde{H}^s(Q)$ имеют место равенства

$$(l_1(x \mid x^{(1)}), \varphi(x)) = (\varphi, u_1)_s = c_\varphi[0]\bar{c}_{u_1}[0] + \sum_{\beta\neq 0} |2\pi\beta|^{2s} c_\varphi[\beta]\bar{c}_{u_1}[\beta]. \tag{32}$$

При этом $(l_1(x \mid x^{(1)}), u_1(x)) = \|u_1 \mid \widetilde{H}^s(Q)\|^2 = \|l_1(x \mid x^{(1)}) \mid \widetilde{H}^s(Q)^*\|^2$, т. е. функция $u_1(x)$ экстремальна для $l_1(x \mid x^{(1)})$. Найдем $u_1(x)$ в явном виде.

Функционал $l_1(x \mid x^{(1)})$ точен на тождественно единичной функции и поэтому, как вытекает из (32), $c_{u_1}[0] = 0$. Следовательно, для $\varphi(x)$ из $\widetilde{H}^s(Q)$ имеем

$$(l_1(x \mid x^{(1)}), \varphi(x)) = \sum_{\beta\neq 0} |2\pi\beta|^{2s} c_\varphi[\beta]\bar{c}_{u_1}[\beta].$$

Поочередно подставляя сюда вместо $\varphi(x)$ экспоненты $e^{i2\pi\beta x}$, $\beta \neq 0$, из исходного ортонормированного базиса, приходим к соотношениям $(l_1(x \mid x^{(1)}), e^{i2\pi\beta x}) = -e^{i2\pi\beta x^{(1)}} = |2\pi\beta|^{2s}\bar{c}_{u_1}[-\beta]$, т. е. $|2\pi\beta|^{2s} c_{u_1}[\beta] = -e^{i2\pi\beta x^{(1)}}$. Тем самым искомая функция $u_1(x)$ представима в виде

$$u_1(x) = \sum_{\beta\neq 0} c_{u_1}[\beta] e^{-i2\pi\beta x} = -\sum_{\beta\neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}} e^{i2\pi\beta(x-x^{(1)})}. \tag{33}$$

Ряд (33) сходится абсолютно и равномерно в силу условия $s > n/2$. Чтобы в этом убедиться, достаточно воспользоваться неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим: $|\beta|^2 \geq n|\beta_1|^{2/n}|\beta_2|^{2/n}\dots|\beta_n|^{2/n}$.

Таким образом, задаваемая равенством (33) функция $u_1(x) = u(x \mid x^{(1)})$ определена и непрерывна на $\overline{Q}$, а с функцией вложения $u_0(x)$, задаваемой равенством (24), связана соотношением $u_1(x) = 1 - u_0(x - x^{(1)})$.

Пусть $N \geq 2$ и $\sum\limits_{j=1}^{N} c_j = 1$. Тогда

$$\int\limits_Q \varphi(x)\,dx - \sum_{j=1}^{N} c_j\varphi(x^{(j)}) = \sum_{j=1}^{N} c_j\Bigl(\int\limits_Q \varphi(x)\,dx - \varphi(x^{(j)})\Bigr)$$

или, что то же самое, $(l_N,\varphi)=\sum\limits_{j=1}^{N}c_j(l_1(x\mid x^{(j)}),\varphi)$. Пользуясь уже установленной экстремальностью функции $u(x\mid x^{(j)})$, а также определением (30), имеем

$$(l_N,\varphi)=\sum_{j=1}^{N}c_j(\varphi(x),u(x\mid x^{(j)}))_s=\left(\varphi(x),\sum_{j=1}^{N}c_ju(x\mid x^{(j)})\right)_s=(\varphi,u_N)_s.$$

Следовательно, функция $u_N(x)$ из $\widetilde{H}^s(Q)$ соответствует функционалу погрешности l_N в силу теоремы Рисса, являясь тем самым экстремальной для него. $\square$

Противоположная экстремальной функции $u(x\mid x^{(j)})$ функция $\widetilde{G}(x-x^{(j)})$ представляет собой периодическую функцию Грина оператора $(-\Delta)^s$, где Δ — оператор Лапласа:

$$\widetilde{G}(x-x^{(j)})=-u(x\mid x^{(j)})=\sum_{\beta\neq0}\frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}}e^{i2\pi\beta(x-x^{(j)})},\tag{34}$$

или

$$\widetilde{G}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^{2s}N_k^s}\sum_{|\beta|^2=N_k}e^{i2\pi\beta x}\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{G}_k^{(n)}(x).\tag{34$'$}$$

Если число $s=m$ натуральное, то $(-1)^m\Delta^m$ — полигармонический оператор, если s дробное, то $(-\Delta)^s$ — псевдодифференциальный оператор. При всех $s>n/2$ имеет место равенство $(-\Delta)^s\widetilde{G}(x)=\sum\limits_{\beta\neq0}e^{i2\pi\beta x}=\sum\limits_{\beta\neq0}\delta(x-\beta)$.

Функция Грина $\widetilde{G}(x)$ принадлежит $\widetilde{H}^s(Q)$ и, в частности, периодична по каждой из компонент с периодом 1: $\widetilde{G}(x+\gamma)=\widetilde{G}(x)\;\forall\gamma\in\mathbb{Z}^n$. Значения функции $\widetilde{G}(x)$ в точках решетки $\mathbb{Z}^n$ и константа вложения $\widetilde{A}_n^s$ связаны соотношением

$$\widetilde{G}(0)=\sum_{\beta\neq0}\frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}}=\frac{1}{(2\pi)^{2s}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r_n(N_k)}{N_k^s}=\left(\widetilde{A}_n^s\right)^2-1.$$

По теореме 3 экстремальная для l_N функция $u_N(x)$ выражается через функцию Грина по формуле

$$u_N(x)=-\sum_{j=1}^{N}c_j\widetilde{G}(x-x^{(j)}).\tag{35}$$

Коэффициенты c_j и точки $x^{(j)}$ в этом разложении — это в точности веса и узлы соответствующей кубатурной формулы.

Далее, учитывая, что $\int\limits_Q\widetilde{G}(x-x^{(j)})\,dx=-\int\limits_Q u(x\mid x^{(j)})\,dx=0$ и пользуясь (29) и (35), получаем для квадрата нормы функционала погрешности следующее представление:

$$\|l_N\mid\widetilde{H}^s(Q)^*\|^2=(l_N,u_N)=-\sum_{j=1}^{N}c_j(l_N,\widetilde{G}(x-x^{(j)}))=\sum_{i,j=1}^{N}c_ic_j\widetilde{G}(x^{(i)}-x^{(j)}).\tag{36}$$

Вместе с формулой (35) используем также разложение $u_N(x)$ в ряд Фурье [16]:

$$u_N(x)=\sum_{|\beta|\neq0}\frac{(l_N,e^{i2\pi\beta x})}{|2\pi\beta|^{2s}}e^{-i2\pi\beta x}$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^{2s}N_j^s}\sum_{|\beta|^2=N_j}(l_N,e^{i2\pi\beta x})e^{-i2\pi\beta x},\quad s>n/2.$$

Применив к обеим частям этого равенства функционал погрешности l_N, получаем выражение квадрата его нормы через его же коэффициенты Фурье [16]:

$$\|l_N \mid \widetilde{H}^s(Q)^*\|^2 = \sum_{|\beta|\neq 0} \frac{|(l_N, e^{i2\pi\beta x})|^2}{|2\pi\beta|^{2s}}$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{2s} N_j^s} \sum_{|\beta|^2=N_j} |(l_N, e^{i2\pi\beta x})|^2. \quad (37)$$

Из (37) заключаем, в частности, что *норма* $\|l_N \mid \widetilde{H}^s(Q)^*\|$ *как функция от гладкости* s *монотонно убывает.*

§ 5. Оценка практической погрешности

Кубатурная формула $(1')$ с числом узлов $N \leq 1/\varepsilon_1$ имеет на любой функции φ из единичного шара пространства $\widetilde{H}^s(Q)$ практическую погрешность, допускающую, как это вытекает из (17), следующую оценку сверху:

$$|M_Q(\varphi) - (\widetilde{\Sigma}_N, \varphi)| \leq \|l_N \mid \widetilde{H}^s(Q)^*\| + 2N\widetilde{A}_n^s \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j| + 1\right) \cdot \varepsilon_1. \quad (38)$$

Упростим правую часть этого неравенства, напомнив предварительно, что основным инструментом улучшения кубатурных формул на классах периодических функций как в теории, так и на практике служит построение тех из них, которые точны сразу на всех тригонометрических полиномах вплоть до заранее заданной степени [6, 17].

Теорема 4. *Для любой кубатурной формулы вида* $(1')$, *точной на тригонометрических полиномах до степени* $M-1$ *включительно, имеет место равенство*

$$\|l_N \mid \widetilde{H}^s(Q)^*\|^2 = \sum_{i,j=1}^{N} c_i c_j \widetilde{G}_M(x^{(i)} - x^{(j)}), \quad (39)$$

где неполная периодическая функция Грина $\widetilde{G}_M(x)$ *задается соотношением*

$$\widetilde{G}_M(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2s}} \sum_{k=J(M)}^{\infty} \frac{1}{N_k^s} \sum_{|\beta|^2=N_k} e^{i2\pi\beta x} \equiv \sum_{k=J(M)}^{\infty} \widetilde{G}_k^{(n)}(x). \quad (40)$$

Нижняя граница суммирования $J(M)$ *здесь совпадает с наибольшим из тех натуральных чисел* j, *для которых* $N_j \leq M^2/n$. *При этом справедлива оценка*

$$\|l_N \mid \widetilde{H}^s(Q)^*\| \leq \frac{1}{(2\pi)^s} \left\{ \sum_{k=J(M)}^{\infty} \frac{r_n(N_k)}{N_k^s} \right\}^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j| \right). \quad (41)$$

Ряд в правой части (41) *сходится при* $s > n/2$.

Доказательство. Рассмотрим по отдельности каждое из слагаемых в правой части равенства (40), т. е. тригонометрические полиномы

$$\widetilde{G}_k^{(n)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2s} N_k^s} \sum_{|\beta|^2=N_k} e^{i2\pi\beta x}.$$

При фиксированном $k \geq 1$ степень тригонометрического полинома $\widetilde{G}_k^{(n)}(x)$ задается равенством

$$d_k = \max\{\beta_1 + \dots + \beta_n \mid \beta_j \geq 0, |\beta|^2 = N_k\}.$$

По неравенству Коши — Буняковского имеем $\beta_1 + \dots + \beta_n \leq \sqrt{n}|\beta|$, и поэтому $d_k \leq \sqrt{nN_k}$.

Пограничный индекс $J(M)$ определен так, что $N_{J(M)} \leq M^2/n$. Следовательно, при $k < J(M)$ справедливо неравенство $d_k < \sqrt{nN_{J(M)}} \leq M$, или $d_k \leq M-1$. По этой причине и в силу точности кубатурной формулы $(1')$ на тригонометрических полиномах до степени $M-1$ включительно, а также с учетом соотношений

$$\int\limits_Q \widetilde{G}_k^{(n)}(x - x^{(j)})\,dx = 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

имеем при $1 \leq k < J(M)$ следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^N c_i \widetilde{G}_k^{(n)}(x^{(i)} - x^{(j)}) = -\big(l_N, \widetilde{G}_k^{(n)}(x - x^{(j)})\big) = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Пользуясь ими, а также определением $(34')$ периодической функции Грина, получаем $(l_N, \widetilde{G}(x - x^{(j)})) = (l_N, \widetilde{G}_M(x - x^{(j)}))$. Подсталяя эти соотношения в представление (36) нормы функционала погрешности, имеем

$$\|l_N \mid \widetilde{H}^s(Q)^*\|^2 = -\sum_{j=1}^N c_j (l_N, \widetilde{G}_M(x - x^{(j)})).$$

Учитывая еще определение функционала погрешности l_N, приходим к искомому соотношению (39). Подставив (40) в (39), находим

$$\|l_N \mid \widetilde{H}^s(Q)^*\|^2 = \sum_{k=J(M)}^\infty \sum_{i,j=1}^N c_i c_j \widetilde{G}_k^{(n)}(x^{(i)} - x^{(j)}).$$

Учитывая, что $|e^{i2\pi\beta x}| \leq 1$, оценим каждое из слагаемых $\widetilde{G}_k^{(n)}(x)$ следующим образом: $\big|\widetilde{G}_k^{(n)}(x)\big| \leq \frac{r_n(N_k)}{(2\pi)^{2s}N_k^s}$. Подставляя эти оценки в предыдущее равенство, в итоге получим

$$\|l_N \mid \widetilde{H}^s(Q)^*\|^2 \leq \sum_{k=J(M)}^\infty \frac{r_n(N_k)}{(2\pi)^{2s}N_k^s} \sum_{i,j=1}^N |c_i c_j|$$
$$= \left\{\frac{1}{(2\pi)^{2s}} \sum_{k=J(M)}^\infty \frac{r_n(N_k)}{N_k^s}\right\} \left(\sum_{i=1}^N |c_i|\right)^2.$$

Это и есть искомая оценка (41). Сходимость при $s > n/2$ ряда в правой части (41) вытекает из сходимости соответствующего ряда в (23). $\square$

Для кубатурной формулы $(1')$ с положительными весами оценка (41) упрощается. В этом случае $\sum\limits_{j=1}^N |c_j| = \sum\limits_{j=1}^N c_j = 1$, а норма функционала погрешности оценивается следующим образом:

$$\|l_N \mid \widetilde{H}^s(Q)^*\| \leq \left\{\sum_{k=J(M)}^\infty \frac{r_n(N_k)}{(2\pi)^{2s}N_k^s}\right\}^{1/2} = \{\widetilde{G}_M(0)\}^{1/2}.$$

Эта же оценка, в частности, справедлива для кубатурной формулы ($1'$) с равными весами.

Применим полученную оценку практической погрешности к конкретной последовательности кубатурных формул на кубе Q. Для заданного числа узлов N рассмотрим на функциях из $\widetilde{H}^s(Q)$ кубатурную формулу, получаемую как прямое произведение квадратурных формул прямоугольников, построенных для отрезков $0 \le x_j \le 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Каждый из сомножителей в этом прямом произведении имеет равномерное распределение узлов с шагом h, где $1/h$ — натуральное число, и равные веса. Левый край отрезка принадлежит множеству узлов, в то время как правый край $x_j = 1$ узлом не является. Соответствующий функционал погрешности задается равенством

$$\left(l_{1,N}^Q, \varphi\right) = \int\limits_Q \varphi(x)\, dx - h^n \sum_{h\gamma \in Q} \varphi(h\gamma),$$

где $\gamma \in \mathbb{Z}^n$. Шаг решетки h и число узлов N рассматриваемого прямого произведения связаны между собой соотношением $Nh^n = 1$. Веса кубатурной формулы равны и дают в сумме единицу: $\sum\limits_{k=1}^{N} |c_k| = h^n \sum\limits_{h\gamma \in Q} 1 = 1$.

Квадрат нормы соответствующего многомерной формуле прямоугольников функционала погрешности $l_{1,N}^Q$ выражается через шаг h решетки узлов с помощью равенства (37), в соответствии с которым

$$\left\| l_{1,N}^Q \mid \widetilde{H}^s(Q) \right\|^2 = h^{2s} \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}} = N^{-\frac{2s}{n}} \left(\left(\widetilde{A}_n^s\right)^2 - 1 \right).$$

Здесь $\widetilde{A}_n^s$ — константа вложения (23).

Таким образом, в случае периодических пространств Соболева $\widetilde{H}^s(Q)$ и функционала погрешности $l_{1,N}^Q$ с числом узлов $N \le 1/\varepsilon_1$ оценка практической погрешности (38) принимает следующий вид:

$$|M_Q(\varphi) - (\widetilde{\Sigma}_N, \varphi)| \le N^{-\frac{s}{n}} \left(\left(\widetilde{A}_n^s\right)^2 - 1 \right)^{1/2} + 4N\widetilde{A}_n^s \cdot \varepsilon_1. \tag{42}$$

По условию число узлов N является степенью натурального числа $N_1 = 1/h$, точнее $N = N_1^n$. Учитывая это, а также пользуясь оценкой $\left(\left(\widetilde{A}_n^s\right)^2 - 1 \right)^{1/2} \le \widetilde{A}_n^s$, из (42) получаем

$$|M_Q(\varphi) - (\widetilde{\Sigma}_N, \varphi)| \le \widetilde{A}_n^s \left(N_1^{-s} + 4N_1^n \cdot \varepsilon_1 \right). \tag{43}$$

Сомножитель в скобках в правой части этого неравенства представляет собой значение в точке $x = N_1$ функции $f(x) = 1/x^s + 4\varepsilon_1 x^n$, где $\mu = s/n > 1/2$. При $x > 0$ функция $f(x)$ сначала монотонно убывает, достигая своего минимального значения при некотором $x = x_{\mathrm{opt}}$, а затем, при $x > x_{\mathrm{opt}}$ она же монотонно и неограниченно возрастает. Как несложно подсчитать, $x_{\mathrm{opt}}^n = \left(\frac{\mu}{4\varepsilon_1}\right)^{1/(\mu+1)}$.

Таким образом, с точки зрения минимизации практической погрешности на единичном шаре пространства $\widetilde{H}^s(Q)$, $s > n/2$, оптимальным среди функционалов $l_{1,N}^Q$ является тот, для которого $N = N_* = N_{1,*}^n$, где $N_{1,*}$ — это целая часть числа x_{opt}.

Из оценки (43) при $N = N_*$ следует соотношение

$$|M_Q(\varphi) - (\widetilde{\Sigma}_{N_*}, \varphi)| \le 2\widetilde{A}_n^s (1+\mu) \left(\frac{4\varepsilon_1}{\mu} \right)^{\frac{\mu}{\mu+1}} = 8\widetilde{A}_n^s \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) \varepsilon_1 x_{\mathrm{opt}}^n. \tag{44}$$

Таблица 2. Число узлов $N_* = N_*(s,n)$ при $\varepsilon_1 = 2^{-53}$

s	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=6$
1	$0.47453132 * 10^8$			
1.5	$0.12332080 * 10^7$	$0.502880625 * 10^9$		
2	$0.16514000 * 10^6$	$0.474445440 * 10^8$		
2.5	$0.25949000 * 10^5$	$0.734952100 * 10^7$	$0.213847192 * 10^9$	
3	$0.90650000 * 10^4$	$0.162562500 * 10^7$	$0.474379280 * 10^8$	
3.5	$0.29220000 * 10^4$	$0.467856000 * 10^6$	$0.129778750 * 10^8$	$0.3518743761 * 10^{10}$
4	$0.15520000 * 10^4$	$0.164836000 * 10^6$	$0.425152800 * 10^7$	$0.1073741824 * 10^{10}$
4.5	$0.71600000 * 10^3$	$0.676000000 * 10^5$	$0.160161300 * 10^7$	$0.4818903040 * 10^9$
5	$0.47300000 * 10^3$	$0.313290000 * 10^5$	$0.681472000 * 10^6$	$0.1911029760 * 10^9$
5.5	$0.33200000 * 10^3$	$0.161290000 * 10^5$	$0.314432000 * 10^6$	$0.8576612100 * 10^8$

Оценка (44) практической погрешности многомерной формулы прямоугольников универсальна по отношению к размерности n и гладкости s класса. Для любой функции φ из единичного шара пространства $\widetilde{H}^s(Q)$ числовые значения интеграла $\int\limits_Q \varphi(x)\,dx$ и вычисленной на компьютере кубатурной суммы прямоугольников с шагом сетки $h_* = 1/N_{1,*}$ могут отличаться друг от друга на слагаемое того же порядка, что и числовое выражение в правой части (44). К примеру, как видно из табл. 1, 2, при $n = 6$ и $s = 5.5$ сомножитель перед форматной константой в (44) не превосходит $16 * 10^8$. Если вычисление кубатурной суммы на компьютере производилось с двойной точностью, т. е. при $\varepsilon_1 = 2^{-53}$, то числовые значения интеграла и вычисленной кубатурной суммы совпадают вплоть до шестого десятичного знака после запятой включительно. В этом случае можно утверждать, что рассматриваемая кубатурная формула гарантирует точность до шести десятичных знаков после запятой.

Конечно, при выполнении конкретных расчетов для индивидуальных функций из единичного шара пространства $\widetilde{H}^s(Q)$ практическая погрешность может, во-первых, оказаться меньше, чем это гарантируется оценкой (44), и, во-вторых, эта меньшая практическая погрешность может достигаться при числе узлов формулы, отличном от параметра N_*. Однако получить в этом случае улучшенные априорные оценки практической погрешности возможно лишь с привлечением существенно большей информации о подынтегральной функции, нежели просто условие ее принадлежности единичному шару пространства $\widetilde{H}^s(Q)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л., Васкевич В. Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1996.
2. *Triebel H.* Sampling numbers and embedding constants // Тр. МИ РАН. 2005. V. 248. P. 275–284.
3. *Васкевич В. Л.* Константы вложения периодических пространств Соболева дробного порядка // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1019–1027.
4. *Васкевич В. Л.* Константы и функции вложения пространств соболевского типа на единичной сфере // Докл. АН. 2010. Т. 433, № 4. С. 441–446.
5. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
6. *Мысовских И. П.* Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
7. *Васкевич В. Л.* Погрешность, обусловленность и гарантированная точность многомерных сферических кубатур // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1245–1262.

8. *Васкевич В. Л.* О возмущениях погрешности при малых шевелениях весов кубатурной формулы // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11. Спец. выпуск. С. 19–26.

9. *Васкевич В. Л.* Критерий гарантированной точности вычисления многомерных интегралов // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9. Спец. выпуск. С. 44–49.

10. *Годунов С. К., Антонов А. Г., Кирилюк О. П., Костин В. И.* Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука, 1988.

11. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.

12. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001.

13. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2002.

14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967.

15. *Crandall R.* Fast evaluation of Epstein zeta functions. Manuscript, at http://people.reed.edu/ crandell/papers/epstein.pdf. 1998, pp. 1–11.

16. *Половинкин В. И.* Последовательности функционалов с пограничным слоем // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 2. С. 413–429.

17. *Носков М. И., Schmid H. J.* Кубатурные формулы высокой тригонометрической точности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 5. С. 786–795.

Статья поступила 11 июля 2014 г.

Васкевич Владимир Леонтьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vask@math.nsc.ru