Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2014. Том 55, № 5

УДК 514.74

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕИЗГИБАЕМЫХ МНОГОГРАННИКОВ

И. Х. Сабитов

Аннотация. Рассматривается класс многогранников, который мы называем пирамидами, и доказывается, что при некоторых простых, но довольно общих условиях на внешнее строение пирамиды неизгибаемы, причем это свойство неизгибаемости при соответствующих предположениях можно установить и в многомерных пространствах произвольной постоянной кривизны.

Ключевые слова: пирамида, главные вершины, существование, топологический род, условие на внешнее строение, изгибаемость, неизгибаемость

Посвящается глубокоуважаемому
Юрию Григорьевичу Решетняку
с благодарностью за внимание
и в связи с юбилеем

§ 1. Постановка задачи

Многогранник P называется *изгибаемым*, если он допускает непрерывную деформацию, в ходе которой изменяется по крайней мере один его двугранный угол, а каждая грань остается конгруэнтной соответствующей исходной грани, т. е. грани в ходе изгибания могут двигаться только как абсолютно твердые пластинки. Если многогранник не допускает изгибаний, то он называется *неизгибаемым*. Вопрос об изгибаемости/неизгибаемости данного многогранника является одним из главных вопросов метрической теории многогранников. Известен классический результат Лежандра — Коши (1813), что любой выпуклый многогранник неизгибаем. Другие классы неизгибаемых многогранников были найдены сравнительно недавно и притом в весьма малом числе, и почти для всех этих классов в той или иной форме участвует требование выпуклости (см., например, [1–7]). Установлено, что почти все многогранники неизгибаемы (см. [8, 9]), тем не менее предъявление конкретных примеров неизгибаемых многогранников, тем более классов таких многогранников, не является простой задачей (ситуация здесь схожа с указанием конкретных примеров неалгебраических чисел: известно, что почти все числа являются неалгебраическими, но установление неалгебраичности данного числа обычно требует больших усилий). Тем самым задача нахождения новых классов неизгибаемых многогранников актуальна и интересна. Мы установим неизгибаемость класса многогранников, названных нами пирамидами, причем распространим этот результат на многогранники аналогичного строения и в многомерном случае, включая сферические и гиперболические пространства.

§ 2. Пирамиды

Пирамидой будем называть многогранник, у которого есть вершина, соединенная ребрами со всеми остальными вершинами. Это определение относится к комбинаторному строению многогранника и поэтому оно не зависит ни от размерности, ни от кривизны окружающего пространства.

Для пирамиды с k вершинами любую его вершину индекса $k-1$ назовем *главной*. Допускается, что пирамида имеет много главных вершин, например, у тетраэдра все его вершины главные. Мы используем определение многогранника из [9]. В трехмерном пространстве пирамиды представляем как образы триангулированного многообразия (так что грани ее треугольные); для пространств размерности $n>3$ пирамиды тоже считаем симплициальными многогранниками, но предполагаем, что они являются образами *псевдомногообразия* (это значит, что к каждой $(n-2)$-мерной грани примыкают ровно две $(n-1)$-мерные гиперграни).

Прежде чем доказывать, что при выполнении некоторых требований к их внешнему строению пирамиды неизгибаемы, установим их существование в $\mathbb{R}^3$ в любом топологическом классе как в ориентируемом, так и в неориентируемом случаях. Приведем явное построение таких пирамид (рис. 1).

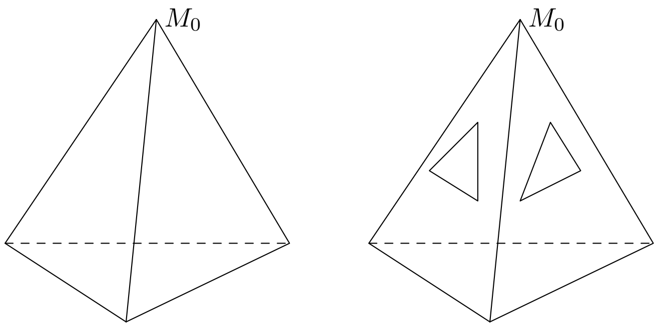

Рис. 1.

Сначала на двух боковых гранях треугольной пирамиды вырезаем по треугольнику. Затем соединяем два отверстия «тоннелем» и проведем триангуляцию так, чтобы все вершины оказались соединенными с вершиной M_0. Четырехугольные стенки «тоннеля» могут быть неплоскими, но это несущественно, потому что каждую из них разобьем на два треугольника, которые и будут треугольными гранями искомой пирамиды (рис. 2, во избежание загромождения рисунка триангуляция внутри «тоннеля» не показана).

Получилась вложенная пирамида топологического рода $g=1$. Конечно, можно сдвинуть добавленные вершины на боковых гранях таким образом, чтобы они не располагались на плоскостях граней и давали пирамиду «менее тривиальную» по внешнему виду, в том числе и невыпуклую. Очевидно, таким построением с использованием пар отверстий на двух гранях можно получить пирамиду любого рода g с $n=6g+4$ вершинами. Располагая удаляемые треугольники некоторым специальным образом (например, совмещая одну из вершин с вершиной основания исходной треугольной пирамиды), число вершин n можно уменьшить, но возникает вопрос: до каких значений? Как заметил С. А. Лавренченко, этот вопрос интересен в связи с классической задачей об

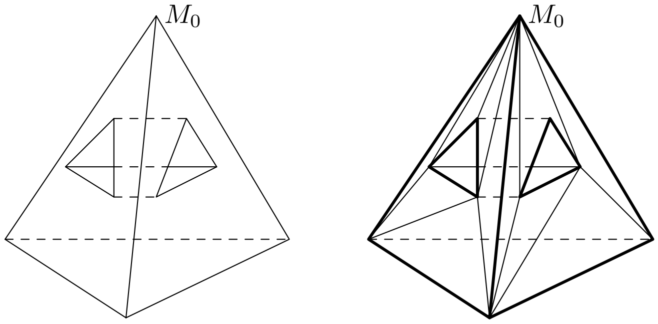

Рис. 2.

определении максимально возможного рода многогранника с n вершинами[1]. Известный результат из [11] дает для вложенных многогранников асимптотическую оценку $g_{\max} = O(n \ln n)$. Если задачу сузить, предположив, что рассматриваются только пирамидальные многогранники, то, по-видимому, получится оценка $g = O(n)$.

Замечание 1. Так как неориентируемые многогранники обязательно имеют самопересечения, для них и вообще для всех остальных тоже можно ставить аналогичный вопрос, предполагая многогранники *погруженными*.

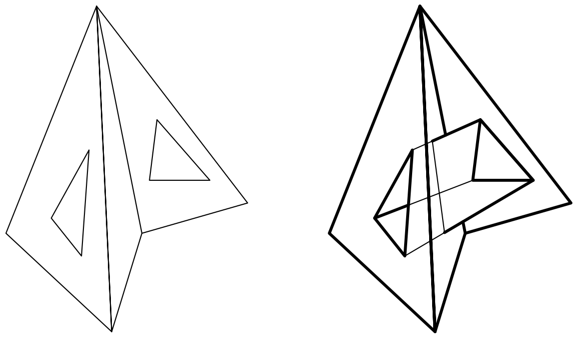

Рис. 3.

Покажем, как построить неориентируемые пирамиды. На двух несоседних гранях невыпуклой четырехугольной пирамиды вырежем два треугольных отверстия и соединим их «тоннелем», который пересечет грань пирамиды между отверстиями (рис. 3). Очевидно, что получился погруженный неориентируемый многогранник, который, как и положено, имеет самопересечения. Вычислим его эйлерову характеристику χ. Имеем 11 вершин, 33 ребра и 22 грани. Значит, $\chi = 0$.

Вышеуказанный способ построения неориентируемых пирамид дает погруженные неориентируемые пирамиды с минимальным числом вершин, равным 11. В данном случае это построение бутылки Клейна с использованием одного «туннеля» в четырехугольной пирамиде. В [12] приведена конструкция погружения бутылки Клейна в виде пирамиды с 9 вершинами, причем там же

[1] В [10] даны хороший обзор и новые результаты по этой тематике.

показано, что погружений бутылки Клейна меньше чем с 9 вершинами не существует вообще, а не только в виде пирамиды. Но пирамидальные триангуляции абстрактной бутылки Клейна существуют и для 8 вершин, их можно найти в той же работе [12], а еще ранее они были найдены в [13] (триангуляций бутылки Клейна меньше чем с 8 вершинами не бывает). С учетом пирамиды, построенной в [12], используя «туннели», можно построить погруженные неориентируемые пирамиды данного рода с меньшим числом вершин, чем это сделано первоначально у нас, когда отправной базой была невыпуклая четырехугольная пирамида.

Рассмотрим вопрос о возможности построения пирамид, гомеоморфных проективной плоскости. Известна формула

$$n_{\min} = \left]\frac{7+\sqrt{49-24\chi}}{2}\right[, \tag{1}$$

дающая значение наименьшего количества вершин для триангуляций многообразия с данной эйлеровой характеристикой χ, где $]a[$ обозначает наименьшее целое число, не меньшее чем a, см. [14] (исключения составляют бутылка Клейна, неориентируемое многообразие с эйлеровой характеристикой $\chi = -1$ и ориентируемое многообразие рода $g = 2$ («крендель») — для них к указанному значению $n_{\min}$ надо добавить 1). Для проективной плоскости формула (1) дает значение $n_{\min} = 6$. Известен один классический многогранник с шестью вершинами, гомеоморфный проективной плоскости, это гептаэдр, подробно описанный в [15]. Изменим структуру его граней таким образом, чтобы измененный многогранник оказался пирамидой.

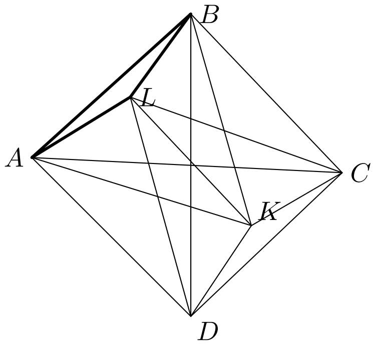

Рис. 4.

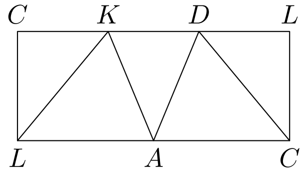

Рис. 5.

Для этого обратимся к рис. 4. За его основу взят рисунок гептаэдра из [15] с сохранением обозначений вершин. Но для получения пирамиды, представляющей собой геометрическую реализацию триангуляции проективной плоскости с шестью вершинами, разобьем каждую из четырех упоминаемых там квадратных граней на два треугольника. Таким образом, рис. 4 изображает одномерный каркас (или остов) симплициальной пирамиды с пятью «боковыми» гранями BKD, BDL, BLA, BAC и BCK, представляющими звезду главной вершины B (впрочем, в данном случае все вершины главные) и пятью гранями CKL, KLA, KAD, ADC и DCL, образующими ленту Мёбиуса, прообраз которой схематически изображен на рис. 5. Отметим, что это геометрическое представление проективной плоскости в виде многогранника не является ее погружением в $\mathbb{R}^3$ (а вложение неориентируемого многообразия в $\mathbb{R}^3$ заведомо невозможно). В погруженном многограннике замыкание звезды каждой вершины должно быть вложением, т. е. каждая звезда, включая ее край, не должна иметь самопересечений. В нашем случае за счет выбора положения вершины L (взяв ее не «за» плоскостью грани BAC, а «впереди» нее, ближе к зрителю) можно добиться, чтобы звезда вершины B была вложенной вместе с краем, но избежать наличия самопересечений во всех звездах вершин ленты Мёбиуса не удастся (хотя бы в силу теоремы из [16], утверждающей, что триангуляции проективной плоскости с числом вершин меньше 9 не допускают погружения в $\mathbb{R}^3$). С. А. Лавренченко обратил внимание на то, что предложенный автором статьи способ получения неориентированных пирамид с использованием «тоннелей» всегда приводит к построению таких пирамид только с четной эйлеровой характеристикой, и после наших совместных безуспешных попыток построения погружения проективной плоскости в виде пирамиды он высказал гипотезу, что вообще для любой пирамидальной триангуляции многообразия с нечетной эйлеровой характеристикой не существует соответствующего пирамидального погружения в $\mathbb{R}^3$ (см. [17]).

По поводу комбинаторного и пространственного строения пирамид можно поставить следующие вопросы.

1. Для каждого значения эйлеровой характеристики χ существует минимальная (по числу вершин) триангуляция, число вершин которой определяется формулой (1). Вопрос: является ли каждая такая триангуляция пирамидальной? Если нет, то существует ли среди минимальных триангуляций пирамидальная? Если нет, то каково число вершин в минимальной пирамидальной триангуляции многообразия с данной эйлеровой характеристикой и характером ориентируемости?

2. Известно, что для многообразий некоторых родов существуют минимальные триангуляции, ребра которых составляют полный граф (следовательно, они являются пирамидальными) и которые не реализуются в $\mathbb{R}^3$ как вложенные многогранники. В пространстве какой размерности они имеют геометрическую реализацию в виде погруженной или вложенной пирамиды?

3. Каково наименьшее число вершин для пирамиды (погруженной или вложенной) данного топологического строения в $\mathbb{R}^3$?

4. Как описать пирамиды с нетреугольными гранями? (Имеется в виду, что грани жесткие, поэтому вместо длин ребер, как в симплициальном случае, в общем случае можно говорить о расстояниях между вершинами одной грани, а в случае выпуклости граней — и о дополнительных ребрах, к которым примыкают грани, лежащие на одной плоскости.)

5. Что можно сказать о пирамидальных триангуляциях многомерных многообразий и о пирамидах в многомерных пространствах? Например, каковы оценки числа гиперграней, инцидентных главной вершине пирамиды?

6. Имеют ли пирамидальные графы какие-либо специальные свойства или приложения (например, в теории управления)?

Замечание 2. Пирамиды как некоторый специальный класс многогранников, интересный в теории изгибаний, были, по-видимому, впервые введены в [18]. Они же, как ориентируемые, так и неориентируемые, были предметом докладов автора на нескольких конференциях.

§ 3. Неизгибаемость пирамид

Среди всех геометрических реализаций в $\mathbb{R}^3$ некоторой данной пирамидальной триангуляции выберем те, которые обладают следующим свойством. Пусть над каждым ребром пирамиды построен треугольник с вершиной в главной вершине пирамиды. Тогда будем предполагать, что все эти треугольники невырожденные (если главных вершин несколько, то предполагаем, что среди них есть по крайней мере одна, для которой выполнено указанное свойство). Пирамиды в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющие этим условиям, будем называть *пирамидами класса A*.

Замечание 3. Заметим, что

1) пирамида класса A не может иметь вырожденные ребра;

2) построенные таким образом треугольники вовсе не обязаны быть гранями, более того, некоторые из них обязательно не будут гранями, если пирамида не является тетраэдром;

3) достаточным условием выполнения этого свойства является требование, что выбранная главная вершина не лежит на одной прямой ни с какой парой других вершин;

4) грани пирамид класса A, инцидентные выбранной главной вершине, являются невырожденными, в то время как некоторые остальные (или даже, может быть, все остальные) грани могут быть вырожденными.

Теорема 1. *Любая симплициальная пирамида в $\mathbb{R}^3$ класса A неизгибаема.*

Доказательство. Обозначим выбранную главную вершину данной пирамиды через O. Выберем произвольную вершину $M \neq O$ и во избежание рассмотрения тривиальных изгибаний зафиксируем в пространстве треугольник Δ, содержащий главную вершину O, взятую вершину M и некоторое ребро, исходящее из M и отличное от ребра MO. Утверждаем, что все вершины края Γ звезды S_M вершины M могут иметь не более чем конечное число положений. Пусть индекс вершины M равен n. Пусть выбранное для фиксированного треугольника Δ ребро, исходящее из вершины M, идет к вершине, которую обозначим через M_1. Пронумеруем вершины многоугольника Γ в некотором циклическом порядке начиная с M_1. Вершина O принадлежит Γ (так как к имеющемуся ребру MO должны примыкать две грани, инцидентные M), и она получит некоторый номер i, $2 \leq i \leq n$. Пусть $i > 2$. Тогда вершина M_2 при данных положениях точек M_1, M и O может иметь не более двух позиций, так как она находится от вершин невырожденного треугольника M_1MO на известных расстояниях, равных длинам ребер M_2M_1, M_2M и M_2O (о такой ситуации говорят, что вершина M_2 *опирается на невырожденный базовый треугольник*). Продолжая аналогичные рассуждения последовательно с вершинами M_3 и т. д. до M_{i-1}, по отношению к этим точкам получаем требуемое утверждение. Для вершин с номерами $i+1, \dots, n$ такие же рассмотрения начинаем с вершины M_n, идем до вершины M_{i+1} и таким образом приходим к справедливости этого утверждения для всех вершин звезды S_M. Так же поступаем, т. е. начинаем с вершины M_n и идем дальше к M_{n-1} и т. д., если $i = 2$.

Рассмотрим произвольную вершину N, не принадлежащую звезде вершины M. Она входит в число вершин края C звезды главной вершины, поэтому вершины M и N как вершины многоугольника C можно соединить некоторой ломаной L, состоящей из части ребер многоугольника C. Обозначим последовательно вершины этой ломаной начиная с M через $A_1 = M, A_2, \dots, A_k = N$. Пусть во всех звездах вершин с номерами $A_1, \dots, A_{j-1}$ вершины пирамиды имеют известные положения. Ребро $A_{j-1}A_j$ входит в звезду вершины A_j и одновременно в звезду вершины A_{j-1}, поэтому треугольник $OA_{j-1}A_j$ имеет вершины с известными положениями. Тогда, как и при рассмотрении звезды вершины M, заключаем, что в звезде вершины A_j все вершины могут иметь только конечное число позиций. Следовательно, все вершины пирамиды при данных длинах ребер могут иметь только конечное число возможных положений, и потому непрерывных деформаций в виде нетривиального изгибания не существует. Теорема доказана.

Следствие 1. *Любая погруженная в $\mathbb{R}^3$ пирамида неизгибаема.*

Доказательство. Пусть существует погруженная пирамида с вершиной O, не принадлежащая классу A. Значит, есть некоторое ребро такое, что треугольник с основанием на этом ребре и с вершиной в O является вырожденным. Пусть A и B — вершины этого ребра. Тогда точки O, A, B лежат на одной прямой. Они не могут располагаться на одном луче, исходящем из O, так как иначе звезда вершины O не будет вложенной. Точно по такой же причине они не могут располагаться на луче, исходящем из A или B. Значит, любая погруженная пирамида принадлежит классу A, поэтому она неизгибаема.

Замечание 4. Существуют и изгибаемые пирамиды. В [19] изучено строение гомеоморфных сфере изгибаемых пирамид с двумя главными вершинами и дано описание их изгибаний.

§ 4. Неизгибаемые пирамиды в многомерном евклидовом пространстве

В многомерном евклидовом пространстве размерности $n > 3$ назовем *пирамидами класса A* пирамиды, удовлетворяющие следующим условиям.

1. Они являются образами отображения в $\mathbb{R}^n$ пирамидального симплициального $(n-1)$-мерного псевдомногообразия M (это значит, что к каждой $(n-2)$-мерной грани примыкают ровно две $(n-1)$-мерные грани и что любые две $(n-1)$-мерные грани можно соединить цепочкой $(n-1)$-мерных граней с прилеганием каждой соседней пары по общей $(n-2)$-мерной грани).

2. Пусть O — главная вершина пирамиды P. Пусть $\langle M_{i_1} \dots M_{i_{n-1}} \rangle$ — произвольная $(n-2)$-мерная грань пирамиды, не инцидентная главной вершине. Тогда предполагается, что $(n-1)$-мерный симплекс с вершинами $O, M_{i_1}, \dots, M_{i_{n-1}}$ не является вырожденным, т. е. его $(n-1)$-мерный объем не равен нулю.

Теорема 2. *Любая симплициальная пирамида в $\mathbb{R}^n$ класса A неизгибаема.*

Доказательство. Составим список всех $(n-2)$-мерных граней, составляющих край звезды главной вершины O, который обозначим через $\partial St(O)$. Во избежание тривиальных деформаций зафиксируем одну из $(n-1)$-мерных граней звезды $St(O)$. Пусть это симплекс $\langle OM_{i_1} \dots M_{i_{n-1}} \rangle$. Пусть к его $(n-2)$-мерной грани $\langle M_{i_1} \dots M_{i_{n-1}} \rangle$ примыкает $(n-1)$-мерный симплекс $T_1 = \langle A_1 M_{i_1} \dots M_{i_{n-1}} \rangle$. У этого симплекса n граничных гиперграней размерности $n-2$. Если все они входят в список граней из $\partial St(O)$, то к T_1 нельзя приклеить новую $(n-1)$-мерную грань и вся пирамида сводится к объединению $St(O) \cup T_1$ и представляет собой n-мерный симплекс, который, конечно, не изгибается. Пусть в ∂T_1 есть «свободные» $(n-2)$-мерные грани. Тогда по определению класса A к каждой свободной грани можно приклеить некоторый $(n-1)$-мерный симплекс (при этом какие-то приклеиваемые симплексы могут совпадать). Каждый приклеиваемый симплекс имеет новую вершину, не входящую в T_1. Для каждого симплекса эта новая вершина может иметь только два положения, так как она находится на известных расстояниях (равных длинам ребер) от n вершин — от вершины O н от $n-1$ вершин того граничного $(n-2)$-мерного симплекса из $\partial St(T)$, к которому он приклеен, а эти n вершин составляют по условию 2 определения класса A невырожденный $(n-1)$-мерный симплекс. Обозначим совокупность приклеенных $(n-1)$-мерных симплексов вместе с T_1 через T_2. С этой совокупностью можно провести те же самые рассуждения. Если все $(n-2)$-мерные симплексы на ее границе входят в список симплексов из $\partial St(O)$, то исчерпаны все $(n-1)$-мерные симплексы, иначе останутся $(n-1)$-мерные симплексы, от которых нельзя перейти к симплексам из T_2 цепочкой склеиваемых по $(n-2)$-мерным общим граням. Если есть «свободные» граничные $(n-2)$-мерные симплексы, то проводим предыдущее построение и новые добавляемые вершины смогут иметь только дискретный набор возможных расположений. Повторяя этот процесс конечное число раз, в конце концов исчерпаем все гиперграни пирамиды, имея конечное число возможных положений ее вершин. Теорема доказана.

Следствие 2. *В n-мерном евклидовом пространстве погруженная пирамида, являющаяся погружением $(n-1)$-мерного симплициального многообразия, неизгибаема.*

§ 5. Пирамиды в пространствах ненулевой постоянной кривизны

Комбинаторные свойства пирамид не зависят от значения кривизны пространства. Далее, ключевым аргументом в доказательстве теорем 1 и 2 был факт, что при известных расстояниях от рассматриваемой точки до вершин невырожденного базового $(n-1)$-мерного симплекса точка может иметь лишь два возможных положения. Значит, для случая гиперболического пространства предыдущие теоремы верны без всяких дополнительных условий, а в случае сферического пространства кривизны $K = 1$ нужно предположить, что нет двух длин, равных $\pi/2$.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность С. А. Лавренченко за внимание к работе и помощь в предоставлении информации по литературе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stoker J. J.* Geometrical problems concerning polyhedra in the large // Comm. Pure Appl. Math. 1968. V. 21, N 2. P. 119–168.

2. *Коннелли Р.* Об одном подходе к проблеме неизгибаемости // Исследования по метрической теории поверхностей. Сер. Новое в зарубежной науке (под ред. А. Н. Колмогорова и С. П. Новикова). М.: Мир, 1980. Вып. 18. С. 164–209.

3. *Connelly R.* The rigidity of certain cabled frameworks and the second order rigidity of arbitrarily triangulated convex surfaces // Adv. Math. 1980. V. 37, N 3. P. 272–299.

4. *Kann E.* Infinitesimal rigidity of almost-convex oriented olyhedra of arbitrary Euler characteristic // Pac. J. Math. 1990. V. 144, N 1. P. 71–103.

5. *Долбилин Н. П., Штанько М. А., Штогрин М. И.* О неизгибаемости полиэдральных сфер с четноугольными гранями // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 3. С. 197–198.

6. *Долбилин Н. П., Штанько М. А., Штогрин М. И.* Неизгибаемость квадрильяжа тора // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, № 4. С. 167–168.

7. *Rodrigues L., Rosenberg H.* Rigidity of Certain polyhedra in $\mathbb{R}^3$ // Comment. Math. Helvetici. 2000. V. 75, N 3. P. 478–503.

8. *Gluck H.* Almost all simply connected closed surfaces are rigid // Исследования по метрической теории поверхностей. Сер. Новое в зарубежной науке (под ред. А. Н. Колмогорова и С. П. Новикова). М.: Мир, 1980. Вып. 18. P. 148–163.

9. *Сабитов И. Х.* Алгоритмическое решение проблемы изометрической реализации многогранных метрик // Изв. РАН. Сер. Математика. 2002. Т. 66, № 2. С. 159–172.

10. *Ziegler G. M.* Polyhedral surfaces of high genus // arXiv:math/0412093v1 [math.MG]. Dec. 5, 2004. p. 1–21.

11. *McMullen P., Schulz Ch., Wills J. M.* Polyhedral 2-manifolds in E^3 with unusually large genus // Israel J. Math. 1983. V. 46. P. 127–144.

12. *Chervone D.* Vertex-minimal simplicial immersions of the Klein bottle in three space // Geom. Dedicata. 1994. V. 50, N 2. P. 117–141.
13. *Lawrencenko S., Negami S.* Irreducible triangulations of the Klein bottle // J. Combin. Theory, Ser. B. 1997. V. 70. P. 265–291.
14. *Ringel G., Youngs J. W. T.* Lósung des Problems der Nachbargebiete auf orientierbaren Fáchen // Arch. Math. 1969. V. 20, N 2. P. 190–201.
15. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.
16. *Banchoff T. F.* Triple points and surgery of immersed surfaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. V. 46. P. 407–413.
17. *Lawrencenko S.* Geometric embeddings and immersions of pyramidal triangulations of surfaces in 3-space. Invited lecture at University of Seville, 19 March 2013 // http:// www.imus.us.es/actividad/1111.
18. *Сабитов И. Х.* Новые классы неизгибаемых многогранников // Тез. докл. Всесоюз. конф. по геометрии и анализу. Новосибирск, 1989. С. 72.
19. *Сабитов И. Х.* Описание изгибаний вырождающихся подвесок // Мат. заметки. 1983. Т. 33, № 6. С. 901–914.

Статья поступила 12 февраля 2014 г.

Сабитов Иджад Хакович
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, Москва 119992 ГСП-2
isabitov@mail.ru