Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2014. Том 55, № 5

УДК 517.55

РАСШИРЕНИЯ КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Л. С. Маергойз

Аннотация. Объект исследования — класс функций, голоморфных в многомерном торическом пространстве. В нем выделен подкласс функций, эквивалентных целым функциям в следующем смысле: функция g принадлежит этому подклассу, если существует мономиальное голоморфное отображение $\mathscr{F}$ такое, что $f = g \circ \mathscr{F}$ — целая функция. Дано полное описание функций рассматриваемого подкласса в терминах геометрических свойств носителей рядов, в которые они разлагаются. Для возникающих расширений класса целых функций многих переменных разработан подход к построению теории роста этих классов. В качестве приложения методов найден многомерный аналог разложения голоморфной функции в ряд Лорана.

Ключевые слова: целая функция многих переменных, расширение, характеристики роста, кратный ряд Лорана, носитель, строго выпуклый конус.

Посвящается Юрию Григорьевичу Решетняку
в связи с его 85-летним юбилеем

Естественным аналогом целых функций одной переменной являются функции, аналитические на сфере Римана, за исключением одной точки. Подобного аналога в случае нескольких переменных нельзя ожидать: аналитические функции многих переменных не имеют изолированных особенностей. Возможный подход к нахождению многомерного аналога этого результата «подсказывает» следующий вариант теоремы Адамара — Валирона.

Теорема A. *Пусть $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ — функция, голоморфная в торическом пространстве $\mathbb{T}^n = \mathbb{C}_-^n$, $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,*

$$M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z_k| = r_k,\ k = 1, \dots, n\}, \quad r \in \mathbb{R}_0^n,\ \mathbb{R}_0 = \{r > 0 : r \in \mathbb{R}\},$$

— ее модуль-максимум. Тогда $M_f(r)$ и $\ln M_f(r)$ — выпуклые функции от $\ln r_1, \dots, \ln r_n$.

В том случае, когда f — след на $\mathbb{T}^n$ целой функции, $M_f(r)$ — возрастающая функция по каждой переменной, в отличие, например, от функции Жуковского $f_0(z) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$, модуль-максимум которой достигает (глобального) минимума в некоторой точке $r_0 > 0$. Поэтому

$$V_f(u) = \ln M_f(e^{u_1}, \dots, e^{u_n}), \quad u \in \mathbb{R}^n, \tag{0.1}$$

— выпуклая функция с выпуклым конусом K_V направлений ее убывания, содержащим $\mathbb{R}_-^n$, где $\mathbb{R}_- = \{u \in \mathbb{R} : u \le 0\}$.

С другой стороны, если у заданной выпуклой функции $W(v)$, $v \in \mathbb{R}^n$, отличной от постоянной, конус K_W удовлетворяет условию $\dim K_W = n$, то существует невырожденное линейное отображение $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое, что

$V(u) := W(Au)$, $u \in \mathbb{R}^n$, — выпуклая функция, возрастающая по каждой переменной (см. теорему 1.9). Этот факт порождает гипотезу о существовании собственного подкласса $\mathscr{A}(\mathbb{T}_n)$ класса $H(\mathbb{T}_n)$ голоморфных в пространстве $\mathbb{T}^n$ функций, эквивалентных в следующем смысле целым функциям. Функция $g \in H(\mathbb{T}_n)$, $n > 1$, принадлежит $\mathscr{A}(\mathbb{T}_n)$, если существует мономиальное отображение

$$\mathscr{F} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n, \quad z = \mathscr{F}(w), \quad z_k = \prod_{j=1}^{n} w_j^{s_{kj}},\ k = 1, \dots, n, \tag{0.2}$$

где $\|s_{kj}\|$ — целочисленная невырожденная квадратная $(n \times n)$-матрица, такое, что функция $f(w) = [g \circ \mathscr{F}](w)$ допускает аналитическое продолжение $F(w)$ в $\mathbb{C}^n$ (т. е. F — целая функция).

Доказательство справедливости этой гипотезы, полученное в данной работе, открывает путь к построению теории роста расширений $H(\mathbb{T}^n)$ и $\mathscr{A}(\mathbb{T}^n)$ класса целых функций с помощью теории роста целых функций многих переменных (см. [1, 2]).

В § 1 содержатся вспомогательные сведения по выпуклому анализу, при этом утверждения, ссылки на которые автору не удалось найти, приведены с доказательствами. При изложении используется терминология из [3].

Опираясь на известный аналог леммы Абеля для кратных рядов Лорана, в § 2 систематически исследуем связь между асимптотикой коэффициентов этих рядов и областью их сходимости. В частности, доказываем аналог формулы Коши — Адамара для кратных рядов Лорана.

В § 3 излагаются основные результаты. Вводится понятие кратного ряда Лорана, эквивалентного степенному ряду (по аналогии со случаем целых функций, см. (0.2)), и дается критерий для описания такого ряда. В качестве приложения доказывается многомерный аналог разложения голоморфной функции в ряд Лорана. Полученные результаты позволяют разработать подход к развитию теории роста классов $\mathscr{A}(\mathbb{T}_n)$, $H(\mathbb{T}_n)$, $n > 1$. Вводятся асимптотические характеристики функций этих классов и исследуются их простейшие свойства. Заметим, что «элементарное» расширение целых функций, т. е. класс функций вида $\{f(z_1^{\varepsilon_1}, \dots, z_n^{\varepsilon_n}),\ \varepsilon_j = \pm 1,\ j = 1, \dots, n\}$, где $f \in H(\mathbb{C}^n)$ — целая функция, рассматривалось в [4].

Обозначения, принятые во введении, используются далее, как правило, без дополнительных ссылок.

Автор благодарен Н. Н. Осипову и А. К. Циху за предоставленную информацию о библиографии по теме статьи.

§ 1. Вспомогательный аппарат выпуклого анализа

В этом параграфе анонсируются известные результаты выпуклого анализа, а также излагаются (с доказательствами) новые факты этого раздела математики, необходимые для дальнейшего изложения (возможно, некоторые из них известны, но соответствующих ссылок в литературе автору не удалось найти).

1°. Асимптотические свойства неограниченных выпуклых множеств.

Теорема 1.1 [3, теоремы 8.1, 8.3]. *Пусть T — неограниченное замкнутое (открытое) выпуклое множество в $\mathbb{R}^m$, причем $\dim T = m$. Тогда*

1) *для каждой точки $x \in T$ существует луч L с вершиной в x, целиком расположенный в T;*

2) *если* Γ — *луч с вершиной в* 0 *и* $\Gamma + x \subset T$ *при некотором* $x \in T$, *то* $\Gamma + u \subset T$ *для всех* $u \in T$;

3) *в множестве всех конусов* $\{X,\ X \subset \mathbb{R}^m\}$ *с вершиной в* 0, *удовлетворяющих условию* $X + u \subset T$ *для любого* $u \in T$, *существует максимальный элемент* $A(T)$, *причем*

$$A(T) = \{u \in \mathbb{R}^n : T + u \subset T\}; \tag{1.1}$$

4) *если* T — *замкнутое выпуклое множество,* $S = \operatorname{int}\ T$, *то* $A(T) = A(S)$.

Определение 1.2. Пусть T — замкнутое (открытое) выпуклое множество в $\mathbb{R}^m$, причем $\dim T = m$. *Асимптотическим* (или *рецессивным*) *конусом* $A(T)$ множества T назовем конус $A(T)$, определяемый формулой (1.1).

Предложение 1.3 [3, теорема 8.2]. *Асимптотический конус* $A(T)$ *неограниченного замкнутого выпуклого множества* T — *замкнутый выпуклый конус, совпадающий с множеством принадлежащих* $\mathbb{R}^m$ *пределов всевозможных последовательностей вида*

$$\{\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots\},\ x_j \in T,\ \lambda_j > 0,\ j \in \mathbb{N}, \quad \lim_{j\to\infty} \lambda_j = 0.$$

Теорема 1.4. *Пусть* X — *замкнутое выпуклое множество в* $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{M}_X = \{K\}$ — *множество всех конусов с вершиной в* 0, *некоторый сдвиг каждого из которых содержит* X, $A(X)$ — *асимптотический конус множества* X. *Тогда*

$$A(X) = \Pi_X := \bigcap_{K \in \mathfrak{M}_X} K. \tag{1.2}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\dim X = n$. Пусть L_X — максимальное линейное подпространство $A(X)$.

1. Предположим, что $\dim L_X = 0$[1]. т. е. множества X и $A(X)$ не содержат прямых линий. Если X — ограниченное множество, то нетрудно показать, что $\Pi_X = \{0\}$ (см. (1.2)). С другой стороны, в этом случае $A(X) = \{0\}$, т. е. формула (1.2) верна.

Пусть X — неограниченное множество. Если $K \in \mathfrak{M}_X$, то $K \supset A(X) + y$ для любого $\in X$, т. е. в обозначениях (1.2) имеем

$$A(X) \subset \Pi_X. \tag{1.3}$$

Возьмем $y_0 \in A(X) \setminus \{0\}$. Согласно предположению при любом фиксированном $a \in X$ множеству X принадлежит лишь некоторая неограниченная часть

$$\Gamma_0 = \{y = a + ty_0 : t \ge t_0\} \tag{1.4}$$

прямой, содержащей этот луч. Найдется натуральное число $N > -t_0$ такое, что $a_j := a - jy_0 \notin X$ при $j \ge N$. Рассмотрим множество $\{I_j : j \ge N\}$ замкнутых выпуклых конусов с вершинами в точках $\{a_j,\ j \ge N\}$, порождаемых множеством X. Пусть $K_j = I_j - a_j,\ j \ge N$. Из (1.3) заключаем, что

$$A(X) \subset H_X := \bigcap_{j \ge N} K_j. \tag{1.5}$$

Поэтому для доказательства (1.2) достаточно установить, что $H_X \subset A(X)$.

[1] Число $\dim L_X$ названо в [3, § 8] *линейной размерностью* выпуклого множества X.

Множество K_j — замкнутый выпуклый конус с вершиной в 0, порождаемый множеством

$$T_j := X - a_j = X + jy_0 - a, \quad j \geq N. \tag{1.6}$$

Поскольку $y_0 \in A(X) \setminus \{0\}$, по теореме 1.1 $T_j \subset X - a$ при всех $j \geq N$. По теореме о строгой отделимости существует гиперплоскость $\{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, \alpha \rangle = c\}$ со свойством

$$\langle y, \alpha \rangle > c, \quad y \in X, \quad \langle a_N, \alpha \rangle < c, \quad |\alpha| = 1.$$

Отсюда, учитывая, что $\Gamma_0 \subset X$ (см. (1.4)), заключаем: $\langle y_0, \alpha \rangle > 0$. Тогда гиперплоскость

$$Q_j = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, \alpha \rangle = p_j := c + j\langle y_0, \alpha \rangle - \langle a, \alpha \rangle\}, \quad |\alpha| = 1, \tag{1.7}$$

строго отделяет множество T_j (см. (1.6)) и точку $(j-N)y_0$ для всех $j \geq N$. Так как $\langle y_0, \alpha \rangle > 0$, из (1.7) имеем $p_j > 0$ при $j > j_0 \geq N$. Следовательно, соотношение (1.7) — нормальное уравнение гиперплоскости Q_j при $j > j_0$. Заметим, что $T_{j+1} \subset T_j$, $j \geq N$. Поэтому (см. (1.5))

$$K_{j+1} \subset K_j, \ j \geq N, \quad H_X = \bigcap_{j > j_0} K_j.$$

Пусть $x \in H_X \setminus \{0\}$. Тогда

$$x = \lambda_j x_j, \quad x_j \in T_j \subset X - a, \ \lambda_j > 0, \ j > j_0. \tag{1.8}$$

Обозначим символом $\rho(0, T_j)$ расстояние от начала координат до множества T_j. Из предыдущего выводим, что $|x_j| \geq \rho(0, T_j) > p_j$, $j > j_0$. Но $p_j \to \infty$ при $j \to \infty$ (см. (1.7)). Поэтому $|x_j| \to \infty$. Следовательно, $\lambda_j \to 0$ при $j \to \infty$. Из (1.8) и предложения 1.3 получаем $x \in A(X - a) = A(X)$. Итак (см. (1.3), (1.5)),

$$A(X) = \Pi_X = H_X. \tag{1.9}$$

2. Пусть $\dim L_X = k$, где $0 < k < n$. Рассмотрим ортогональное разложение $\mathbb{R}^n = L_X \oplus L_X^\perp$. Для выпуклого множества X справедливо представление $X = L_X \oplus X^\perp$, где $X^\perp \subset L_X^\perp$ — выпуклое множество, не содержащее прямых, причем $\dim X^\perp = \dim L_X^\perp = n - k$, так как $\dim X = n$. Остается воспользоваться результатами п. 1 (см. (1.8)). $\square$

Замечание. Близкий по содержанию к теореме 1.4 результат имеется в [2, лемма 7.3.4]. Здесь и всюду ниже ссылки даны на второе издание монографии [2].

2°. Выпуклые функции в $\mathbb{R}^n$, эквивалентные возрастающим по каждой переменной функциям. Под функцией, возрастающей (убывающей) по одной из переменных при фиксированных значениях остальных переменных, мы понимаем функцию, возрастающую (убывающую) необязательно строго по этой переменной, т. е. допускающую постоянные значения на некоторых интервалах ее изменения. Именно этому классу принадлежит ассоциированная с целой функцией f функция V_f (см. (0.1)). Подобным свойством обладают и многие другие вещественные функции, популярные в теории целых функций многих переменных: срезка положительной постоянной $M_f^+(r) = \max\{M_f(r), c\}$, $r \in \mathbb{R}_+^n$, максимум-модуля M_f функции f (например, $c = 1, e$), ее максимальный член, характеристика Неванлинны и т. д.

Монотонное поведение функции, возрастающей (убывающей) по каждой переменной, имеет место не только на прямых, параллельных осям координат, но и, например, на прямых $\Gamma(u,a) = \{ut+a,\ t\in\mathbb{R}\}$, $\quad a\in\mathbb{R}^n$, у направляющего вектора u каждой из которых все координаты неотрицательные (неположительные), т. е. $u\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}$ $(\mathbb{R}^n_-\setminus\{0\})$. Условие монотонного изменения выпуклой функции $V(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $n>1$, на прямой $\Gamma(u,a)$ удобно описать с помощью следующих понятий.

Определение 1.5. Пусть $V(u)$, $u\in\mathbb{R}^m$, — выпуклая функция. Ее *надграфиком* называется выпуклое множество $\mathrm{epi}V = \{(u,u_{m+1})\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R} : u_{m+1}\geq V(u)\}$. *Асимптотической* (или *рецессивной*) функцией называют функцию ρ_V, надграфик $\mathrm{epi}\rho_V$ которой совпадает с асимптотическим конусом $A(\mathrm{epi}V)$ надграфика функции V (см. определение 1.2).

Существует другой способ определения функции ρ_V.

Теорема 1.6 [3, теорема 8.5]. *Функция ρ_V — положительно однородная выпуклая функция, принимающая, возможно, и бесконечные значения в $\mathbb{R}^m$. Кроме того, для любого $a\in\mathbb{R}^m$ справедлива формула*

$$\rho_V(u) = \sup_{t>0}\frac{V(a+ut)-V(a)}{t} = \lim_{t\to\infty} t^{-1}V(tu), \quad u\in\mathbb{R}^m. \tag{1.10}$$

Теорема 1.7 [3, теорема 8.6]. *Для того чтобы след $\varphi(t)=V(ut+a)$, $t\in\mathbb{R}$, выпуклой функции $V(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$ $(n>1)$, на прямой $\Gamma(u,a)$, где $u\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $a\in\mathbb{R}^n$, был непостоянной убывающей функцией, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\rho_V(u)\leq 0$, $\rho_V(-u)>0$.*

Этот результат стимулирует ввести следующее

Определение 1.8. Пусть $V(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $n>1$, — выпуклая функция, а ρ_V — ее асимптотическая функция. Множество $K_V = \{x\in\mathbb{R}^n : \rho_V(u)\leq 0\}$ назовем *конусом направлений убывания* функции V.

Из теорем 1.4, 1.6 вытекает, что K_V — выпуклый конус, причем $K_V=\{0\}$, если при некотором $m\in\mathbb{R}$ множество $\{x\in\mathbb{R}^n : V(x)=m, V(x)\geq m\}$ — компакт (т. е. m — (глобальный) минимум функции V), $K_V=\mathbb{R}^n$ лишь в случае $V\equiv\mathrm{const}$.

Рассмотрим класс B_n выпуклых в $\mathbb{R}^n$ функций, обладающих конусами направлений убывания полной размерности, т. е. $B_n=\{V : \dim K_V = n\}$. В частности, класс B_n содержит класс A_n выпуклых в $\mathbb{R}^n$ функций, возрастающих по каждой переменной, поскольку $\mathbb{R}^n_-\subset K_V$, $V\in A_n$ (см. введение).

Покажем, что любая функция класса B_n эквивалентна в определенном смысле некоторой функции из класса A_m, где $m\leq n$.

Теорема 1.9. *Для любой функции $V\in B_n$, отличной от постоянной, существует невырожденное линейное отображение $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ такое, что $W(u) := V(Au)$, $u\in\mathbb{R}^n$, — выпуклая функция, возрастающая по каждой переменной.*

Доказательство. В конусе K_V найдется n линейно независимых элементов $b^{(k)}$, $k=1,\dots,n$. Симплекс с вершинами во всех этих точках и в $0\in\mathbb{R}^n$ порождает конус (*симплициальный конус*) L_V с вершиной в 0 размерности n такой, что $L_V\subset K_V$[2]. Искомое линейное отображение определим с помощью

[2] Далее такое понятие используется в более широком смысле: это конус, порождаемый заданным симплексом, причем вершина конуса совпадает с одной из вершин симплекса.

условий $b^{(k)} = A(-e_k)$, $k = 1, \dots, n$, где $\{e_k\}_1^n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Оно обладает свойством $A(\mathbb{R}^n_-) = L_V$, где $\mathbb{R}^n_-$ — отрицательный октант в $\mathbb{R}^n$. Поэтому функция $W(u) = V(Au)$, $u \in \mathbb{R}^n$, принадлежит классу A_n. $\square$

Замечание. В зависимости от структуры функции V и выбора множества $\{b^{(k)}\}_1^n$ ассоциированная с ними функция W может быть постоянной по некоторым переменным пространства $\mathbb{R}^n$, т. е. возможно $W \in A_m$ при некотором $m < n$. В этом убеждает следующий простой пример.

Пусть $V(x) = x_1 - x_2$. Если $A(u) = (u_1, -u_2)$, то $W(u) = u_1 + u_2$, а если $A(u) = (u_1 + u_2, u_2)$, то $W(u) = u_1$. Например, в последнем случае $b^{(1)} = (-1, 0)$, $b^{(2)} = (-1, -1)$.

3°. Опорное свойство симплициального конуса. Сначала покажем, что полупространство в $\mathbb{R}^n$ можно исчерпать с помощью некоторого семейства симплициальных конусов.

Лемма 1.10. *Пусть* Π — *замкнутое полупространство в* $\mathbb{R}^n$, $\Gamma = \partial\Pi$ — *его граничная гиперплоскость,* $m_0 \in \Gamma$ — *произвольно фиксированная точка. Тогда справедлива формула*

$$\Pi = \overline{M}; \quad M = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j,\ K_j \subset \operatorname{int} K_{j+1},\ j \in \mathbb{N}, \tag{1.11}$$

где $\{K_j, j \in \mathbb{N}\}$ — *возрастающее семейство симплициальных конусов с вершиной в* m_0.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что полупространство Π определяется уравнением $\Pi = \{u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n : u_n \geq 0\}$, а $m_0 = 0$ — начало координат. Пусть $\Delta \subset \Gamma$ — $(n-1)$-мерный симплекс, внутренней точкой которого является 0. Рассмотрим семейство $\{\Delta_j, j \in \mathbb{N}\}$ $(n-1)$-мерных симплексов, получаемых из симплекса Δ с помощью параллельного сдвига на вектор $m_j = (0, \dots, 0, 1/j)$. Очевидно, что $\operatorname{Pr}_\Gamma \Delta_j = \Delta$, $m_j \in \operatorname{int} \Delta_j$, $j \in \mathbb{N}$. Это семейство порождает семейство $\{K_j, j \in \mathbb{N}\}$ n-мерных симплициальных конусов с вершиной в 0, каждый из которых пересекается с гиперплоскостью Γ только в начале координат. Поэтому при любом $j \in \mathbb{N}$ множество

$$L_j := K_j \cap \Gamma_1, \quad \Gamma_1 = \{u \in \mathbb{R}^n : u_n = 1\}, \tag{1.12}$$

— выпуклый компакт [3, следствие 8.4.1]. Он является образом симплекса Δ_j при отображении гомотетии с коэффициентом j. Следовательно, $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} L_j = \Gamma_1$. Отсюда и вытекает справедливость соотношения (1.11). $\square$

Покажем, что симплициальный конус является опорным для *строго выпуклого* конуса. Так назовем выпуклый конус, не содержащий прямых, или конус линейной размерности 0 (см. сноску к теореме 1.4).

Теорема 1.11. *Пусть* K — *замкнутый строго выпуклый конус размерности* n *с вершиной в* $0 \in \mathbb{R}^n$. *Тогда существует симплициальный конус с вершиной в* 0, *содержащий* K.

Доказательство. Рассмотрим поляру $K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 0,\ x \in K\}$ конуса K. Это тоже замкнутый строго выпуклый конус размерности n с вершиной в 0 согласно следствию 14.6.1 в [3]. Поэтому $\operatorname{int} K^\circ \neq \varnothing$. Пусть $a \in \operatorname{int} K^\circ$, $|a| = 1$, и $\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle = 0\}$. Тогда Γ — опорная гиперплоскость конуса K, ограничивающая содержащее K полупространство Π, причем $\Gamma \cap K = \{0\}$.

По лемме 1.10 Π исчерпывается возрастающей последовательностью симплициальных конусов с вершиной в 0 (см. (1.11)). Воспользуемся обозначениями доказательства леммы 1.10 (см. (1.12)). Пусть M_j — относительная внутренность компакта $L_j \in \mathbb{R}^n$ в топологии гиперплоскости $\Gamma_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a\rangle = -1\}$. Система множеств $\{M_j\}_1^\infty$ образует открытое покрытие компакта $L = K \cap \Gamma_1$. Отсюда, учитывая, что $M_j \subset L_j \subset M_{j+1}$, $j \in \mathbb{R}^n$, и из элементарных топологических соображений выводим $L \subset M_{j_0}$ при некотором $j_0 \in \mathbb{N}$. Следовательно, $K \subset K_{j_0}$. $\square$

Замечания. 1. Теорема справедлива и для замкнутого выпуклого конуса X размерности $m < n$, не содержащего прямых. Достаточно предварительно рассмотреть замкнутый конус K с вершиной в точке $a \in \mathbb{R}^n \setminus X$, порождаемый множеством X[3)]. Очевидно, что K — строго выпуклый конус.

2. При применении леммы 1.8 можно выбрать семейство конусов $\{K_j, j \in \mathbb{N}\}$ такое, что каждый его элемент имеет рациональные образующие. Это означает, что любой конус K_j порождается $(n-1)$-мерным симплексом, каждая вершина которого имеет только рациональные координаты в рассматриваемой системе координат. Для осуществления выбора достаточно направляющий вектор a гиперплоскости Γ выбрать рациональным (с точностью до постоянного множителя), а в доказательстве леммы 1.10 взять симплекс Δ, все вершины которого имеют лишь рациональные координаты. Поэтому верна

Теорема 1.11$'$. *Теорема* 1.11 *остается справедливой при дополнительном ограничении: симплициальный конус имеет рациональные образующие.*

4°. Триангуляция $\mathbb{R}^n$ симплициальными конусами. Отметим еще одно свойство симплициальных конусов. Информацию о допустимом числе таких конусов, участвующих в «триангуляции» $\mathbb{R}^n$, дает

Теорема 1.12. *Существует $n+1$ симплициальных конусов $\{K_i\}_1^{n+1}$ размерности n с вершиной в 0, в совокупности покрывающих $\mathbb{R}^n$, причем*

$$\operatorname{int} K_i \cap \operatorname{int} K_j = \varnothing, \quad i \neq j,\ i, j \in \{1, \dots, n, n+1\}.$$

Доказательство. Пусть Δ — n-мерный симплекс, для которого начало координат 0 является его внутренней точкой. Все его грани $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \Gamma_{n+1}$ — $(n-1)$-мерные симплексы. Из структуры симплекса Δ вытекает, что эти грани расположены в гиперплоскостях, не содержащих $0 \in \mathbb{R}^n$. Поэтому выпуклая оболочка Δ_j множества $\Gamma_j \cup \{0\}$ — n-мерный симплекс при любом $j \in \{1, \dots, n, n+1\}$, причем $\bigcup\limits_{j=1}^{n+1} \Delta_j = \Delta$. Отсюда заключаем, что конусы $K_1, \dots, K_n$, K_{n+1} с вершиной в 0, порождаемые соответственно симплексами $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, Δ_{n+1}, являются симплициальными конусами размерности n и в совокупности покрывают $\mathbb{R}^n$. $\square$

Замечание. Вершины $c_1, \dots, c_n, c_{n+1}$ симплекса Δ определяют направляющие векторы содержащих их лучей $L_1, \dots, L_n, L_{n+1}$ с вершиной в $0 \in \mathbb{R}^n$. Полагаем, что K_i, $i \in \{1, \dots, n, n+1\}$, — симплициальный конус, являющийся выпуклой оболочкой подмножества из n таких лучей, кроме луча L_i. Именно

[3)] Если $a \in \operatorname{aff} X \setminus X$, где $\operatorname{aff} X$ — аффинная оболочка множества X, то $\dim K = m$.

такова конструкция конусов, рассмотренных в доказательстве теоремы. Очевидно, подобная «триангуляция» $\mathbb{R}^n$ невозможна с помощью числа лучей, меньшего $n+1$.

Возникает обратный вопрос, когда множество из $n+1$ лучей с вершиной в $0 \in \mathbb{R}^n$ порождает описанную триангуляцию $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.12′. *Пусть $\mathscr{L} = \{L_i\}_1^{n+1}$ — заданное множество лучей с вершиной в $0 \in \mathbb{R}^n$, а $\mathscr{K} = \{K_i\}_1^{n+1}$ — множество симплициальных конусов, ассоциированных с $\mathscr{L}$ упомянутым способом. Множество $\mathscr{K}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.12 тогда и только тогда, когда*

1) *любое подмножество $\mathscr{L}'$ множества $\mathscr{L}$, состоящее из n лучей, имеет линейно независимые направляющие векторы;*

2) *луч $L \in \mathscr{L} \setminus \mathscr{L}'$ обладает свойством $-L \setminus \{0\} \in \operatorname{int} K$, где K — выпуклая оболочка множества $\mathscr{L}'$.*

Доказательство. Из рассуждений доказательства теоремы 1.12 вытекает, что искомая триангуляция $\mathbb{R}^n$ возможна в том и лишь в том случае, когда направляющие векторы $c_1, \dots, c_n, c_{n+1}$ лучей $L_1, \dots, L_n, L_{n+1}$ являются вершинами симплекса Δ размерности n со свойством $0 \in \operatorname{int}\Delta$. Это означает, что, с одной стороны, например, $c_1, \dots, c_n$ — линейно независимые векторы, а вектор c_{n+1} однозначно представляется в виде $c_{n+1} = x_1 c_1 + \dots + x_n c_n$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. С другой стороны, точка 0 имеет положительные барицентрические координаты, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i c_i = 0, \quad \lambda_i > 0,\ i = 1, \dots, n, n+1,\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1.$$

Отсюда вытекает следующая взаимосвязь между координатами c_{n+1} и 0: $\lambda_i + \lambda_{n+1} x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Поэтому $x_i < 0$, $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $-c_{n+1} \in \operatorname{int} K$, где K — симплициальный конус с образующими лучами $L_1, \dots, L_n$. □

Следствие 1.13. *Существует $n+1$ непересекающихся строго выпуклых конусов размерности n с вершиной в 0, в совокупности покрывающих $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть в обозначениях доказательства теоремы 1.12 и замечания к нему K_i — симплициальный конус, не содержащий луча L_i, где $i = 1, \dots, n, n+1$. Тогда $\Gamma_i := K_i \cap K_{i+1}$ — его грань размерности $n-1$, не содержащая лучей L_i, L_{i+1}. Здесь при $i = n+1$ полагаем $K_{n+2} = K_1$, $L_{n+2} = L_1$. Из теоремы 1.12 заключаем, что искомой является система строго выпуклых конусов $M_i = K_i \setminus \Gamma_i$, $i = 1, \dots, n, n+1$, если к одному из них присоединить точку $0 \in \mathbb{R}^n$. □

Следствие 1.14. *Пусть M — выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в 0 такой, что $\dim M = n$, а L — луч с вершиной в 0, обладающий свойством $-L \setminus \{0\} \in \operatorname{int} M$. Тогда выпуклая оболочка множества $M \cup L$ равна $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть c и $d = -c$ — направляющие векторы лучей L, $-L$. По условию $d \in \operatorname{int} M$. Рассмотрим гиперплоскость $\Gamma_d = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, d\rangle = \langle d, d\rangle\}$, ортогональную лучу $-L$. В ее относительной топологии является открытым множество $G = \Gamma_d \cap \operatorname{int} M$, содержащее вектор d. Возьмем $(n-1)$-мерный симплекс $\Delta_1 \subset G$, внутренним элементом которого является d. Полагаем, что K — симплициальный конус с вершиной в 0, порождаемый Δ_1. По построению $-L \setminus \{0\} \in \operatorname{int} K \subset M$. Согласно теореме 1.12′ выпуклая оболочка множества $K \cup L$ совпадает с $\mathbb{R}^n$. Отсюда и заключаем о справедливости следствия 1.14. □

§ 2. Фундаментальные свойства кратных рядов Лорана

1°. Лемма Абеля для рядов Лорана и ее модификации. Рассмотрим ряд Лорана
$$g(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k z^k,\qquad z^k=z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}, \tag{2.1}$$
с непустой областью D абсолютной сходимости, которую условно считаем расположенной в $\mathbb{T}^n$ (в отличие от кратных степенных рядов). Множество $S_g=\{k\in\mathbb{Z}^n : a_k\neq 0\}$ называется *носителем* ряда g. Известно, что D — логарифмически выпуклая область Рейнхарта в $\mathbb{T}^n$. Это означает, что если $z\in D$, то и $(z_1e^{i\theta_1},\dots,z_ne^{i\theta_n})\in D$, $\theta_k\in\mathbb{R}$, $k=1,\dots,n$, кроме того,
$$\ln D=\{u=\ln|z|:=(\ln|z_1|,\dots,\ln|z_n|)\in\mathbb{R}^n : z\in D\subset\mathbb{T}^n\}$$
— выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$. Информацию о структуре области абсолютной сходимости ряда Лорана дает аналог леммы Абеля (см., например, [5]). Представим его в форме, удобной для дальнейших приложений.

Лемма 2.1. *Пусть g — ряд Лорана с непустой областью абсолютной сходимости D (см. (2.1)), K — произвольный конус, содержащий замкнутую выпуклую оболочку носителя S_g функции g, a — его вершина. Тогда для любой точки $z_0\in D\cap\mathbb{T}^n$ выполняется условие $\ln|z_0|+K_a^\circ\subset\ln D$, где K_a° — поляра конуса $K_a=K-a$ с вершиной в $0\in\mathbb{R}^n$.*

Идея доказательства та же, что и в случае леммы Абеля. Справедливость указанных в формулировке леммы 2.1 условий, при которых конечна оценка сверху
$$\sup\left\{\left|\frac{z}{z_0}\right|^k, k\in S_g\right\}\le M(z):=\sup\left\{\left|\frac{z}{z_0}\right|^x, x\in K\right\},\qquad \left|\frac{z}{z_0}\right|^k=\prod_{i=1}^n\left|\frac{z_i}{z_{i0}}\right|^{k_i},$$
объясняется формулой $K_a^\circ=\{x^*\in\mathbb{R}^n : \langle x,x^*\rangle\le\langle a,x^*\rangle,\ x\in K\}$.

Лемма 2.1 является информативным утверждением тогда, когда $\ln D$ — неограниченная область в $\mathbb{R}^n$ (в противном случае в обозначениях леммы $K_a^\circ=\{0\}$). Для последующего изложения полезно следующее дополнение, вытекающее из леммы 2.1, замечания 1 к теореме 1.11 и следствия 14.6.1 в [3].

Следствие 2.2. *Пусть замкнутая выпуклая оболочка X носителя ряда g (см. (2.1)) не содержит прямых и $\dim X=m$. Тогда*

i) *существует замкнутый строго выпуклый конус K любой фиксированной размерности s, где $m\le s\le n$, удовлетворяющий условию леммы 2.1;*

ii) *в обозначениях леммы 2.1 поляра K_a° обладает свойствами: $\dim K_a^\circ=\dim\ln D=n$, а ее линейная размерность равна $n-s$, в частности, если $s=n$, то K_a° — строго выпуклый конус размерности n.*

Верна следующая модификация леммы Абеля для рядов Лорана.

Теорема 2.3. *Пусть X — замкнутая выпуклая оболочка носителя ряда Лорана g (2.1), а $\dim\ln D=n$, где D — область его абсолютной сходимости. В обозначениях леммы 2.1 справедливо соотношение*
$$\ln|z_0|+K^\circ\subset\ln D,\qquad z_0\in G\subset\mathbb{T}^n,\ G=\operatorname{int}D, \tag{2.2}$$
где K° — поляра асимптотического конуса $K=A(X)$ множества X.

Доказательство. Воспользуемся обозначениями доказательства теоремы 1.4 (см. (1.4)). По лемме 2.1
$$\ln|z_0|+K_j^\circ\subset\ln D,\quad j>j_0,$$

где $K_j = I_j - a_j$, а I_j — замкнутый выпуклый конус с вершиной в точке a_j, $j > j_0$, порождаемый множеством X. Поскольку $K_{j+1} \subset K_j$, $j > j_0$, то $K_j^\circ \subset K_{j+1}^\circ$, $j > j_0$. Поэтому множество $M = \bigcup_{j>j_0} K_j$ — выпуклый конус с вершиной в 0 такой, что $\ln|z_0| + M \subset \ln D$. Это означает, что $M \subset A(\ln G)$, где $A(\ln G)$ — асимптотический конус множества $\ln G$. Но $A(\ln G)$ — замкнутый конус (см. теорему 1.1). Следовательно, $\overline{M} \subset A(\ln G)$ и $\ln|z_0| + \overline{M} \subset \ln G \subset \ln D$. С другой стороны, $\overline{M} = H^\circ$, где $H := \bigcap_{j>j_0} K_j^\circ$ (см. теорему 6.7 в [6]). С учетом равенства (1.9) имеем $\overline{M} = [A(X)]^\circ$, где $A(X)$ — асимптотический конус множества X. Итак, утверждение теоремы справедливо. $\square$

Замечание. Теорема 2.3 означает, что K° — подмножество асимптотического конуса $A(\ln G)$ множества $\ln G$. В общем случае для рядов Лорана равенство $K^\circ = A(\ln G) = A(\ln \overline{D})$ (см. теорему 1.1) может не выполняться. Такой ряд в качестве слагаемого может содержать целую функцию. Это обстоятельство хотя и не влияет на область сходимости рассматриваемого ряда, но отражается на структуре его носителя, что иллюстрирует следующий

Пример. Рассмотрим степенной ряд

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z_1^k z_2^{2k} + \sum_{l=0}^{\infty} z_1^{2l} z_2^l + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_1^m}{m!},$$

в который разлагается функция

$$g(z) = \frac{1}{1 - z_1 z_2^2} + \frac{1}{1 - z_1^2 z_2} + e^{z_1}.$$

Область сходимости ряда в обозначениях формулы (2.2) имеет вид $G = D = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1 z_2^2| < 1, |z_1^2 z_2| < 1\}$, а

$$\ln G = \ln D = \{(u,v) = (\ln|z_1|, \ln|z_2|) \in \mathbb{R}^2 : u + 2v < 0,\ 2u + v < 0\}. \qquad (2.3)$$

С другой стороны, замкнутая выпуклая оболочка X носителя ряда g такова: $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 2x\}$. Поскольку множество X — замкнутый конус с вершиной в 0, оно совпадает со своим асимптотическим конусом $K = A(X)$. Находим

$$K^\circ = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : ux + vy \le 0,\ (x,y) \in K\} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \le 0,\ u + 2v \le 0\}.$$

Отсюда (см. (2.2)) получаем $K^\circ \subset A(\ln G)$. Это согласуется с теоремой 2.3 и замечанием к ней. Однако $K^\circ \ne A(\ln G)$, поскольку (см. (2.3)) $A(\ln G) = \overline{\ln G}$.

2°. Аналог формулы Коши — Адамара для кратных рядов Лорана. Как и в случае кратных степенных рядов (см. [7, § 3, п. 7, теорема 4]), дополнительную информацию об области сходимости кратного ряда Лорана можно получить исходя из асимптотических свойств его коэффициентов.

В дальнейшем символом D будем обозначать внутренность области абсолютной сходимости ряда Лорана g (см. (2.1)), предполагая, что $D \ne \varnothing$, $\dim \ln D = n$. Поскольку, как отмечалось, $H := \ln D$ — выпуклая область, ее аналитическое описание (и, следовательно, описание области D) возможно с помощью функционала Минковского

$$p_H(u) = \inf\{\alpha > 0 : (u - u_0)/\alpha \in H\}, \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

а именно $H = \{u \in \mathbb{R}^n : p_H(u) < 1\}$. Здесь u_0 — произвольно фиксированная точка области H. Однако возникает проблема определения p_H при использовании информации о носителе ряда g.

Определение 2.4. Пусть $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, Ω — *x-звездное* множество в $\mathbb{T}^n$, т. е. множество, удовлетворяющее условию:

$$zt^x \in \Omega,\ t \in (0,1], \quad zt^x = (z_1 t^{x_1}, \dots, z_n t^{x_n})$$

для всякой точки $z \in \Omega$. Функцию $p_\Omega(z;x) = \inf\{s > 0 : zs^{-x} \in \Omega\}^{4)}$, $z \in \mathbb{T}^n$, назовем *x-параболическим функционалом Минковского* множества Ω.

Замечание. При $x \in \mathbb{R}^n_0$ эти понятия в близкой форме рассматривались, например, в [2, определение 8.2.2] при исследовании кратных степенных рядов. Если хотя бы одна координата вектора x меньше 0, то множество $\{zt^x : t \in (0,1]\}$, где $z \in \mathbb{T}^n$, неограниченное.

Из теоремы 1.1 вытекают

Свойство 2.5. *Пусть D — логарифмически выпуклая область Рейнхарта в $\mathbb{T}^n$, $H := \ln D$, и $A(H)$ — асимптотический конус выпуклой области H (см. определение 1.2). Область D является x-звездной, каков бы ни был элемент x, удовлетворяющий условию $-x \in A(H)$.*

Свойство 2.6. *Пусть в обозначениях свойства 2.5 $\dim A(H) = n$, $-x \in \operatorname{int} A(H)$, $p_D(z;x)$ — x-параболический функционал Минковского области $D \subset \mathbb{T}^n$. Тогда*

$$p_D(zt^x;x) = tp_D(z;x), \quad t > 0,\ z \in \mathbb{T}^n,$$

причем функционал $p_D(z;x)$ зависит только от модулей переменных $z_1, \dots, z_n$ и является конечной неотрицательной логарифмически выпуклой функцией от $\ln|z_1|, \dots, \ln|z_n|$ в $\mathbb{T}^n$. Кроме того, справедливы равенства

$$D = \{z \in \mathbb{T}^n : p_D(z;x) < 1\}, \quad \partial D = \{z \in \mathbb{T}^n : p_D(z;x) = 1\}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Остановимся на доказательстве конечности функционала $p_D(\cdot;x_0)$. Справедливость остальных фактов устанавливается по аналогии со случаем $x \in \mathbb{R}^n_0$ в [2, теорема 8.2.9].

Зафиксируем $-x_0 \in \operatorname{int}\ A(H)$, $a \in H$. Существует круговой конус V с вершиной в 0 и осью $\Gamma = \{y = -tx_0 : t \geq 0\}$ такой, что $\dim V = n$, $V \subset \operatorname{int} A(H)$, поэтому (см. теорему 1.1) $a + V \subset H$. Но для любого $u \in \mathbb{R}^n$ параллельный Γ луч $\{y = u - tx_0 : t \geq 0\}$ пересекает конус , т. е. $\{y = u - tx_0 : t \geq t_0\} \subset H$ при некотором t_0. Это эквивалентно утверждению о конечности функционала $p_D(\cdot;x_0)$. $\square$

Замечание. Если в предположениях свойства 2.6 $-x \in \partial A(H)$, то функционал $p_D(\cdot;x)$ может не быть всюду конечной в $\mathbb{T}^n$ функцией. В этом убеждает пример выпуклой области $H = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : uv > 1,\ u > 0\}$. Тогда $A(H) = \mathbb{R}^2_+$. Если, например, $-x = (1,0)$, то горизонтальная прямая $v = c$, где $c \leq 0$, не пересекает множество H. Поэтому при $|z_2| < 1$ функционал $p_D(z;x)$ ассоциированной с H области $D = \{z \in \mathbb{T}^2 : |z_j| = e^{u_j},\ j = 1,2,\ u \in H\}$ бесконечен.

Итак, для аналитического описания области сходимости ряда Лорана (2.1) с помощью формулы (2.4) достаточно найти функционал $p_D(\cdot;x)$ хотя бы при

4) Точная нижняя грань пустого множества полагается равной ∞.

одном $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ таком, что $-x \in \operatorname{int} A(H)$ (в обозначениях свойства 2.6). Покажем, что это возможно сделать, опираясь на асимптотические свойства коэффициентов ряда Лорана.

Для оценки числа точек целочисленной решетки в заданном выпуклом множестве нам понадобится

Лемма Дирихле [8, § 120]. *Пусть M — замкнутое ограниченное выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, $\dim M = n$, $\delta\mathbb{Z}^n$ — кубическая решетка с шагом δ, T_δ — число точек этой решетки, расположенных в M. Тогда объем V_M множества M можно вычислить по формуле $V_M = \lim\limits_{\delta \to 0} T_\delta \delta^n$.*

Доказательство. При $n = 1$ лемма очевидна. При $n = 2$ она доказана Дирихле в более общем случае (для квадрируемых областей). При $n \geq 3$ лемма доказывается методом математической индукции с помощью схемы рассуждений Дирихле. $\square$

Теорема 2.7. *Пусть замкнутая выпуклая оболочка X носителя кратного ряда Лорана g (см. (2.1)) не содержит прямых. Тогда существует элемент x со свойством $-x \in \operatorname{int}[A(X)]^\circ$, где $A(X)$ — асимптотический конус множества X такой, что ассоциированный с рядом g функционал*

$$d(z; x) = \limsup_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|a_k z^k|}, \quad z \in \mathbb{T}^n, \ \nu = \langle k, x \rangle,$$

определяет внутренность D области абсолютной сходимости ряда g и ее границу:

$$D = \{z \in \mathbb{T}^n : d(z; x) < 1\}, \quad \partial D = \{z \in \mathbb{T}^n : d(z; x) = 1\}. \tag{2.5}$$

В частности, $D = \mathbb{T}^n$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|a_k|} = 0, \quad \nu = \langle k, x \rangle. \tag{2.6}$$

Доказательство. В случае, когда g — многочлен Лорана, теорема очевидна. Докажем ее при условии, что ряд (2.1) содержит бесконечное число членов.

1. Согласно следствию 2.2 существует содержащий множество X замкнутый строго выпуклый конус K, причем $\dim K = \dim K_a^\circ = n$, где $K_a = K - a$, a — вершина K. Поэтому найдется содержащее K опорное полупространство Π со свойством: его граница, гиперплоскость $\Gamma = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle = c\}$, содержит только одну точку конуса K — его вершину a, т. е.

$$c = \langle a, x \rangle, \quad \langle y, x \rangle > c, \quad y \in K \setminus \{a\}. \tag{2.7}$$

Отсюда, из леммы 2.1 и теоремы 2.3 получаем

$$-x \in \operatorname{int} K_a^\circ \subset \operatorname{int}[A(X)]^\circ \subset \operatorname{int} A(H), \quad K_a = K - a,$$

где $A(X)$, $A(H)$ — асимптотические конусы множества X и области $H = \ln D$ соответственно. Из свойств 2.5 и 2.6 заключаем, что D — x-звездная область в $\mathbb{T}^n$, а x-параболический функционал Минковского $p_D(\cdot; x)$ области D (см. определение 2.4) конечен в $\mathbb{T}^n$.

2. Рассмотрим семейство гиперплоскостей (см. (2.7))

$$\Gamma_m = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y - a, x \rangle = m\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

параллельных гиперплоскости Γ. Тогда $K\cap\Gamma_m$ — выпуклый компакт при любом $m \in \mathbb{N}$ (см. [3, следствие 8.4.1]) и верно равенство

$$K = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m, \quad K_m = \{y \in K : \langle y - a, x\rangle \le m\}, \tag{2.8}$$

т. е. система ограниченных выпуклых множеств $\{K_m,\ m \in \mathbb{N}\}$ исчерпывает конус K и по построению в совокупности содержит носитель S_g ряда g. Очевидно, что при любом $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ число T_m точек решетки $\mathbb{Z}^n$, расположенных в K_m, совпадает с числом точек решетки $(\mathbb{Z}^n - a)/m$ с шагом $1/m$, содержащихся в $K_1 - a$. Тогда из леммы Дирихле после элементарных преобразований получаем следующую оценку для числа точек решетки $\mathbb{Z}^n$, расположенных в $K_m\backslash K_{m-1}$:

$$T_m - T_{m-1} < \varepsilon m^n, \quad m > m_0(\varepsilon), \tag{2.9}$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое фиксированное число.

3. Пусть $z_0 \in D$. Покажем, что $d(z_0; x) < 1$.

Из формулы (2.4) находим, что $p_D(z_0; x) < 1$. При достаточно малом $\delta > 0$ имеем $p_D(z_\delta; x) < 1$, где $z_\delta = z_0(1-\delta)^{-x}$ (см. свойство 2.6). В точке z_δ ряд (2.1) абсолютно сходится и потому допускает следующую оценку (см. (2.8)):

$$|g(z_\delta)| \le \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k\in I_m} \bigl|a_k z_0^k\bigr|(1-\delta)^{-\langle k,x\rangle}, \quad I_m := K_m\backslash K_{m-1},\ m \in \mathbb{N}\backslash\{1\},\ I_1 := K_1.$$

Отсюда, учитывая, что справедливо неравенство

$$c + m - 1 < \nu := \langle k, x\rangle \le c + m, \quad k \in I_m,\ m \in \mathbb{N}, \tag{2.10}$$

и опираясь на признак Коши для числовых рядов, получаем другое неравенство

$$\limsup_{m\to\infty} \sqrt[\lfloor m\rfloor]{S_m(z_0)} = \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{S_m(z_0)} \le 1 - \delta, \quad S_m(z_0) = \sum_{k\in I_m} \bigl|a_k z_0^k\bigr|. \tag{2.11}$$

Оценим сумму, стоящую под знаком корня, с помощью схемы, использованной в случае степенных рядов [7, § 3, п. 7, теорема 4]. Обозначим символом $\mu(g; m)$ максимальный член суммы $S_m(z)$. Применяя неравенство (2.9), имеем

$$\mu(g; m) \le S_m(z) \le \mu(g; m)(T_m - T_{m-1}) < \mu(g; m)\varepsilon m^n, \quad m > m_0(\varepsilon).$$

Отсюда, из (2.10) и (2.11) заключаем, что

$$d(z_0; x) = \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_k z_0^k|} = \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{S_m(z_0)} < 1.$$

Итак, $D = \{z \in \mathbb{T}^n : p_D(z; x) < 1\} \subset \{z \in \mathbb{T}^n : d(z; x) < 1\} := B$ (см. (2.4)). Но из определения 2.4 выводим $p_B(\cdot; x) = d(\cdot; x)$. Следовательно, $d(\cdot; x) \le p_D(\cdot; x)$.

Предположим, что $0 \le d(z; x) < p_D(z; x)$ при некотором $z \in \mathbb{T}^n$. Выберем $\alpha > 0$ таким образом, что $d(z; x) < \alpha < p_D(z; x)$. Тогда (см. (2.11))

$$d(w; x) = \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{S_m(w)} < 1, \quad w = z\alpha^{-x},$$

и из признака Коши заключаем об абсолютной сходимости ряда g в точке w, т. е. $w \in D$. Но из свойства 2.6 вытекает, что $p_D(w; x) > 1$. Это означает (см. (2.4)), что $w \notin D$. Поэтому

$$d(z; x) \equiv p_D(z; x), \quad z \in \mathbb{T}^n, \tag{2.12}$$

и соотношение (2.5) справедливо, причем вторая формула в нем информативна, если $\partial D \neq \varnothing$, т. е. $D \neq \mathbb{T}^n$.

4. Если $D = \mathbb{T}^n$, то $p_D(z;x) \equiv 0$, $z \in \mathbb{T}^n$ (см. определение 2.4). Из определения функционала $d(\cdot;x)$, полагая в (2.12) $z = (1,\dots,1)$, приходим к равенству (2.6).

Пусть выполняется условие (2.6). Зафиксируем $z \in \mathbb{T}^n$, $z \neq (1,\dots,1)$. Тогда

$$d(z;x) = \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_k|}\cdot\Phi(k), \quad \ln\Phi(k) = \frac{\langle k, \ln|z|\rangle}{\langle k, x\rangle} = \langle u_l, \ln|z|\rangle\varphi(l), \qquad (2.13)$$

где в обозначениях п. 1 $k \in S_g$, $l = k - a$, $u_l = l/\langle l, x\rangle$, $\limsup\limits_{\langle l,x\rangle\to\infty}\varphi(l) = 1$. Но (см. пп. 1, 2) $S_g \subset K$, $u_l \in H$, где $H = L \cap (K - a)$, $L = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle u, x\rangle = 1\}$. По построению множество H — компакт. Поэтому линейная функция $\langle u, \ln|z|\rangle$ и функция $\Phi(k)$, $k \in S_g$, ограничены на H. Отсюда, из (2.6) и (2.13) убеждаемся в том, что $d(z;x) \equiv 0$, $z \in \mathbb{T}^n$, Наконец из (2.12) заключаем, что $p_D(z;x) \equiv 0$, $z \in \mathbb{T}^n$, т. е. $D = \mathbb{T}^n$. □

Замечание. Теорема 2.7 — аналог формулы Коши — Адамара для кратных рядов Лорана. Для кратного степенного ряда в другой форме этот результат имеется в [7, § 3, п. 7, теорема 4]. В этом случае в обозначениях предложения 2.1 и теоремы 2.7 $K = \mathbb{R}^n_+$, $x = \mathbb{I} := (1,1,\dots,1)$, $K^\circ = \mathbb{R}^n_-$.

§ 3. Расширения класса целых функций многих переменных

В этом параграфе доказана гипотеза о существовании собственного подкласса $\mathscr{A}(\mathbb{T}_n)$ класса $H(\mathbb{T}_n)$ функций, голоморфных в пространстве $\mathbb{T}^n$ при $n > 1$ и эквивалентных целым функциям (см. введение).

1°. Кратные ряды Лорана, «эквивалентные» степенным рядам.

Определение 3.1. Кратный ряд Лорана $g(z)$ вида (2.1) назовем *эквивалентным степенному ряду*, если существует мономиальное отображение

$$\mathscr{F} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n, \quad z = \mathscr{F}(w), \quad z_k = \prod_{j=1}^n w_j^{s_{kj}}, \ k = 1,\dots,n, \qquad (3.1)$$

где $\|s_{kj}\|$ — целочисленная невырожденная квадратная $(n\times n)$-матрица, такое, что $f(w) = [g \circ \mathscr{F}](w)$ — степенной ряд. В этом случае будем писать $g \sim f$. В частности, если $g \in H(\mathbb{T}^n)$, то при выполнении условия (3.1) будем говорить, что функция $g(z)$ *эквивалентна целой функции*.

Здесь понятие эквивалентности означает, что после замены переменных вида (3.1) функция $f(w)$ аналитически продолжается в окрестность начала координат (в частности, в $\mathbb{C}^n$). Заметим, что отображения вида (3.1) используются при описании структуры торических многообразий [9, 10].

Пример 1. Пусть $g(z) = \frac{az_1z_2^2}{z_3^3} + \frac{bz_3^4}{z_1^3z_2} + \frac{cz_2}{z_1}$ — многочлен Лорана в $\mathbb{T}^3$, где a, b, c — не равные 0 комплексные числа. При отображении

$$z = \mathscr{F}w, \quad w \in \mathbb{T}^3, \ z_1 = \frac{w_3}{w_1w_2^2}, \ z_2 = w_1^3w_2w_3, \ z_3 = w_3, \qquad (3.2)$$

он переходит в многочлен $f(w_1, w_2) = aw_1^5 + bw_2^5 + cw_1^4 w_2^3$, который не зависит от переменной w_3. Определитель из показателей переменных w_1, w_2, w_3 (см. отображение $\mathscr{F}$) не равен 0, поэтому многочлены g, f эквивалентны согласно определению 3.1. Уменьшение числа переменных при рассмотренных отображениях неслучайно, как увидим в дальнейшем. Поскольку $(-1, 1, 0) = 0.8(1, 2, -3) + 0.6(-3, -1, 4)$, конус K_g с вершиной в $0 \in \mathbb{R}^3$, порожденный выпуклой оболочкой носителя многочлена g, представляет собой угол, направляющими векторами сторон которого являются $(1, 2, -3), (-3, -1, 4)$. Поэтому $\dim K_g = 2$.

Пример 2. Пусть K — замкнутый выпуклый конус в $\mathbb{R}^2$ являющийся тупым углом со сторонами

$$\Gamma_1 = \{u \in \mathbb{R}^2 : u_1 = s,\ u_2 = 2s,\ s \geq 0\},\ \Gamma_2 = \{u \in \mathbb{R}^2 : u_1 = -3t,\ u_2 = -t,\ t \geq 0\}.$$

Пусть $g(z_1, z_2) = \sum\limits_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2} a_{k,l} z_1^k z_2^l$ — кратный ряд Лорана вида (2.1) с носителем $S_g = K \cap \mathbb{Z}^2$. Тогда любой фиксированный элемент $(k, l) \in S_g$ имеет целые неотрицательные координаты $(m, n) \in \mathbb{Z}_+^2$ при подходящем выборе базиса в K, состоящего из направляющих векторов $h_1 = (1, 2)/5$, $h_2 = (-3, -1)/5$ сторон Γ_1, Γ_2 угла K, т. е. $(k, l) = mh_1 + nh_2$, $m = -k + 3l$, $n = -2k + l$, $(k, l) \in S_g$.

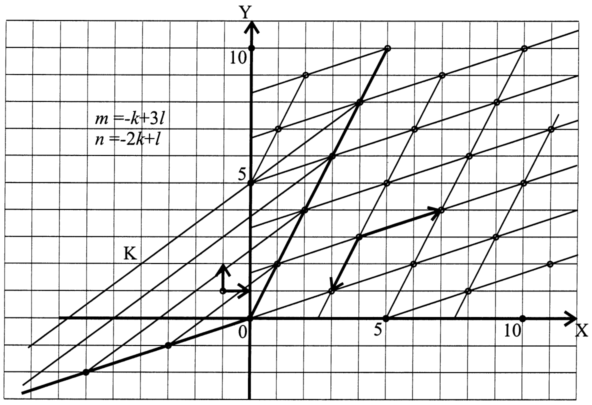

Рис. 1. Образ квадратной решетки.

Рассмотрим мономиальное отображение

$$z = \mathscr{F}w, \quad w \in \mathbb{T}^2,\ z_1 = 1/\big(w_1 w_2^2\big),\ z_2 = w_1^3 w_2.$$

Ассоциированная с ним матрица $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ транспонированная по отношению к матрице B' рассмотренного линейного отображения. Тогда

$$f(w_1, w_2) := g[\mathscr{F}w] = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+^2} b_{m,n} w_1^m w_2^n, \quad b_{m,n} = a_{k,l},\ (m, n) = B'(k, l)$$

— кратный степенной ряд с носителем $S_f = B'[S_g]$, элементы которого принадлежат подрешетке в $\mathbb{Z}_+^2$, являющейся линейным образом стандартной квадратной решетки целых точек конуса K (рис. 1).

Любой кратный ряд Лорана, выпуклая оболочка носителя которого не содержит прямых, обладает свойством: $\dim A(\ln D) = n$, где D — область его абсолютной сходимости, $A(\ln D)$ — асимптотический конус логарифмического образа $\ln D$ области D в $\mathbb{R}^n$ (см. лемму 2.1, следствие 2.2, теорему 2.7). При дополнительных ограничениях такие ряды становятся эквивалентными кратным степенным рядам в смысле определения 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть $g(z)$ — кратный ряд Лорана вида* (2.1). *Пусть K_g — наименьший замкнутый выпуклый конус с вершиной в $0 \in \mathbb{R}^n$, содержащий носитель S_g ряда g. Этот ряд эквивалентен степенному ряду $f(w) = [g \circ \mathscr{F}](w)$ (см. определение* 3.1) *тогда и только тогда, когда множество K_g — строго выпуклый конус. Кроме того, справедливы следующие утверждения:*

1) *носитель S_f ряда f принадлежит некоторой подрешетке $\mathbb{Z}^n_+$;*

2) *если $\dim K_g = k \le n$, то f — голоморфная функция k комплексных переменных (в частности, если $g \in H(\mathbb{T}_n)$, то f — целая функция).*

Доказательство. Необходимость. Пусть $g \sim f$. В обозначениях соотношения (3.1) матрица $B := \|s_{ij}\|_{n\times n}$ определяет взаимно однозначное линейное отображение $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Оно обладает свойством: $B'[K_g]$ — выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n_+$, поскольку $B'[S_g] = S_f$, где S_g, S_f — носители соответственно рядов g, f. Здесь B' — транспонированная матрица по отношению к B. Кроме того, $\dim B'[K_g] = \dim K_g$. Следовательно, K_g — строго выпуклый конус.

Достаточность. 1. Пусть K_g — строго выпуклый конус и $\dim K_g = n$. По теореме 1.11$'$ найдется симплициальный конус L с рациональными образующими и с вершиной в $0 \in \mathbb{R}^n$, содержащий K_g. Без ограничения общности можно считать, что направляющие векторы $c_j = (c_{1j}, \dots, c_{nj})$, $j = 1, \dots, n$, образующих имеют только целые координаты[5)] и их последовательность задает положительную ориентацию в $\mathbb{R}^n$. Это означает, что $\Delta = \det A > 0$, где $A = \|c_{ij}\|_{n\times n}$ (векторы $\{c_j\}_1^n$ — столбцы матрицы A). Базис в конусе K_g будем искать в виде $b_j = tc_j$, $j = 1, \dots, n$, при некотором $t > 0$. Каждый целый элемент $k = (k_1, \dots, k_n) \in S_g \subset K_g$ стандартной кубической решетки в $\mathbb{R}^n$ представим в виде $k = m_1 b_1 + \dots + m_n b_n = tAm$, $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Отсюда, используя обратную матрицу A^{-1}, получаем $tm = A^{-1}k$. Выбирая $t = 1/\Delta$, имеем

$$m = A^* k, \quad m_j = A_{1j}k_1 + \dots + A_{nj}k_n, \ j = 1, \dots, n, \tag{3.3}$$

где $A^* = \|A_{ij}\|_{n\times n}$ — присоединенная к A матрица, элементы которой являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы A. Поэтому $m \in \mathbb{Z}^n_+$.

Рассмотрим отображение

$$\mathscr{F} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n, \quad z = \mathscr{F}(w), \quad z_i = \prod_{j=1}^n w_j^{A_{ij}}, \ i = 1, \dots, n, \tag{3.4}$$

определяемое матрицей, транспонированной по отношению к A^*. Полагая $g_k(z) := z^k$, $k \in S_g$, находим $f_k(w) := [g_k \circ \mathscr{F}](w) = w^m$, с показателями монома w^m из формулы (3.3). Следовательно, $f(w) = [g \circ \mathscr{F}](w)$ — степенной ряд.

2. Пусть $\dim K_g = s < n$. Если g — многочлен Лорана, то K_g — симплициальный конус с рациональными образующими. В общем случае существует

[5)] В дальнейшем такие векторы называются *целыми*.

содержащий K_g симплициальный конус K размерности s с целыми образующими $c_1, \dots, c_s$ и с вершиной в $0 \in \mathbb{R}^n$, поскольку линейная оболочка $\mathscr{L}(K)$ конуса K имеет базис, состоящий из векторов с рациональными координатами (см. замечание 1 к теореме 1.11).

В обозначениях п. 1 целый элемент $k = (k_1, \dots, k_n) \in S_g \subset K_g \subset K$ допускает представление

$$k = m_1 b_1 + \dots + m_s b_s = t\widehat{A} m, \quad m = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{R}_+^s, \tag{3.5}$$

где $\widehat{A} = \|c_{ij}\|_{n \times s}$ — прямоугольная матрица. Поскольку ранг матрицы $\widehat{A}$ равен s, найдется ее минор M порядка s, не равный 0. Например, $M = \det B$, $B = \|c_{ij}\|_{s \times s}$. Это означает, что для определения m достаточно знать первые s координат векторов $b_j = tc_j$, $j = 1, \dots, s$. Полагая $t = 1/M$, по аналогии с формулой (3.3) находим

$$m = B^*(k_1, \dots, k_s), \quad m_j = A_{1j} k_1 + \dots + A_{sj} k_s, \ j = 1, \dots, s, \tag{3.6}$$

где $B^* = \|A_{ij}\|_{s \times s}$ — присоединенная к B матрица. Следовательно, $m \in \mathbb{Z}_+^s$.

Подставляя найденные значения координат вектора m в (3.5), находим линейную зависимость каждой из координат $k_{s+1}, \dots, k_n$ от координат $k_1, \dots, k_s$ вектора $k \in K$:

$$M k_i = l_i(k_1, \dots, k_s) := m_1 c_{i1} + \dots + m_s c_{is}, \quad i = s+1, \dots, n. \tag{3.7}$$

Учитывая, что у M и коэффициентов любой фиксированной функции l_i, $i \in \{s+1, \dots, n\}$, могут быть общие целые делители, получим следующее уравнение линейной оболочки $\mathscr{L}(K_g)$ конуса K_g в координатной форме[6)] с целыми коэффициентами:

$$L_{1j} k_1 + \dots + L_{sj} k_s + M_j k_j = 0, \quad j = s+1, \dots, n, \ k \in \mathbb{R}^n, \tag{3.8}$$

где $\{M_j\}$ — некоторые делители числа M.

Используя обозначения формул (3.6), (3.7), модифицируем преобразование (3.4) $\mathscr{F} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$:

$$z = \mathscr{F}(w), \quad z_i = \prod_{j=1}^{s} w_j^{A_{ij}} \cdot \prod_{j=s+1}^{n} w_j^{L_{ij}}, \ i = 1, \dots, s, \quad z_i = w_i^{M_i}, \ i = s+1, \dots, n. \tag{3.9}$$

Опираясь на (3.6) и (3.8), в обозначениях п. 1 имеем $f_k(w) = \prod\limits_{j=1}^{s} w_j^{m_j}$, т. е. $f(w)$ — степенной ряд, являющийся голоморфной функцией s переменных. □

Пример 2 иллюстрирует утверждения теоремы 3.2 в случае $n = \dim K_g = 2$. В обозначениях ее доказательства имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = 5, \quad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad m_1 = -k + 3l, \quad m_2 = -2k + l, \tag{3.10}$$

где $k = k_1$, $l = k_2$. Отображение $\mathscr{F}$ согласуется с формулой (3.4).

Проиллюстрируем содержание теоремы при $n = 3 > \dim K_g = 2$ на некоторой модификации примера 1.

[6)] Такое уравнение можно найти и с помощью параметрического уравнения $\mathscr{L}(K_g)$, определяемого векторами $c_1, \dots, c_s$.

Пример 1′. Пусть K — тупой угол с вершиной в $0 \in \mathbb{R}^3$, направляющими векторами сторон которого являются $c_1 = (1, 2, -3)$, $c_2 = (-3, -1, 4)$ (см. пример 1), а

$$g(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{T}^3,\ z^k = z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3},$$

— кратный ряд Лорана вида (2.1) с носителем $S_g = K \cap \mathbb{Z}^3$. Это означает, что в обозначениях теоремы 3.2 конус $K_g = K$ такой же, как в примере 1. Полагаем в обозначениях доказательства $B = A$, где A — матрица из соотношения (3.10). Тем самым $M = 5$ и $m_1 = -k_1 + 3k_2$, $m_2 = -2k_1 + k_2$, $m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}_+^2$. Нетрудно установить, что угол K расположен в плоскости $k_1 + k_2 + k_3 = 0$, $k \in \mathbb{R}^3$. Выберем отображение $\mathscr{F}$ такое же, как в примере 1 (см. (3.2)). Оно согласуется с формулой (3.9) ($L_{11} = L_{21} = M_3 = 1$). Функция $f(w_1, w_2) = [g \circ \mathscr{F}](w)$ — степенной ряд, вполне аналогичный ряду из примера 2. Это не случайно, поскольку данный ряд допускает представление

$$g(z) = \sum_{(r,l) \in \mathbb{Z}^2} \hat{a}_{rl} \left(\frac{z_1}{z_3}\right)^r \left(\frac{z_2}{z_3}\right)^l, \quad z \in \mathbb{T}^3,$$

где $r = k_1$, $l = k_2$, $\hat{a}_{rl} = a_k$, $k \in S_g$. Следовательно, он является суперпозицией ряда Лорана $h(u_1, u_2)$ от двух переменных, подобного исследованному в примере 2, и отображения $u_j = z_j / z_3$, $j = 1, 2$.

2°. Многомерный аналог разложения в ряд Лорана. Широко известна

Теорема Лорана. *Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 \le r < |z| < R \le \infty\}$. Любая голоморфная функция $g(z)$, $z \in D$, представляется в виде суммы*

$$g(z) = g_-(z) + g_+(z), \quad g_-(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k z^k, \quad g_+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

где $g_-(z)$ и $g_+(z)$ — голоморфные функции в круговых областях $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ и $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ соответственно.

Заметим, что $f(w) = g_-(1/w)$, $|w| < 1/r$, — степенной ряд, т. е. ряд Лорана $g_-(z)$ эквивалентен степенному ряду в смысле определения 3.1. Справедлив следующий многомерный аналог теоремы Лорана.

Теорема 3.3. *Пусть $D_n = \{z \in \mathbb{T}^n : 0 \le r_j < |z_j| < R_j \le \infty,\ j = 1, \dots, n\}$, — топологическое произведение колец. Любая голоморфная функция $g(z)$, $z \in D_n$, представляется в виде суммы не более чем $n+1$ кратных рядов Лорана, эквивалентных степенным рядам. В частности, если $g \in H(\mathbb{T}^n)$, то*

$$g(z) = \sum_{i=1}^{m} g_i(z), \quad z \in D_n,\ m \le n+1, \tag{3.11}$$

где $D_n = \mathbb{T}^n$, $\{g_i\}_1^m \subset H(\mathbb{T}^n)$ — кратные ряды Лорана, эквивалентные целым функциям (см. определение 3.1).

Доказательство. Для каждой голоморфной функции $g(z)$, $z \in D_n$, справедливо разложение во всюду сходящийся в D_n n-кратный ряд Лорана [7, § 3, п. 8, теорема 2]

$$g(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k z^k, \quad z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}, \tag{3.12}$$

где

$$a_k = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_t} \frac{f(w)dw}{w^{k+I}}, \quad k + I = (k_1 + 1, \dots, k_n + 1).$$

Здесь $dw = dw_1 \dots dw_n$, $\Gamma_t = \{z \in \mathbb{T}^n : |z_j| = t_j,\ j = 1, \dots, n\}$ — топологическое произведение окружностей таких, что $t_j \in (r_j, R_j)$, $j = 1, \dots, n$. Из следствия 1.13 заключаем о существовании строго выпуклых конусов $M_1, \dots, M_n$, M_{n+1} с вершиной в $0 \in \mathbb{R}^n$ таких, что

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} M_i, \quad M_i \cap M_j = \varnothing,\ i, j \in \{1, \dots, n, n+1\},\ i \neq j.$$

Поэтому ряд Лорана в (3.12) представляется в виде

$$g(z) = \sum_{i=1}^{n+1} g_i(z), \quad z \in D_n,\ g_i(z) = \sum_{k \in M_i} a_k z^k,\ i = 1, \dots, n, n+1,$$

где $g_i(z) \equiv 0$, если при некоторых $i \in \{1, \dots, n, n+1\}$ носитель S_g ряда (3.12) удовлетворяет условию $S_g \cap M_i = \varnothing$ (см. (3.11)). Для завершения доказательства остается применить теорему 3.2. $\square$

В качестве приложения теоремы 3.3 найдем критерий сходимости ряда Лорана всюду в $\mathbb{T}^n$.

Теорема 3.4. *Для того чтобы n-кратный ряд Лорана* (3.12) *сходился всюду в $\mathbb{T}^n$, необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты удовлетворяли условию*

$$\lim_{\|k\| \to \infty} \sqrt[\|k\|]{|a_k|} = 0, \quad \|k\| = \sum_{j=1}^{n} |k_j|. \tag{3.13}$$

Доказательство. Из теоремы 3.3 вытекает, что достаточно доказать теорему 3.4 для каждого слагаемого g_j в разложении (3.11). Зафиксируем $j \in \{1, \dots, m\}$. Тогда для носителя $S(g_j)$ ряда g_j выполняется равенство $S(g_j) = S_g \cap M_j$, где в обозначениях следствия 1.13 и доказательства теоремы 3.3 M_j — строго выпуклый конус, замыкание которого K_j — симплициальный конус размерности n с вершиной в $0 \in \mathbb{R}^n$. Итак, $S(g_j) \subset K_j$. Поэтому ряд Лорана g_j удовлетворяет условиям теоремы 2.7. Следовательно, $g_j \in H(\mathbb{T}^n)$ в том и только в том случае, когда при некотором $x = x_j$ справедливо соотношение (2.6). Покажем, что оно эквивалентно равенству (3.13), если $k \in S(g_j)$.

Конус K_j выполняет роль конуса K в обозначениях доказательства теоремы 2.7, причем его вершина $a = 0$. Прежде всего

$$\langle k, x \rangle > 0, \quad k \in K \setminus \{0\} \tag{3.14}$$

(см. (2.7)). Пусть $c_1, \dots, c_n$ — направляющие векторы образующих конуса K. Тогда каждый элемент $k \in K$ допускает однозначное представление

$$k = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_+.$$

Отсюда после элементарных преобразований при $k \in K \setminus \{0\}$ получаем

$$\frac{\langle k, x \rangle}{\|k\|} \geq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \langle c_i, x \rangle}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \|c_i\|} =: H(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\},\ \|y\| = \sum_{j=1}^{n} |y_j|. \tag{3.15}$$

Но $H(\lambda)$ — однородная порядка 0 функция. Поэтому $H(\lambda) = H(\mu)$, $\mu = \lambda/\|\lambda\|$. Учитывая, что $\langle c_i, x\rangle > 0$, $i = 1, \dots, n$ (см. (3.14)), находим, что $H(\mu)$ — непрерывная положительная функция, заданная на компакте $\{\mu \in \mathbb{R}^n_+ : \|\mu\| = 1\}$. Отсюда и из (3.15) заключаем о наличии постоянной $m > 0$ такой, что

$$m\|k\| \le \langle k, x\rangle \le \sum_{i=!}^{n} |k_i||x_i| \le \|k\| \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, \quad k \in S(g_j) \subset K \cap \mathbb{Z}^n,$$

где $K = K_j$. Эти неравенства и позволяют доказать требуемое утверждение. □

3°. Характеристики роста функций классов $H(\mathbb{T}^n)$, $\mathscr{A}(\mathbb{T}^n)$. По аналогии с показателями роста целых функций многих переменных (см. [2, гл. 6–8]) определим асимптотические характеристики функций класса $H(\mathbb{T}^n)$ и изучим их свойства. Рост любой функции $g \in H(\mathbb{T}^n)$ сравним с ее максимумом модуля

$$M_g(r) = \max\{|g(z)|,\ |z_j| = r_j,\ j = 1, \dots, n\}, \quad r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n_0. \tag{3.16}$$

Если $g \notin H(\mathbb{C}^n)$, то ассоциированная с ней функция $M_g(r)$ в общем случае не является возрастающей по каждой переменной (здесь и всюду далее $H(\mathbb{C}^n)$ — класс целых функций n комплексных переменных).

Определение 3.5 (ср. [2, определение 6.2.4]). *Функцией порядков* для $g \in H(\mathbf{T}^n)$ назовем функцию

$$\rho_g(u) = \varlimsup_{t\to\infty} (\ln t)^{-1} \ln^+ \ln^+ M_g(t^u),\ u \in \mathbb{R}^n;\ t^u = (t^{u_1}, \dots, t^{u_n}). \tag{3.17}$$

Функцию g назовем функцией *конечного порядка*, если ее функция порядков ρ_g — конечная функция в $\mathbb{R}^n$.

Предложение 3.6. *Пусть $g \in H(\mathbb{T}^n)$, а ρ_g — ее функция порядков. Тогда ρ_g — неотрицательная сублинейная функция в $\mathbb{R}^n$ (возможно, не всюду конечная).*

Доказательство не отличается от доказательства в случае целых функций, поскольку опирается на теорему A (см. введение, [2, предложение 6.2.6]).

Известно, что функция g из класса $H\mathbb{C}^n)$ является функцией конечного порядка (см. определение 3.5), если конечен ее порядок $\rho_g = \rho_g(\mathbb{I}) = \rho_g((1, \dots, 1)$ по совокупности переменных [2, следствие 6.2.11]. Заметим, что $-\mathbb{I} \in \mathbb{R}^n_-$, а отрицательный октант $\mathbb{R}^n_-$ содержится в конусе направлений убывания функции $M_g(e^u)$ (см. (3.16)). Подобный результат справедлив и для функций класса $\mathscr{A}(\mathbb{T}_n)$.

Предложение 3.7. *Пусть $g \in \mathscr{A}(\mathbb{T}_n)$. Тогда функция $V_g(u) = \ln M_g(e^u)$, $u \in \mathbb{R}^n$, принадлежит классу B_n (в обозначениях теоремы 1.9).*

Доказательство. Пусть f — целая функция, которой эквивалентна g. Согласно определению 3.1 найдется отображение

$$A : \mathbb{R}^n_0 \to \mathbb{R}^n_0, \quad r = A(t), \quad r_k = \prod_{j=1}^{n} t_j^{s_{kj}},\ k = 1, \dots, n, \tag{3.18}$$

где A — след отображения $\mathscr{F}$ на $\mathbb{R}^n_0$, $B = \|s_{kj}\|$ — целочисленная невырожденная квадратная $(n \times n)$-матрица такая, что $M_f(r) = g \circ A(t)$, $t \in \mathbb{R}^n_0$. Допустим, что $f \in H(\mathbb{C}^n)$. Это не ограничивает общности рассуждений, поскольку в случае, когда f — целая функция меньшего числа переменных, доказательство несколько усложняется лишь технически. Тогда линейное отображение $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $u = B(v)$, определяемое матрицей B, обладает свойством

$$V_f(v) := \ln M_f(e^v) = V_g[B(v)],\ v \in \mathbb{R}^n, \quad V_g(u) = V_f[B^{-1}(u)],\ u \in \mathbb{R}^n,$$

где B^{-1} — матрица, обратная к матрице B. По теореме А (см. введение) V_f — выпуклая функция, возрастающая по каждой переменной. Это и означает, что $V_g \in B_n$. $\square$

Предложение 3.8. *Пусть $g \in \mathscr{A}(\mathbb{T}_n)$, а K_V — конус направлений убывания функции $V_g(u) = \ln M_g(e^u)$, $u \in \mathbb{R}^n$, (см.* (3.16)) *с вершиной в* 0. *Пусть x — произвольно фиксированный элемент $\mathbb{R}^n$ такой, что $-x \in \operatorname{int} K_V$, а ρ_g — функция порядков для функции g (см.* (3.17)). *Если $\rho_g(x) < \infty$, то g — функция конечного порядка.*

Доказательство. Из предложения 3.7 вытекает, что $\dim K_V = n$. Поэтому $D = \{u \in \mathbb{R}^n : \rho_g(u) < \infty\}$ — непустое выпуклое множество (см. предложение 3.6). По условию $x \in D$, причем $-x \in \operatorname{int} K_V$. Сублинейность функции ρ_g включает свойство ее положительной однородности, т. е.

$$\rho_f(\alpha u) = \alpha \rho_f(u), \quad \alpha > 0,\ u \in \mathbb{R}^n. \tag{3.19}$$

Следовательно, $\{u = tx : t > 0\} \subset D$. Остается воспользоваться следствием 1.14: $D = \mathbb{R}^n$. $\square$

Если $g \in H(\mathbb{T}^n)$ — функция конечного порядка (см. определение 3.5), то $D_\rho = \{u \in \mathbb{R}^n : \rho_g(u) > 0\}$ — конус всех параболических направлений ее нормального порядка роста. Из свойства (3.19) функции ρ_g заключаем: множество D_ρ определяется своим сечением

$$T_g = \big\{u \in \mathbb{R}^n_0 : \rho_g(u) = 1\big\}, \tag{3.20}$$

которое по аналогии со случаем целых функций [2, определение 6.2.16] назовем *гиперповерхностью порядков* функции g.

Более тонкие асимптотические характеристики функции M_g (типы) естественно исследовать на совокупности параболических направлений роста вида

$$L(r,u) = \{rt^u = (r_1 t^{u_1}, \dots, r_n t^{u_n}) : t > 0\}, \quad u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ r \in \mathbb{R}^n_0. \tag{3.21}$$

Теорема 3.9. *Пусть $g \in \mathscr{A}(\mathbb{T}_n)$. Для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ след функции $\Phi_g = \ln^+ M_g$ на каждом параболическом луче системы $\big\{L(r,x), r \in \mathbb{R}^n_0\big\}$, (см.* (3.21)) *имеет порядок роста*

$$\psi_x(r) = \varlimsup_{t\to\infty} (\ln t)^{-1} \cdot \ln^+ \Phi_g(rt^x) \equiv \rho_g(x), \quad r \in \mathbb{R}^n_0, \tag{3.22}$$

где ρ_g — функция порядков для функции g.

Доказательство. Воспользуемся обозначениями доказательства предложения 3.7. По той же причине допускаем, что f — целая функция n комплексных переменных. Рассмотрим $(n\times n)$-матрицу $B^{-1} = \|q_{kj}\|$, обратную к матрице B. Она определяет отображение A^{-1}, обратное к отображению A (см. (3.18)):

$$A^{-1} : \mathbb{R}^n_0 \to \mathbb{R}^n_0, \quad v = A^{-1}(p), \quad v_k = B_k(p) := \prod_{j=1}^n p_j^{q_{kj}},\ k = 1, \dots, n.$$

Делая замену переменных $p = rt^x$, получим

$$B_k(rt^x) = B_k(r)t^{q_k}, \quad r \in R_0^n,\ t > 0,\ q_k = \sum_{j=1}^n q_{kj}x_j,\ k = 1, \dots, n.$$

Заметим, что $q = (q_1, \dots, q_n) \neq 0$, поскольку $x \neq 0$ (B^{-1} — невырожденная матрица). Тогда

$$\Phi_g(rt^x) = \ln^+ M_f[\tau_1 t^{q_1}, \dots, \tau_n t^{q_n}], \quad \tau_k = B_k(r),\ k = 1, \dots, n,\ r \in \mathbb{R}_0^n,\ t > 0. \tag{3.23}$$

Согласно лемме 6.2.8 из [2] теорема 3.9 справедлива для целых функций. Поэтому

$$\varphi_q(\tau) = \varlimsup_{t\to\infty} (\ln t)^{-1} \cdot \ln^+ \ln^+ M_f(\tau t^x) \equiv \rho_f(q), \quad \tau \in \mathbb{R}_0^n, \tag{3.24}$$

где ρ_f — функция порядков для функции f. В частности,

$$\rho_f(q) = \varphi_q[B_1(\mathbb{I}), \dots, B_n(\mathbb{I})], \quad \mathbb{I} = (1, \dots, 1).$$

Отсюда и из (3.23), (3.24), учитывая, что отображение A — изоморфизм, заключаем, что тождество (3.22) верно (см. (3.17)). $\square$

По аналогии с классом $H(\mathbb{C}^n)$ введем «типы» для функций класса $H(\mathbb{T}^n)$.

Определение 3.10 (ср. [2, определение 6.3.1]). Пусть $g \in H(\mathbb{T}_n)$, ρ_g — функция порядков для функции g. Пусть $\rho_g(x) \in (0, \infty)$ для фиксированного $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Функцию

$$\sigma_g(r; x) = \varlimsup_{t\to\infty} t^{-\rho_g(x)} \ln^+ M_g(rt^x), \quad r \in \mathbb{R}_0^n,$$

назовем *функцией x-типов* для функции g, а величину $\sigma_g(x) := \sigma_g(\mathbb{I}; x)$ — ее *типом по направлению x*.

Замечание. Благодаря формуле (3.19) имеем

$$\sigma_g(\cdot; x) = \sigma_g(\cdot; x\tau), \quad \tau > 0.$$

Поэтому без ограничения общности в предположениях определения 3.10 достаточно потребовать выполнение условия $x \in T_g$ (см. (3.20)). Подобное свойство можно использовать при определении *x-индикатора* функции g [2, гл. 8]:

$$h_g(z; x) = \varlimsup_{w\to z} \varlimsup_{r\to\infty} t^{-1} \cdot \ln |g(wt^x)|, \quad z \in \mathbb{T}^n,\ wt^x = (w_1 t^{x_1}, \dots, w_n t^{x_n}).$$

Предложение 6.3.2 в [2] и его доказательство с небольшими модификациями справедливы и для функций класса $H(\mathbb{T}^n)$.

Предложение 3.11. *В обозначениях определения* 3.10 $\ln \sigma_g(e^u; x)$ *— выпуклая функция в области определения $\sigma_g(e^u; x)$, причем*

$$\sigma_g(r\lambda^x; x) = \sigma_g(r; x)\lambda^{\rho_g(x)}, \quad r \in \mathbb{R}_0^n,\ \lambda > 0.$$

Все изложенные результаты и их доказательства содержатся в препринте [11]. Основные утверждения работы анонсированы в [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.
2. *Маергойз Л. С.* Асимптотические характеристики целых функций и их приложения в математике и биофизике. Новосибирск: Наука, 1991.
3. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
4. *Маергойз Л. С.* Индикаторные диаграммы целой функции многих переменных и их приложения к суммированию кратных рядов Лорана. Красноярск, 2006. 66 с. (Препринт / Красноярский научный центр СО РАН; № 311М).
5. *Passare M., Sadykov T., Tsikh A.* Singularities of hypergeometric functions in several variables // Compositio Math. 2005. V. 141. P. 787–810.
6. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
7. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1985. Ч. II.
8. *Лежен Дирихле П. Г.* Лекции по теории чисел. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
9. *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона (разрешение особенностей) // Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1983. С. 207–239. (Итоги науки и техники).
10. *Fulton W.* Introduction to toric varieties. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993.
11. *Маергойз Л. С.* Расширение класса целых функций многих переменных и связанные с ним вопросы теории роста. Красноярск, 2013. 36 с. (Препринт / Сибирский федеральный университет).
12. *Маергойз Л. С.* Многомерный аналог разложения голоморфной функции в ряд Лорана и смежные вопросы // Докл. АН. 2013. Т. 452, № 5. С. 486–489.

Статья поступила 21 ноября 2013 г.

Маергойз Лев Сергеевич,
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
bear.lion@mail.ru