Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2014. Том 55, № 5

УДК 517.98

О ПОРЯДКОВО ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРАХ, СОХРАНЯЮЩИХ ДИЗЪЮНКТНОСТЬ

А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе

Аннотация. Цель статьи — показать, что некоторые свойства порядково ограниченных операторов в векторных решетках являются просто булевозначными интерпретациями элементарных свойств порядково ограниченных функционалов. Описана технология анализа и приведены новые результаты о порядково ограниченных операторах, сохраняющих дизъюнктность.

Ключевые слова: булевозначный анализ, векторная решетка, оператор, сохраняющий дизъюнктность; решеточный гомоморфизм.

Ю. Г. Решетняку к 85-летию

§ 1. Введение

Рассматриваются некоторые свойства порядково ограниченных операторов в векторных решетках, представляющие собой булевозначные интерпретации элементарных свойств порядково ограниченных функционалов. Мы ограничиваем изложение операторами, сохраняющими дизъюнктность, и исследуем три задачи: характеризацию операторов, сохраняющих дизъюнктность в терминах ядер; условия n-дизъюнктности сумм операторов, сохраняющих дизъюнктность; описание n-дизъюнктных множеств операторов.

Булевозначный анализ не только связан с многими топологическими и геометрическими идеями, но также дает технику для расширения содержания уже имеющихся теорем. Каждая теорема, доказанная классическими методами, приобретает некоторое новое неочевидное содержание, связанное с «переменными множествами». Говоря более строго, каждая из имеющихся теорем порождает целое семейство скрытых «близких родственников», занумерованных всеми булевыми алгебрами или, что эквивалентно, негомеоморфными пространствами Стоуна. Эти методы просты, наглядны и легки в применении. Поэтому они могут быть полезны работающему математику.

Структура статьи следующая. В § 2 содержится набросок булевозначного аппарата, позволяющего сводить некоторые задачи, касающиеся операторов в пространствах Канторовича (порядково полных векторных решетках), к рассмотрению функционалов. В § 3 иллюстрируется использование метода характеризации линейных и билинейных операторов, сохраняющих дизъюнктность, в терминах ядер их слоев. В § 4 мы занимаемся следующим вопросом: при каких условиях сумма порядково ограниченных операторов, сохраняющих дизъюнктность, является n-дизъюнктным оператором? В § 5 вводится понятие n-дизъюнктного множества операторов и дается полное описание максимальных n-дизъюнктных множеств порядково ограниченных операторов.

Обозначим символом $:=$ оператор присваивания. Пусть символы $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ означают множества натуральных и вещественных чисел соответственно. Всюду ниже $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра с супремумом $\vee$, инфимумом $\wedge$, дополнением $(\cdot)^*$, единицей $\mathbb{1}$ и нулем $\mathbb{0}$; алгебраическая операция $\Rightarrow$ в $\mathbb{B}$ определяется как $x \Rightarrow y := x^* \vee y$. *Разбиение единицы* в $\mathbb{B}$ — это семейство $(b_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathbb{B}$ такое, что $\bigvee\limits_{\xi\in\Xi} b_\xi = \mathbb{1}$ и $b_\xi \wedge b_\eta = \mathbb{0}$ при $\xi \neq \eta$. Мы используем $\Longrightarrow$ для обозначения импликации, в то время как употребление в теоретико-множественных формулах $\to$ вместо $\Longrightarrow$ означает, что формула интерпретируется в булевозначном универсуме.

Всюду далее под *векторной решеткой* будем подразумевать архимедову вещественную векторную решетку. Обозначим булеву алгебру проекторов на компоненты в векторной решетке X символом $\mathbb{P}(X)$, и пусть символы $\mathscr{Z}(X)$ и $\mathrm{Orth}(X)$ обозначают *идеальный центр* решетки X и *f-алгебру ортоморфизмов* на X соответственно. *Универсальное пополнение* $X^{\mathbb{u}}$ векторной решетки X всегда рассматривается как полупростая f-алгебра, умножение в которой однозначно определяется фиксированием порядковой единицы как единицы кольца. Пространство всех порядково ограниченных линейных операторов из X в Y обозначим символом $L^{\sim}(X,Y)$. Теорема Рисса — Канторовича утверждает, что если Y — пространство Канторовича, то $L^{\sim}(X,Y)$ обладает тем же свойством.

Линейный оператор T из X в Y называют *решеточным гомоморфизмом*, если T сохраняет решеточные операции, т. е. $T(x_1 \vee x_2) = Tx_1 \vee Tx_2$ (и потому $T(x_1 \wedge x_2) = Tx_1 \wedge Tx_2$) для всех $x_1, x_2 \in X$. Векторные решетки X и Y *решеточно изоморфны*, если существует *решеточный изоморфизм* T из X на Y, т. е. T и T^{-1} — решеточные гомоморфизмы.

Необходимую информацию из теории порядково ограниченных операторов можно найти в [1–4]; о булевозначных моделях теории множеств — в [5, 6] и о булевозначном анализе — в [7, 8].

§ 2. Сведения из теории булевозначных моделей и булевозначного анализа

В этом параграфе кратко изложим некоторые вспомогательные утверждения о структуре булевозначных моделей и работы с ними. Детали можно найти в [7, 8].

2.1. Пусть $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра, и пусть On — класс всех ординалов. *Булевозначный универсум* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ или, другими словами, *универсум булевозначных множеств* — это класс $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} := \bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{On}} \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}_\alpha$, где семейство $\big(\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}_\alpha\big)_{\alpha\in\mathrm{On}}$ определяется рекурсивно:

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}_\alpha := \big\{ x : x \text{ — функция } \wedge\ (\exists\,\beta)\big(\beta < \alpha\ \wedge\ \mathrm{dom}(x) \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}_\beta\ \wedge\ \mathrm{im}(x) \subset \mathbb{B}\big)\big\}.$$

Для формулировки утверждений об элементах $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ рассмотрим произвольную формулу $\varphi = \varphi(u_1, \dots, u_n)$ языка теории множеств и заменим переменные $u_1, \dots, u_n$ элементами $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Тогда получим некоторое утверждение об объектах (= булевозначных множествах) $x_1, \dots, x_n$. На $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ задан естественный способ сопоставления каждому такому утверждению некоторого элемента $[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!] \in \mathbb{B}$, действующему как «*булева оценка истинности*» формулы $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ в универсуме $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Оценка истинности определяется по индукции с учетом способа построения формул из атомарных формул $x \in y$ и $x = y$ и естественным выбором оценок истинности $[\![x \in y]\!] \in \mathbb{B}$ и $[\![x = y]\!] \in \mathbb{B}$, где $x, y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

В дальнейшем работаем с *отделимым универсумом* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. считаем, что соотношения $x = y$ и $[\![x = y]\!] = \mathbb{1}$ равносильны для $x, y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Говорят, что утверждение $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *истинно* или что элементы $x_1, \dots, x_n$ *обладают свойством* φ *в* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, если $[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!] = \mathbb{1}$. В этом случае мы пишем $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \vDash \varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Пара $(\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}, [\![\cdot]\!])$ называется *булевозначной моделью* ZFC (теории Цермело — Френкеля с аксиомой выбора). Важнейшие свойства булевозначной модели сформулированы в четырех фундаментальных принципах (см. [5–7]).

2.2. Принцип переноса. *Если* $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — *теорема* ZFC, *то*

$$(\forall\, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})})\ \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \vDash \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

также теорема ZFC.

Допуская вольность, этот результат также записывают в виде $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \vDash$ «теорема ZFC» или $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \vDash$ ZFC. При этом говорят, что $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ *является булевозначной моделью* ZFC.

2.3. Принцип максимума. *Для каждой формулы* $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ *языка теории множеств в* ZFC *доказуемо утверждение: для любого набора* $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ *существует элемент* $x_0 \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ *такой, что*

$$[\![(\exists\, u)\, \varphi(u, x_1, \dots, x_n)]\!] = [\![\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n)]\!].$$

2.4. Принцип перемешивания. *Для любого семейства* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *в* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ *и любого разбиения единицы* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *в* $\mathbb{B}$ *существует* (*единственный*) *элемент* x *из* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ *такой, что* $b_\xi \le [\![x = x_\xi]\!]$ *для всех* $\xi \in \Xi$.

Этот элемент называется *перемешиванием* семейства (x_ξ) посредством разбиения единицы (b_ξ) и обозначается символом $x = \mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x_\xi) = \mathrm{mix}\{b_\xi x_\xi : \xi \in \Xi\}$. Для $X \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ обозначим символом $\mathrm{mix}(X)$ множество всех перемешиваний $\mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x_\xi)$ всеми разбиениями единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ такими, что $\{x_\xi : \xi \in \Xi\} \subset X$.

Имеется каноническое вложение универсума фон Неймана $\mathbb{V}$ в булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, которое сопоставляет элементу $x \in \mathbb{V}$ его *стандартное имя* $x^\wedge \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Стандартное имя отображает $\mathbb{V}$ на $\mathbb{V}^{(\mathbb{2})}$, где $\mathbb{2} := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$. Формула называется *ограниченной*, если она эквивалентна (в ZFC) формуле, в которой каждая связанная переменная x ограничена квантором вида $(\forall\, x \in y)$ или $(\exists\, x \in y)$.

2.5. Ограниченный принцип переноса. *Для каждой ограниченной формулы* φ *языка теории множеств в* ZFC *доказуемо утверждение: для любого набора* $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}$ *имеет место эквивалентность:*

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \Longleftrightarrow \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi(x_1^\wedge, \dots, x_n^\wedge).$$

2.6. Для $X \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ определим *спуск* $X{\downarrow}$ $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$-множества X как

$$X{\downarrow} := \{x \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} : [\![x \in X]\!] = \mathbb{1}\}.$$

Заметим, что $X{\downarrow}$ — множество. Пусть $X, Y, f, P \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ таковы, что $[\![f : X \to Y]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![P \subset X^2]\!] = \mathbb{1}$, т. е. f — отображение из X в Y и P — бинарное отношение на X в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. В этом случае $f{\downarrow}$ является единственным отображением из $X{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$, для которого $[\![f{\downarrow}(x) = f(x)]\!] = \mathbb{1}$ $(x \in X{\downarrow})$, и $P{\downarrow}$ — единственное бинарное отношение на $X{\downarrow}$ такое, что $(x_1, x_2) \in P{\downarrow} \Longleftrightarrow [\![(x_1, x_2) \in P]\!] = \mathbb{1}$.

Спуск отображения *экстенсионален*: для всех $x_1, x_2 \in X{\downarrow}$ имеем $[\![x_1 = x_2]\!] \leq [\![f{\downarrow}(x_1) = f{\downarrow}(x_2)]\!]$.

Пусть $x \in \mathbb{V}$ и $x \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. пусть x есть некоторое множество булевозначных множеств или, другими словами, $x \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(\mathbb{B})})$. Положим $\varnothing{\uparrow} := \varnothing$ и $\operatorname{dom}(x{\uparrow}) := x$, $\operatorname{im}(x{\uparrow}) := \{\mathbb{1}\}$, если $x \neq \varnothing$. Элемент $x{\uparrow}$ (отделимого универсума $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. выделенный представитель класса $\{y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} : [\![y = x{\uparrow}]\!] = \mathbb{1}\}$) называется *подъемом* x.

2.7. Предположим, что $X \in \mathbb{V}$, $X \neq \varnothing$, т. е. X — непустое множество. Обозначим символом ι стандартное именное вложение $x \mapsto x^{\wedge}$ $(x \in X)$. Тогда $\iota(X){\uparrow} = X^{\wedge}$ и $X = \iota^{-1}(X^{\wedge}{\downarrow})$. Используя выписанные выше соотношения, можно распространить операции спуска и подъема на случай, когда Φ — соответствие из X в $Y{\downarrow}$ и $[\![\,\Psi$ — соответствие из $X^{\wedge}$ в $Y\,]\!] = \mathbb{1}$, где $Y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Именно, полагаем $\Phi{\upharpoonleft} := (\Phi \circ \iota^{-1}){\uparrow}$ и $\Psi{\downharpoonleft} := \Psi{\downarrow} \circ \iota$. В этом случае $\Phi{\upharpoonleft}$ есть *модифицированный подъем* Φ и $\Psi{\downharpoonleft}$ есть *модифицированный спуск* Ψ. Легко видеть, что $\Phi{\upharpoonleft}$ есть единственное соответствие в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, удовлетворяющее соотношению $[\![\Phi{\upharpoonleft}(x^{\wedge}) = \Phi(x){\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$ $(x \in X)$. Аналогично $\Psi{\downharpoonleft}$ — единственное соответствие из X в $Y{\downarrow}$, удовлетворяющее равенству $\Psi{\downharpoonleft}(x) = \Psi(x^{\wedge}){\downarrow}$ $(x \in X)$. Если $\Phi := f$ и $\Psi := g$ — функции, то эти соотношения принимают вид $[\![f{\upharpoonleft}(x^{\wedge}) = f(x)]\!] = \mathbb{1}$ и $g{\downharpoonleft}(x) = g(x^{\wedge})$ для всех $x \in X$. Кроме того, $[\![f(A){\uparrow} = f{\upharpoonleft}(A^{\wedge})]\!] = \mathbb{1}$ для $A \subset X$.

2.8. *Пусть символы $[X, Y{\downarrow}] \in \mathbb{V}$ и $[\![X^{\wedge}, Y]\!] \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ означают множества всех отображений из X в $Y{\downarrow}$ и из $X^{\wedge}$ в Y соответственно. Соответствия $f \mapsto f{\upharpoonleft}$ и $g \mapsto g{\downharpoonleft}$ взаимно обратны и осуществляют биекцию между $[X, Y{\downarrow}]$ и $[\![X^{\wedge}, Y]\!]{\downarrow}$.*

2.9. Принципы переноса и максимума обеспечивают существование различных «булевозначных объектов». Если формула $(\exists\, u)\, \varphi(u, u_1, \dots, u_n)$ является теоремой ZFC, то по принципу переноса эта теорема также справедлива в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. $[\![(\exists\, u)\, \varphi(u, x_1, \dots, x_n)]\!] = \mathbb{1}$, и по принципу максимума существует $x_0 \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ со свойством $[\![\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n)]\!] = \mathbb{1}$. Принцип перемешивания объясняет нам, как эти «булевозначные объекты» можно строить.

Например, применяя принципы переноса и максимума к ZFC-теореме «Существует поле вещественных чисел», находим элемент $\mathscr{R} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, для которого $[\![\,\mathscr{R}$ есть поле вещественных чисел$\,]\!] = \mathbb{1}$. Мы называем $\mathscr{R}$ *вещественными числами* в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Следующий результат, принадлежащий Гордону [9], говорит о том, что интерпретация вещественных чисел в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ является универсально полной векторной решеткой, у которой булева алгебра проекций на компоненты изоморфна $\mathbb{B}$.

2.10. Теорема Гордона. *Пусть $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра, и пусть $\mathscr{R}$ — поле вещественных чисел в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Тогда имеют место утверждения:*

(1) *внутреннее поле $\mathscr{R} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ может быть выбрано так, что*

$$[\![\mathbb{R}^{\wedge} \text{ — плотное подполе поля } \mathscr{R}]\!] = \mathbb{1};$$

(2) *алгебраическая структура $\mathscr{R}{\downarrow}$ (со спущенными операциями и отношением порядка) является универсально полной векторной решеткой со слабой порядковой единицей $\mathbb{1} := 1^{\wedge}$;*

(3) *имеется булев изоморфизм χ из $\mathbb{B}$ на $\mathbb{P}(\mathscr{R}{\downarrow})$ такой, что*

$$\chi(b)x = \chi(b)y \iff b \leq [\![\, x = y \,]\!], \quad \chi(b)x \leq \chi(b)y \iff b \leq [\![\, x \leq y \,]\!] \qquad (\mathbb{G})$$

для всех $x, y \in \mathscr{R}{\downarrow}$ и $b \in \mathbb{B}$.

Этот замечательный результат, устанавливающий имманентную связь между булевозначным анализом и теорией векторных решеток, принадлежит Гордону [9]. Теорема Гордона показала, что всякая универсально полная векторная решетка доставляет новую модель вещественных чисел, имеющую те же права, что и любая другая. Кроме того, всякая архимедова векторная решетка, в частности произвольное пространство L^p, $p \geq 1$, поднимается до плотной подрешетки в решетке вещественных чисел $\mathbb{R}$ в подходящем булевозначном универсуме, так что $\mathscr{R}{\downarrow}$ становится ее универсальным пополнением.

2.11. Тот факт, что X является векторной решеткой над упорядоченным полем $\mathbb{R}$, может быть переписан как ограниченная формула, скажем, $\varphi(X, \mathbb{R})$. Следовательно, в силу ограниченного принципа переноса, приходим к тождеству $[\![\, \varphi(X^{\wedge}, \mathbb{R}^{\wedge}) \,]\!] = \mathbb{1}$, которое сводится к утверждению о том, что $X^{\wedge}$ — векторная решетка над упорядоченным полем $\mathbb{R}^{\wedge}$ в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Конус положительных элементов X_+ определяется ограниченной формулой

$$\varphi(X, X_+) \equiv (\forall\, x \in X_+)(x \in X) \wedge (\forall\, x \in X)(x \in X_+ \leftrightarrow x \geq 0).$$

Значит, $(X^{\wedge})_+ = (X_+)^{\wedge}$ ввиду ограниченного принципа переноса. По той же причине

$$|x^{\wedge}| = |x|^{\wedge}, \quad (x \vee y)^{\wedge} = x^{\wedge} \vee y^{\wedge}, \quad (x \wedge y)^{\wedge} = x^{\wedge} \wedge y^{\wedge}$$

для всех $x, y \in X$, поскольку решеточные операции $\vee$, $\wedge$, $|\cdot|$ в X определены ограниченными формулами. В частности, $x \perp y \iff [\![x^{\wedge} \perp y^{\wedge}]\!] = \mathbb{1}$ для всех $(x, y \in X)$.

2.12. Пусть $X^{\wedge\sim} := L^{\sim}(X^{\wedge}, \mathscr{R})$ — пространство регулярных $\mathbb{R}^{\wedge}$-линейных функционалов из $X^{\wedge}$ в $\mathscr{R}$. Более точно, $\mathscr{R}$ рассматривается как векторное пространство над полем $\mathbb{R}^{\wedge}$, и по принципу максимума найдется $X^{\wedge\sim} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ такое, что $[\![X^{\wedge\sim}$ — векторное пространство над $\mathscr{R}$, образованное $\mathbb{R}^{\wedge}$-линейными порядково ограниченными функционалами из $X^{\wedge}$ в $\mathscr{R}$, упорядоченными конусом положительных функционалов $]\!] = \mathbb{1}$. Функционал $\tau \in X^{\wedge\sim}$ считается *положительным*, когда $(\forall\, x \in X^{\wedge})\, \tau(x) \geq 0$.

Легко видеть, что теорема Рисса — Канторовича остается верной, если X — векторная решетка над плотным подполем $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$, а Y — порядково полная векторная решетка (над $\mathbb{R}$) и $L^{\sim}(X, Y)$ заменяется на $L^{\sim}_{\mathbb{F}}(X, Y)$, векторное пространство над $\mathbb{R}$ всех $\mathbb{F}$-линейных порядково ограниченных операторов из X в Y, упорядоченных конусом положительных операторов: $L^{\sim}_{\mathbb{F}}(X, Y)$ — порядково полная векторная решетка. Кроме того, сохраняются формулы порядкового исчисления. В силу этого наблюдения $X^{\wedge\sim}$ является порядково полной векторной решеткой в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и потому спуск $X^{\wedge\sim}{\downarrow}$ решетки $X^{\wedge\sim}$ есть порядково полная векторная решетка. Следующая теорема обобщает 2.8.

2.13. Теорема. *Пусть X и Y — векторные решетки, где Y универсально полна и представляется в виде $Y = \mathscr{R}{\downarrow}$. Для всех $T \in L^{\sim}(X, Y)$ и $\tau \in X^{\wedge\sim}{\downarrow}$ имеем $[\![\, T{\Uparrow} \in X^{\wedge\sim} \,]\!] = \mathbb{1}$ и $\tau{\Downarrow} \in L^{\sim}(X, \mathscr{R}{\downarrow})$. Кроме того, модифицированные подъем $T \mapsto T{\Uparrow}$ и спуск $\tau \mapsto \tau{\Downarrow}$ взаимно обратны и осуществляют решеточный изоморфизм между порядково полными векторными решетками $L^{\sim}(X, Y)$ и $X^{\wedge\sim}{\downarrow}$.*

2.14. Возьмем $S, T \in L^{\sim}(X, Y)$ и положим $\sigma := S{\Uparrow}$, $\tau := T{\Uparrow}$. Пусть $L^{\sim}_{dp}(X, Y)$ и $\mathrm{Hom}(X, Y)$ — множества всех порядково ограниченных операторов, сохраняющих дизъюнктность, и решеточных гомоморфизмов из X в Y. Следующие утверждения сразу следуют из 2.13:

(1) $S \leq T \iff [\![\sigma \leq \tau]\!] = \mathbb{1}$,

(2) $S = |T| \iff [\![\sigma = |\tau|]\!] = \mathbb{1}$,

(3) $S \perp T \iff [\![\sigma \perp \tau]\!] = \mathbb{1}$,

(4) $T \in L^{\sim}_{dp}(X, Y) \iff [\![\tau \in (X^{\wedge\sim})_{dp}]\!] = \mathbb{1}$,

(5) $T \in \mathrm{Hom}(X, Y) \iff [\![\tau \in \mathrm{Hom}(X^{\wedge}, \mathscr{R})]\!] = \mathbb{1}$.

§ 3. Характеризация операторов, сохраняющих дизъюнктность

Как отмечено в [10], линейный оператор T из векторной решетки X в порядково полную векторную решетку Y в некотором смысле определяется с точностью до ортоморфизма семейством ядер *слоев* πT ($\pi \in \mathbb{P}(Y)$) оператора T. В этом параграфе используем аналогичное соображение для характеризации порядково ограниченных операторов, сохраняющих дизъюнктность.

3.1. Определение. Линейный оператор $T : X \to Y$ называется *сохраняющим дизъюнктность*, если из $x \perp y$ следует, что $Tx \perp Ty$ для всех $x, y \in X$. Билинейный оператор $B : X \times Y \to Z$ называется *сохраняющим дизъюнктность* (*решеточным биморфизмом*), если операторы $B(x, \cdot) : y \mapsto B(x, y)$ $(y \in Y)$ и $B(\cdot, y) : x \mapsto B(x, y)$ $(x \in X)$ сохраняют дизъюнктность для всех $x \in X$ и $y \in Y$ (соответственно являются решеточными гомоморфизмами для всех $x \in X_+$ и $y \in Y_+$).

Для полноты изложения приведем хорошо известную характеризацию ограниченных функционалов, сохраняющих дизъюнктность, в которой $\mathbb{F}$ — подполе поля вещественных чисел $\mathbb{R}$.

3.2. Теорема. *Пусть X — векторная решетка над $\mathbb{F}$. Для порядково ограниченного $\mathbb{F}$-линейного функционала $f : X \to \mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *f сохраняет дизъюнктность;*

(2) *$|f|$ — решеточный гомоморфизм;*

(3) *если $g \in X^{\sim}$ и $0 \leq g \leq |f|$, то $g = \lambda|f|$ для некоторого $\lambda \in [0, 1]$;*

(4) *либо f, либо $-f$ является решеточным гомоморфизмом;*

(5) *$\ker(f) := f^{-1}(0)$ — порядковый идеал в X.*

3.3. Лемма. *Пусть X и Y — векторные решетки. Для порядково ограниченного $\mathbb{F}$-билинейного функционала $b : X \times Y \to \mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *b сохраняет дизъюнктность;*

(2) *$\ker(b) = (X_0 \times Y) \cup (X \times Y_0)$ для некоторых порядковых идеалов $X_0 \subset X$ и $Y_0 \subset Y$;*

(3) *существуют решеточные гомоморфизмы $g : X \to \mathbb{R}$ и $h : Y \to \mathbb{R}$ такие, что либо $b(x, y) = g(x)h(y)$, либо $b(x, y) = -g(x)h(y)$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$.*

Доказательство. Предположим, что $\ker(b) = (X_0 \times Y) \cup (X \times Y_0)$, и возьмем $y \in Y$. Если $y \in Y_0$, то $b(\cdot, y) \equiv 0$, иначе $\ker(b(\cdot, y)) = X_0$ и $b(\cdot, y)$ сохраняет дизъюнктность в силу 3.2(5). Аналогично $b(x, \cdot)$ сохраняет дизъюнктность для всех $x \in X$ и, таким образом, (2) $\Longrightarrow$ (1). Импликация (1) $\Longrightarrow$ (3) установлена в [11, теорема 3.2], а импликация (3) $\Longrightarrow$ (1) тривиальна: нужно положить $X_0 = \ker(g)$ и $Y_0 = \ker(h)$. $\square$

3.4. Теорема. *Пусть X, Y, Z — векторные решетки, причем Z обладает свойством проектирования. Для порядково ограниченного билинейного оператора $B : X \times Y \to Z$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *B сохраняет дизъюнктность;*

(2) *существуют порядковый проектор $\varrho \in \mathbb{P}(Z)$ и решеточные гомоморфизмы $S : X \to Z^{\mathtt{u}}$ и $T : Y \to Z^{\mathtt{u}}$ такие, что $B(x, y) = \varrho S(x)T(y) - \varrho^{\perp} S(x)T(y)$ для всех $(x, y) \in X \times Y$;*

(3) *ядро каждого слоя πB оператора B, где $\pi \in \mathbb{P}(Z)$, представляется в виде $\ker(\pi B) = (X_\pi \times Y) \cup (X \times Y_\pi)$ для некоторых порядковых идеалов $X_\pi \subset X$ и $Y_\pi \subset Y$.*

Доказательство. Импликация (1) $\Longrightarrow$ (2) была выведена из 3.3(3) в [11, следствие 3.3], а импликация (2) $\Longrightarrow$ (3) очевидна. Таким образом, нам нужно лишь доказать, что (3) $\Longrightarrow$ (1). Предположим, что для любого $\pi \in \mathbb{P}(Y)$ имеет место представление $\ker(\pi B) = (X_\pi \times Y) \cup (X \times Y_\pi)$ для подходящих порядковых идеалов X_π в X и Y_π в Y. Можно предполагать, что $Y \subset \mathscr{R}{\downarrow}$ в силу теоремы Гордона. Пусть $|u| \leq |x|$, $|v| \leq |y|$. Положим $\pi := [\![B(x, y) = 0]\!]$. Тогда $\pi B(x, y) = 0$ в силу ($\mathbb{G}$) и $\pi B(u, v) = 0$ по условию. Снова привлекая ($\mathbb{G}$), имеем $\pi \leq [\![B(u, v) = 0]\!]$. Таким образом, $[\![B(x, y) = 0]\!] \leq [\![B(u, v) = 0]\!]$ или, что то же самое, $[\![B(x, y) = 0]\!] \Rightarrow [\![B(u, v) = 0]\!] = \mathbb{1}$. Теперь положим $\beta := B{\uparrow}$ и убедимся, что $\ker(\beta) = (\mathscr{X} \times Y^\wedge) \cup (X^\wedge \times \mathscr{Y})$ для некоторых порядковых идеалов $\mathscr{X}$ в $X^\wedge$ и $\mathscr{Y}$ в $Y^\wedge$ в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Так как $|u| \leq |x|$ тогда и только тогда, когда $[\![u^\wedge \leq x^\wedge]\!] = \mathbb{1}$, выводим:

$$
\begin{aligned}
&[\![\ker(\beta) = (\mathscr{X} \times Y^\wedge) \cup (X^\wedge \times \mathscr{Y}) \text{ для некоторых порядковых идеалов} \\
&\qquad\qquad\qquad \mathscr{X} \subset X^\wedge \text{ и } \mathscr{Y} \subset Y^\wedge]\!] \\
&= [\![(\forall\, x, u \in X^\wedge)\, (\forall\, y, v \in Y^\wedge)\, (\beta(x, y) = 0 \wedge |u| \leq |x| \wedge |v| \leq |y| \;\to\; \beta(u, v) = 0)]\!] \\
&= \bigwedge_{x,u \in X} \bigwedge_{y,v \in X} [\![(\beta(x^\wedge, y^\wedge) = 0]\!] \wedge [\![|u^\wedge| \leq |x^\wedge|]\!] \wedge [\![|v^\wedge| \leq |y^\wedge|]\!] \;\Rightarrow\; [\![\beta(u^\wedge, v^\wedge) = 0]\!] \\
&= \bigwedge \{[\![B(x, y) = 0]\!] \;\Rightarrow\; [\![B(u, v) = 0]\!] : x, u \in X;\; y, v \in Y; |u| \leq |x|,\; |v| \leq |y|\} = \mathbb{1}.
\end{aligned}
$$

Применив эквивалентность 3.3((1)$\Longleftrightarrow$(3)) внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, видим, что β сохраняет дизъюнктность. Следовательно, B сохраняет дизъюнктность в силу 2.14(5). $\square$

3.5. Теорема. *Предположим, что Y обладает свойством проектирования. Порядково ограниченный линейный оператор $T : X \to Y$ сохраняет дизъюнктность тогда и только тогда, когда $\ker(bT)$ — порядковый идеал в X для всякого проектора $b \in \mathbb{P}(Y)$.*

Доказательство. Применим теорему 3.4 к билинейному оператору $B : X \times \mathbb{R} \to Y$, определенному формулой $B(x, \lambda) = \lambda T(x)$ для всех $x \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

3.6. Определение. Билинейный оператор $B : X \times X \to Y$ называется *ортосимметричным*, если из $|x| \wedge |y| = 0$ следует, что $B(x, y) = 0$ для произвольных $x, y \in X$ (см. [12]). *Симметричное ядро* $\ker_s(B)$ ортосимметричного билинейного оператора B определяется следующим образом: $\ker_s(B) := \{x \in X : B(x, |x|) = 0\}$.

3.7. Следствие. *Пусть X и Y — векторные решетки, где Y обладает свойством проектирования. Порядково ограниченный ортосимметричный билинейный оператор $B : X \times X \to Y$ сохраняет дизъюнктность тогда и только* *тогда, когда симметричное ядро* $\ker_s(\pi B)$ *каждого слоя* πB *есть порядковый идеал в* X.

Доказательство. Для любой векторной решетки X существуют (единственная с точностью до изоморфизма) векторная решетка $X^{\odot}$ и решеточный биморфизм $\odot : (x, y) \mapsto x \odot y$ из $X \times X$ в $X^{\odot}$ такие, что для положительного ортосимметричного билинейного оператора из $X \times Y$ в некоторую универсально полную векторную решетку Y найдется единственный решеточный гомоморфизм $S : X^{\odot} \to Y$ такой, что $B = S\odot$. Кроме того, $\iota : x \mapsto x \odot |x|$ — (нелинейный) ортогонально аддитивный порядковый изоморфизм X на $X^{\odot}$, сохраняющий модуль, и $(S \circ \iota)(x) = B(x, |x|)$ для всех $x \in X$. Соответствие $B \mapsto S$ осуществляет биекцию между множеством всех порядково ограниченных ортосимметричных билинейных операторов из $X \times X$ в Y, сохраняющих дизъюнктность, и множеством всех порядково ограниченных операторов из X в Y, сохраняющих дизъюнктность (см. [13, предложение 5.2]. Остается применить теорему 3.5, замечая, что $\ker_s(B) = \iota^{-1}(\ker(S))$ и ι^{-1} сохраняет порядковые идеалы. $\square$

3.8. Замечание. Для билинейных операторов справедлива следующая версия теоремы Майера: если X, Y, Z — векторные решетки и $B : X \times Y \to Z$ — порядково ограниченный билинейный оператор, сохраняющий дизъюнктность, то B обладает положительной частью B^+, отрицательной частью B^- и модулем $|B|$, являющимися решеточными биморфизмами; кроме того, $B^+(x, y) = B(x, y)^+$ и $B^-(x, y) = B(x, y)^-$ для всех $x \in X_+$ и $y \in Y_+$ и $|B|(|x|, |y|) = |B(x, y)|$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$ (см. [14, теорема 5; 15, теорема 3.4]). В частности, оператор B регулярен.

3.9. замечание. Из приведенного выше рассуждения также следует, что если Z обладает свойством проектирования, то для порядково ограниченного билинейного оператора B из $X \times Y$ в Z, сохраняющего дизъюнктность, существует проектор на компоненты $\pi \in \mathbb{P}(Y)$ такой, что $B^+ = \pi|B|$ и $B^- = \pi^{\perp}|B|$. В частности, $B = (\pi - \pi^{\perp})|B|$ и $|B| = (\pi - \pi^{\perp})B$. (Первую формулу принято называть *полярным разложением* B.) Чтобы удостовериться в этом, достаточно заметить, что в силу леммы 3.3 функционал $\beta := B\!\uparrow$ сохраняет дизъюнктность тогда и только тогда, когда либо β, либо $-\beta$ — решеточный биморфизм в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Из этого факта следует, что B сохраняет дизъюнктность тогда и только тогда, когда $(B(u, v))^+ \perp (B(x, y))^-$ для всех $x, u \in X_+$ и $y, v \in Y_+$. В самом деле, для произвольных $x, u \in X_+$ и $y, v \in Y_+$ можно записать

$$(B(x, y))^+ = B(x, y) \vee 0 \leq B^+(x, y) = \pi|B|(x, y);$$

аналогично $(B(u, v))^- \leq \pi^{\perp}|B|(u, v)$. Значит, $(B(x, y))^+ \wedge (B(u, v))^- = 0$. По поводу полярного разложения линейных операторов, сохраняющих дизъюнктность, см. [16].

§ 4. Суммы операторов, сохраняющих дизъюнктность

В работе [17] де Пагтер и Шеп поставили задачу нахождения условий для того, чтобы сумма двух порядково ограниченных операторов, сохраняющих дизъюнктность, являлась сохраняющим дизъюнктность оператором. Исследуем эту задачу для произвольных конечных сумм в более общем контексте n-дизъюнктных операторов и начнем со случая функционалов, сохраняющих дизъюнктность.

4.1. Лемма. *Для конечного набора порядково ограниченных функционалов $f_1, \dots, f_N$ на X, сохраняющих дизъюнктность, следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *функционал $f_i + f_j$ сохраняет дизъюнктность для всех $1 \leq i, j \leq N$;*

(2) *$|f_1| + \dots + |f_N|$ — решеточный гомоморфизм;*

(3) *существует решеточный гомоморфизм $h : X \to \mathbb{R}$ такой, что $f_i = \lambda_i h$ $(i := 1, \dots, N)$ для некоторых $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$;*

(4) *если $f_i \neq 0$ и $f_j \neq 0$, то $|f_i| \wedge |f_j| \neq 0$ для всех $i, j := 1, \dots, N$;*

(5) *из условий $f_i \neq 0$ и $f_j \neq 0$ следует, что $\ker(f_i) = \ker(f_j)$ для всех $i, j := 1, \dots, N$.*

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2) Пусть верно утверждение (1) и $h := |f_1| + \dots + |f_N|$ не является решеточным гомоморфизмом. Тогда найдем натуральные числа $1 \leq i, j \leq N$ такие, что $f_i \neq 0$, $f_j \neq 0$ и $f_i \perp f_j$. Отсюда следует, что $|f_i + f_j| = |f_i| + |f_j|$ не является решеточным гомоморфизмом, а значит, $f_i + f_j$ не сохраняет дизъюнктность; противоречие.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Это следует непосредственно из 3.2(3), где $h := |f_1| + \dots + |f_N|$.

(5) $\Longrightarrow$ (3) Если $f_1 = \dots = f_N = 0$, то доказывать нечего. Иначе выберем натуральное $j \leq N$ так, что $f_j \neq 0$, и положим $h := |f_j|$. Тогда для каждого ненулевого f_i имеем $\ker(h) = \ker(f_j) = \ker(f_i)$ и потому $f_i = \lambda_i h$ для некоторого ненулевого $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Положим $\lambda_i = 0$, если $f_i = 0$.

Оставшиеся импликации (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (5) и (3) $\Longrightarrow$ (1) очевидны. $\square$

4.2. Лемма. *Пусть T — порядково ограниченный линейный оператор из X в $Y := \mathscr{R}\!\downarrow$ и $\tau := T\!\uparrow$. Если $b := [\![\tau \neq 0]\!]$, то $\chi(b)$ совпадает с проекцией на образ $R_T \in \mathbb{P}(Y)$, т. е. проекцией на компоненту $T(X)^{\perp\perp}$ в Y.*

Доказательство. Как следует из ($\mathbb{G}$), для $y \in Y$ проекция $[y]$ на компоненту $\{y\}^{\perp\perp}$ совпадает с $\chi([\![y \neq 0]\!])$. Поэтому

$$b := [\![\tau \neq 0]\!] = [\![(\exists\, x \in X^\wedge) \tau(x) \neq 0]\!] = \bigvee_{x \in X} [\![\tau(x^\wedge) \neq 0]\!] = \bigvee_{x \in X} [\![T(x) \neq 0]\!].$$

Остается заметить, что

$$\chi(b) = \bigvee_{x \in X} \chi([\![T(x) \neq 0]\!]) = \bigvee_{x \in X} [T(x)] = R_T. \quad \square$$

4.3. Теорема. *Для любого конечного набора порядково ограниченных линейных операторов $T_1, \dots, T_N$ из X в Y, сохраняющих дизъюнктность, следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$T_i + T_j$ сохраняет дизъюнктность для всех $1 \leq i, j \leq N$;*

(2) *$|T_1| + \dots + |T_N|$ — решеточный гомоморфизм;*

(3) *существуют решеточный гомоморфизм $T : X \to Y$ и ортоморфизмы $\varrho_1, \dots, \varrho_j \in \mathscr{Z}(Y)$ такие, что $T_i = \varrho_i T$ $(i := 1, \dots, N)$;*

(4) *неравенство $R_{T_i} \circ R_{T_j} \leq R_{|T_i| \wedge |T_j|}$ справедливо для всех $i, j := 1, \dots, N$;*

(5) *для $\pi \in \mathbb{P}(Y)$ и $i, j := 1, \dots, N$ из неравенства $\pi \leq R_{T_i} \circ R_{T_j}$ следует, что $\ker(\pi T_i) = \ker(\pi T_j)$.*

Доказательство. Не теряя общности, предположим, что $Y = \mathscr{R}\!\downarrow$. Положим $f_i := T_i\!\uparrow$ $(i := 1, \dots, N)$. Лемма 4.1 верна в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ в силу принципа переноса, так что достаточно убедиться, что 4.3(k) эквивалентна интерпретации 4.1(k) в

$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ для всех $(k = 1, \dots, 5)$. Для $k = 1, 2$ эти эквивалентности очевидны. Полагая $h := T\!\uparrow$ и используя 2.14(5), получаем $[\![4.1(3)]\!] = \mathbb{1} \iff 4.3(3)$. Утверждение 4.1(4) можно записать в виде

$$\Phi \equiv (\exists\, i, j \in \{1, \dots, N\}^{\wedge})(f_i \neq 0 \wedge f_j \neq 0 \to |f_i| \wedge |f_j| \neq 0),$$

так что

$$[\![\Phi]\!] = \bigwedge_{i,j=1}^{N} [\![f_i \neq 0]\!] \wedge [\![f_j \neq 0]\!] \Rightarrow [\![|f_i| \wedge |f_j| \neq 0]\!].$$

Таким образом, $[\![4.1(4)]\!] = [\![\Phi]\!] = \mathbb{1}$ тогда и только тогда, когда $[\![f_i \neq 0]\!] \wedge [\![f_j \neq 0]\!] \leq [\![|f_i| \wedge |f_j| \neq 0]\!]$ для всех $i, j \leq N$. Последнее равносильно 4.3(4) в силу леммы 4.2. Оставшаяся эквивалентность $[\![4.1(5)]\!] = \mathbb{1} \iff 4.3(5)$ проверяется комбинацией приведенных выше рассуждений с доказательством $3.4(3) \implies 3.4(1)$. $\square$

4.4. Определение. Оператор $T : X \to Y$ называется *n-дизъюнктным*, если для любых $n + 1$ попарно дизъюнктных элементов $x_0, \dots, x_n \in X$ имеем $|Tx_0| \wedge \dots \wedge |Tx_n| = 0$ (см. [18]).

Отметим, что $T : X \to Y$ сохраняет дизъюнктность, если он 1-дизъюнктен. Сумма n операторов, сохраняющих дизъюнктность, n-дизъюнктна. В случае, если решетка Y порядково полна, верно также и обратное: *порядково ограниченный оператор $T : X \to Y$ является n-дизъюнктным тогда и только тогда, когда T представляется в виде суммы n порядково ограниченных операторов, сохраняющих дизъюнктность.* Этот фундаментальный факт был установлен Бернау, Гюсмансом и де Пагтером в [18, теорема 6]. В. А. Раднаев [19] заметил, что операторы $T_1, \dots, T_n$, сохраняющие дизъюнктность, в разложении $T = T_1 + \dots + T_n$ могут быть выбраны попарно дизъюнктными, и если $S_1, \dots, S_n$ — другой попарно дизъюнктный набор операторов, сохраняющих дизъюнктность, для которого $T = S_1 + \dots + S_n$, то $(S_1, \dots, S_n)$ есть $\mathbb{P}(Y)$-перестановка операторов $(T_1, \dots, T_n)$ в следующем ниже смысле.

4.5. Определение. Пусть даны две N-ки $\mathscr{T} := (T_1, \dots, T_N)$ и $\mathscr{S} := (S_1, \dots, S_N)$ линейных операторов из X в Y. Говорят, что $\mathscr{S}$ есть *$\mathbb{P}(Y)$-перестановка $\mathscr{T}$*, если существует $N \times N$-матрица $(\pi_{i,l})$ с элементами из $\mathbb{P}(Y)$, строки и столбцы которой являются разбиениями единицы в $\mathbb{P}(Y)$, такая, что $S_i = \sum_{l=1}^{N} \pi_{i,l} T_l$ для всех $i := 1, \dots, N$ (и, значит, $T_l = \sum_{i=1}^{N} \pi_{i,l} S_i$ для всех $l := 1, \dots, N$).

Обсудим условия, при которых сумма конечного набора порядково ограниченных линейных операторов, сохраняющих дизъюнктность, n-дизъюнктна. Как и выше, начнем с простого случая функционалов.

4.6. Лемма. *Пусть $n, N \in \mathbb{N}$ и $n \leq N$. Для конечного набора порядково ограниченных функционалов $f_1, \dots, f_N$ на X, сохраняющих дизъюнктность, следующие условия эквивалентны:*

(1) *сумма $|f_1| + \dots + |f_N|$ является n-дизъюнктным функционалом;*

(2) *для любой перестановки $(g_1, \dots, g_N)$ набора $(f_1, \dots, f_N)$ сумма $g_1 + \dots + g_n$ является n-дизъюнктным функционалом;*

(3) *существует перестановка $(g_1, \dots, g_N)$ набора $(f_1, \dots, f_N)$ такая, что $g_1, \dots, g_n$ попарно дизъюнктны и для $i := n + 1, \dots, N$ имеет место представление $g_i = \lambda_i g_{\kappa(i)}$ для некоторых $\kappa(i) \in \{1, \dots, n\}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \leq 1$.*

Доказательство. Здесь работают соображения, схожие с доказательством леммы 4.1, с учетом того факта, что сумма N решеточных гомоморфизмов

n-дизъюнктна тогда и только тогда, когда не более n из них ненулевые и попарно дизъюнктны. $\square$

4.7. Лемма. *Пусть $T : X \to \mathscr{R}{\downarrow}$ — порядково ограниченный оператор и $\tau := T{\Uparrow}$. Тогда функционал τ будет $n^\wedge$-дизъюнктным тогда и только тогда, когда n-дизъюнктен оператор T.*

Доказательство. Положим $b := [\![\, \tau\ n^\wedge\text{-дизъюнктен}\,]\!]$ и проверим, что если оператор T n-дизъюнктен, то $b = \mathbb{1}$. Отождествляя $n^\wedge$ с $\{0, \dots, n-1\}^\wedge$ и используя 2.8, выводим

$$b = [\![(\forall\, \nu : n^\wedge \to X^\wedge)((\forall\, k, l \in n^\wedge)(k \neq l \to \nu(k) \perp \nu(l)) \to \inf_{k \in n^\wedge} |\tau(\nu(k))| = 0)]\!]$$

$$= \bigwedge \{[\![\inf\{|\tau(\nu(i))| : i \in n^\wedge\} = 0]\!] : \nu \in [\![n^\wedge \to X^\wedge]\!],$$

$$[\![(\forall\, k, l \in n^\wedge)(k \neq l \to \nu(k) \perp \nu(l))]\!] = \mathbb{1}\}$$

$$= \bigwedge \{[\![\inf\{|\tau(\mathrm{im}(\nu))| = 0]\!] : \nu{\Downarrow} \in [n \to X^\wedge{\downarrow}], (\forall\, k \neq l)\, [\![\nu{\Downarrow}(k) \perp \nu{\Downarrow}(l)]\!] = \mathbb{1}\}.$$

Так как $X^\wedge{\downarrow} = \mathrm{mix}\{x^\wedge : x \in X\}$, можно выбрать разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ и конечный набор семейств $(x_{\xi,k})_{\xi \in \Xi}$ $(k := 0, 1, \dots, n)$ такой, что

$$\nu{\Downarrow}(k) = \mathrm{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi x^\wedge_{\xi,k}).$$

Из $[\![\nu{\Downarrow}(k) \perp \nu{\Downarrow}(l)]\!] = \mathbb{1}$ следует, что $x_{\xi,k} \perp x_{\xi,l}$ при $b_\xi \neq 0$ и $k \neq l$. Полагая $A_\xi := \{x_{\xi,0}, \dots, x_{\xi,n}\}$, легко проверяем, что $b_\xi \leq [\![\mathrm{im}(\nu) = A^\wedge_\xi]\!]$. Теперь, работая в относительном универсуме $\mathbb{V}^{(\mathbb{B}_\xi)}$, где $\mathbb{B}_\xi := [\mathbb{0}, b_\xi]$, и привлекая 2.7 и $(\mathbb{G})$, имеем $\tau(A^\wedge_\xi) = T(A_\xi){\uparrow}$ и $\inf |T(A_\xi){\uparrow}| = \inf |T(A_\xi)|$, так что

$$\inf |\tau(\mathrm{im}(\nu))| = \inf |\tau(A^\wedge_\xi)| = \inf |\tau(A_\xi)| = \inf |T(A_\xi)|.$$

Так как оператор T n-дизъюнктен и соотношения $[\![|Tx_0| \wedge \ldots \wedge |Tx_n| = 0]\!] = \mathbb{1}$ и $|Tx_0| \wedge \ldots \wedge |Tx_n| = 0$ эквивалентны, получаем, что $b = \mathbb{1}$. Обратное утверждение доказывается аналогично. $\square$

4.8. Лемма. *Для $\tau_i, \sigma_i \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ со свойством $[\![\tau_i, \sigma_i \in (X^\wedge)^\sim]\!] = \mathbb{1}$, $i \in \{1, \dots, N\}^\wedge$, положим $T_l := \tau_{l^\wedge}{\Downarrow}$ и $S_l := \sigma_{l^\wedge}{\Downarrow}$. Тогда $(\sigma_1, \dots, \sigma_{N^\wedge})$ является перестановкой $(\tau_1, \dots, \tau_{N^\wedge})$ в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, если и только если $(S_1, \dots, S_N)$ служит $\mathbb{P}(Y)$-перестановкой $(T_1, \dots, T_N)$.*

Доказательство. Пусть $(\sigma_1, \dots, \sigma_{N^\wedge})$ — перестановка $(\tau_1, \dots, \tau_{N^\wedge})$. Рассмотрим перестановку $\nu : \{1, \dots, N\}^\wedge \to \{1, \dots, N\}^\wedge$ такую, что $\sigma_i = \tau_{\nu(i)}$ $(i \in \{1, \dots, N\}^\wedge)$. В силу 2.7 $\nu{\Downarrow}$ есть функция из $\{1, \dots, N\}$ в $(\{1, \dots, N\}^\wedge){\downarrow} = \mathrm{mix}(\{1^\wedge, \dots, N^\wedge\})$. Таким образом, для каждого $i \in \{1, \dots, N\}$ существует разбиение единицы $(b_{i,l})_{l=1}^N$ такое, что $\nu{\Downarrow}(i) = \mathrm{mix}_{l \leq N}(b_{i,l} l^\wedge)$. Поскольку отображение ν инъективно, имеем

$$\mathbb{1} = [\![(\forall\, i, j \in \{1, \dots, N\}^\wedge)(\nu(i) = \nu(j) \to i = j)]\!]$$

$$= \bigwedge_{i,j=1}^{N} [\![\nu(i^\wedge) = \nu(j^\wedge) \to i^\wedge = j^\wedge]\!] = \bigwedge_{i,j=1}^{N} [\![\nu{\Downarrow}(i) = \nu{\Downarrow}(j)]\!] \Rightarrow [\![i^\wedge = j^\wedge]\!]$$

и потому $[\![\nu{\Downarrow}(i) = \nu{\Downarrow}(j)]\!] \leq [\![i^\wedge = j^\wedge]\!]$ для всех $i, j \leq N$. Учитывая это неравенство и определение $\nu{\Downarrow}$, получаем

$$b_{i,l} \wedge b_{j,l} \leq [\![\nu{\Downarrow}(i) = l^\wedge]\!] \wedge [\![\nu{\Downarrow}(j) = l^\wedge]\!] \leq [\![\nu{\Downarrow}(i) = \nu{\Downarrow}(j)]\!] \leq [\![i^\wedge = j^\wedge]\!],$$

поэтому из $i \neq j$ следует, что $b_{i,l} \wedge b_{j,l} = 0$ (ибо $x \neq y \iff [\![x^\wedge = y^\wedge]\!] = \mathbb{0}$ ввиду 2.5). Вместе с тем из сюръективности ν следует, что

$$\mathbb{1} = [\![(\forall\, l \in \{1,\dots,N\}^\wedge)(\exists\, i \in \{1,\dots,N\}^\wedge)\, l = \nu(i)]\!]$$
$$= \bigwedge_{l=1}^{N} \bigvee_{i=1}^{N} [\![l^\wedge = \nu{\downarrow\!\!\uparrow}(i)]\!] = \bigwedge_{l=1}^{N} \bigvee_{i=1}^{N} b_{i,l}.$$

Следовательно, $(b_{i,l})_{i=1}^{N}$ — разбиение единицы в $\mathbb{B}$ для всех $l = 1,\dots,N$. В силу выбора ν отсюда вытекает, что $b_{i,l} \leq [\![\sigma_{i^\wedge} = \tau_{l^\wedge}]\!]$ ввиду оценок

$$b_{i,l} \leq [\![\sigma_{i^\wedge} = \tau_{\nu(i^\wedge)}]\!] \wedge [\![\nu(i^\wedge) = l^\wedge]\!] \leq [\![\sigma_{i^\wedge} = \tau_{l^\wedge}]\!].$$

Положим $\pi_{i,l} := \chi(b_{i,l})$ и заметим, что $b_{i,l} \leq [\![\sigma_{i^\wedge}(x^\wedge) = \tau_{l^\wedge}(x^\wedge)]\!] \leq [\![S_i x = T_l x]\!]$ для всех $x \in X$ и $1 \leq i,j \leq N$. Используя ($\mathbb{G}$), получаем $\pi_{i,l} S_i = \pi_{i,l} T_l$, стало быть, $S_i = \sum\limits_{l=1}^{N} \pi_{i,l} T_l$ для всех $1 \leq i \leq N$. Ясно, что $(\pi_{i,l})$ и есть $N \times N$-матрица, требуемая в определении 4.5. Достаточность можно получить тем же рассуждением, если проделать его в обратном направлении. $\square$

4.9. Теорема. *Предположим, что $n, N \in \mathbb{N}$ и $n \leq N$. Для набора порядково ограниченных линейных операторов $T_1,\dots,T_N$ из X в Y, сохраняющих дизъюнктность, следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *оператор $|T_1| + \dots + |T_N|$ n-дизъюнктен;*

(2) *для любой $\mathbb{P}(Y)$-перестановки $(S_1,\dots,S_N)$ набора $(T_1,\dots,T_N)$ сумма $S_1 + \dots + S_n$ является n-дизъюнктным оператором;*

(3) *существует $\mathbb{P}(Y)$-перестановка $(S_1,\dots,S_N)$ набора $(T_1,\dots,T_N)$ такая, что $S_1,\dots,S_n$ попарно дизъюнктны и каждый из операторов $S_{n+1},\dots,S_N$ представляется в виде $S_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} S_j$ для некоторых попарно дизъюнктных $\alpha_{1,j},\dots,\alpha_{n,j} \in \mathscr{Z}(Y)$ $(i := n+1,\dots,N)$.*

Доказательство. Можно считать, что $Y = \mathscr{R}{\downarrow}$; положим $\tau_l := T_l{\uparrow\!\!\downarrow}$. Эквивалентность (1) $\iff$ (2) немедленно следует из лемм 4.6 и 4.8, и нужно лишь проверить, что (2) $\iff$ (3). Более того, без ограничения общности можно предполагать, что $T_1,\dots,T_N$ — решеточные гомоморфизмы, так что $\tau_1,\dots,\tau_N$ тоже предполагаются решеточными гомоморфизмами внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Предполагая выполнение (2) и работая внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, заметим, что сумма $\tau_1 + \dots + \tau_N$ $n^\wedge$-дизъюнктна и по лемме 4.6 существует перестановка $\nu : \{1,\dots,N\}^\wedge \to \{1,\dots,N\}^\wedge$ такая, что $\tau_{\nu(1)},\dots,\tau_{\nu(n)}$ — попарно дизъюнктные решеточные гомоморфизмы, причем каждый из функционалов $\tau_{\nu(n+1)},\dots,\tau_{\nu(N)}$ пропорционален одному из функционалов $\tau_{\nu(1)},\dots,\tau_{\nu(n)}$ с константой, модуль которой не превосходит 1. Последнее записывается следующей формулой:

$$\Phi \equiv (\forall\, i \in \{n+1,\dots,N\}^\wedge)(\exists\, j \in \{1,\dots,n\}^\wedge)(\exists\, \beta \in \mathscr{R})(|\beta| \leq 1 \wedge \tau_{\nu(i)} = \beta\tau_{\nu(j)}).$$

Положим $S_i := \tau_{\nu(i^\wedge)}{\downarrow\!\!\uparrow}$ $(i := 1,\dots,N)$. Тогда $(S_1,\dots,S_N)$ есть $\mathbb{P}(Y)$-перестановка набора $(T_1,\dots,T_N)$ по лемме 4.8 и $(S_1,\dots,S_n)$ попарно дизъюнктны ввиду 2.14(3). Кроме того, $[\![\Phi]\!] = \mathbb{1}$ в силу принципа переноса и потому

$$\mathbb{1} = \bigwedge_{i=n+1}^{N} \bigvee_{j=1}^{n} [\![(\exists\, \beta)(\beta \in \mathscr{R})(|\beta| \leq 1 \wedge \tau_{\nu(i^\wedge)} = \beta\tau_{\nu(j^\wedge)})]\!].$$

Следовательно, для каждого $n+1 \leq i \leq N$ существует разбиение единицы $\{b_{i,1}, \dots, b_{i,n}\}$ в $\mathbb{B}$ такое, что

$$b_{i,j} \leq [\![(\exists\, \beta)(\beta \in \mathscr{R})(|\beta| \leq 1 \wedge \tau_{\nu(i^\wedge)} = \beta \tau_{\nu(j^\wedge)})]\!].$$

В силу принципа максимума найдется $\beta_{i,j} \in \mathscr{R}{\downarrow}$ со свойством

$$b_{i,j} \leq [\![|\beta_{i,j}| \leq 1]\!] \wedge [\![\tau_{\nu(i^\wedge)} = \beta_{i,j} \tau_{\nu(j^\wedge)})]\!].$$

Заметим, что для каждого $x \in X$

$$\begin{aligned} b_{i,j} &\leq [\![\tau_{\nu(i^\wedge)} = \beta_{i,j} \tau_{\nu(j^\wedge)})]\!] \leq [\![\tau_{\nu(i^\wedge)}(x^\wedge) \\ &= \beta_{i,j} \tau_{\nu(j^\wedge)}(x^\wedge)]\!] \wedge [\![\tau_{\nu(i^\wedge)}(x^\wedge) = S_i x]\!] \wedge [\![\tau_{\nu(j^\wedge)}(x^\wedge) = S_j x]\!] \leq [\![S_i x = \beta_{i,j} S_j x]\!]. \end{aligned}$$

Полагая $\pi_{i,j} := \chi(b_{i,j})$ и $\alpha_{i,j} := \pi_{i,j}\beta_{i,j}$ и используя $(\mathbb{G})$, получаем $\pi_{i,j} S_i x = \alpha_{i,j} S_j x$, откуда $S_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} S_j$, что и требовалось.

(3) $\Longrightarrow$ (2) Нужно использовать те же рассуждения, что и выше, применяя леммы 4.6–4.8. $\square$

4.10. Замечание. Все факты об n-дизъюнктных операторах, приведенные после определения 4.4, могут быть также сведены к случаю функционалов в силу лемм 4.7 и 4.8.

4.11. Замечание. Пусть X, Y, Z — векторные решетки, причем Z порядково полна. Будем говорить, что конечные наборы $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset X$ и $\{y_0, y_1, \dots, y_n\} \subset Y$ *бидизъюнктны*, если для любой пары натуральных чисел $0 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, либо $x_i \perp x_j$, либо $y_i \perp y_j$. Билинейный оператор B из $X \times Y$ в Z называется *n-дизъюнктным*, если

$$|B(x_0, y_0)| \wedge |B(x_1, y_1)| \wedge \dots \wedge |B(x_n, y_n)| = 0$$

для любых бидизъюнктных наборов $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ в X и $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ в Y. Для регулярного билинейного оператора из $B : X \times Y$ в Z существует линейный регулярный оператор $T : X \bar{\otimes} Y \to Z$ такой, что $B = T\otimes$, где $X \bar{\otimes} Y$ — тензорное произведение Фремлина пространств X и Y (см. [20]). В [15] было доказано, что оператор B n-дизъюнктен тогда и только тогда, когда T n-дизъюнктен. Эти факты позволяют перенести некоторые результаты о регулярных n-дизъюнктных линейных операторах на регулярные n-дизъюнктные билинейные операторы. В частности, для билинейных операторов справедлив аналог теоремы 4.9.

4.12. Замечание. Ввиду [10, 21] и теорем 3.4 и 3.5 естественно возникает задача: *описать порядково ограниченные линейные и билинейные n-дизъюнктные операторы в терминах их ядер.* У нас нет удовлетворительного решения этой задачи даже в случае функционалов.

§ 5. Множества операторов, сохраняющие дизъюнктность

Цель настоящего параграфа — дать полное описание максимальных n-дизъюнктных множеств операторов. В частном случае операторов, сохраняющих дизъюнктность, мотивацией этой задачи были работы Бенамора и Булабьяра [22–24]. Она была явно сформулирована в работе Булабьяра [25] как проблема 5.8.

5.1. Определение. Непустое подмножество $\mathscr{D}$ пространства $L^{\sim}(X,Y)$ называется *n-дизъюнктным* в $L^{\sim}(X,Y)$, если $|T_0x_0| \wedge \dots \wedge |T_nx_n| = 0$ для всех $T_0,\dots,T_n \in \mathscr{D}$ и попарно дизъюнктных наборов $x_0,\dots,x_n \in X$. Говорят, что n-дизъюнктное множество $\mathscr{M}$ в $L^{\sim}(X,Y)$ *максимально*, если всякое n-дизъюнктное множество в $L^{\sim}(X,Y)$, содержащее $\mathscr{M}$, совпадает с $\mathscr{M}$. 1-Дизъюнктное множество операторов также называется сохраняющим дизъюнктность. Более точно, непустое подмножество $\mathscr{D}$ в $L^{\sim}(X,Y)$ *сохраняет дизъюнктность* в $L^{\sim}(X,Y)$, если $S(u) \perp T(v)$ для всех $S,T \in \mathscr{D}$ и $u,v \in X$ с условием $u \perp v$.

Отметим некоторые непосредственные следствия определения. Порядково ограниченный оператор T из X в Y n-дизъюнктен тогда и только тогда, когда одноточечное множество $\{T\}$ является n-дизъюнктным множеством в $L^{\sim}(X,Y)$. Поэтому каждый элемент n-дизъюнктного множества в $L^{\sim}(X,Y)$ является порядково ограниченным n-дизъюнктным оператором. Кроме того, непустое подмножество $\mathscr{D}$ в $L^{\sim}(X,Y)$ n-дизъюнктно в $L^{\sim}(X,Y)$, если и только если каждый набор из $n+1$ элементов $\{T_0,\dots,T_n\}$ из $\mathscr{D}$ n-дизъюнктен.

5.2. Определение. Пусть X — векторная подрешетка в Y. Отображение $T : X \to Y$ называется *ортоморфизмом*, если T порядково ограничено и из $x \perp y$ следует, что $Tx \perp y$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Легко видеть, что если T — ортоморфизм из X в Y, то $T(X) \subset X^{\perp\perp}$. Множество всех ортоморфизмов из X в Y обозначается символом $\mathrm{Orth}(X,Y)$.

5.3. Лемма. *Если X — векторная подрешетка в Y, то*

$$\mathrm{Orth}(X,Y) = \{T|_X : T \in \mathrm{Orth}(Y^{\mathbb{U}}),\ T(X) \subset Y\}.$$

Доказательство. Универсальное пополнение $Y^{\mathbb{U}}$ векторной решетки Y является f-алгеброй с мультипликативной единицей. Всякий ортоморфизм T из X в Y единственным образом продолжается до ортоморфизма $\widehat{T}$ на $Y^{\mathbb{U}}$. Каждый ортоморфизм на $Y^{\mathbb{U}}$ является оператором умножения. Поэтому если $T \in \mathrm{Orth}(X,Y)$, то существует некоторое $y \in X^{\mathbb{U}}$ такое, что $T(x) = yx$ для всех $x \in X$, так что $y \cdot X \subset Y$ (см. [1, теорема 2.63]). $\square$

5.4. Пример. Для $\mathscr{D} \subset L^{\sim}(Y,Z)$ и $T : X \to Y$ положим $\mathscr{D} \circ T := \{S \circ T : S \in \mathscr{D}\}$. Если $T,T_1,\dots,T_n$ — решеточные гомоморфизмы из X в Y, то $\mathrm{Orth}(T(X),Y) \circ T$ — множество, сохраняющее дизъюнктность, и множество $\mathrm{Orth}(T_1(X),Y) \circ T_1 + \dots + \mathrm{Orth}(T_n(X),Y) \circ T_n$ является n-дизъюнктным. Наша следующая цель — показать, что этот пример типичен.

5.5. Лемма. *Пусть даны n попарно дизъюнктных ненулевых вещественнозначных решеточных гомоморфизмов $h_1,\dots,h_n$ на векторной решетке X. Существуют попарно дизъюнктные элементы $x_1,\dots,x_n \in X$ такие, что $h_i(x_j) = \delta_{ij}$ для всех $i,j := 1,\dots,n$ (здесь δ_{ij} — символ Кронекера).*

Доказательство. Выберем $u_i \in X_+$ такое, что $h_i(u_i) > 0$, и положим $u := u_1 + \dots + u_n$. В силу теоремы Крейна — Какутани о представлении можно отождествить порядковый идеал X_u в X, порожденный u, с плотной по норме векторной подрешеткой в $C(Q)$, содержащей константы и разделяющей точки, где $C(Q)$ — банахова решетка непрерывных функций на хаусдорфовом компактном топологическом пространстве Q. Кроме того, при этом отождествлении u соответствует функция $\mathbb{1} \in C(Q)$, тождественно равная единице. Тогда ограничения $h_1|_{X_u},\dots,h_n|_{X_u}$ — попарно дизъюнктные решеточные гомоморфизмы.

Пусть $\hat{h}_i$ обозначает расширение $h_i|_{X_u}$ на $C(Q)$ по непрерывности (в норме). Ясно, что $\hat{h}_1, \dots, \hat{h}_n$ также являются попарно дизъюнктными ненулевыми решеточными гомоморфизмами, и потому найдутся различные точки $q_1, \dots, q_n \in Q$ такие, что $\hat{h}_i$ совпадает с мерой Дирака $\delta_{q_i} : x \mapsto x(q_i)$ $(x \in C(Q))$. В силу теоремы Титце — Урысона можно найти попарно дизъюнктные непрерывные функции $y_1, \dots, y_n \in C(Q)$ такие, что $y_i(q_i) = 1$ и $0 \leq y_i(q) \leq 1$ для всех $q \in Q$ и $i := 1, \dots, n$. Возьмем $\bar{y}_i \in X_u$ так, что $\|y_i - \bar{y}_i\| < \varepsilon < 1/2$, и заметим, что $h_i(\bar{y}_i) - \varepsilon > 1 - 2\varepsilon > 0$ и $\bar{y}_i - \varepsilon\mathbb{1} \leq y_i$. Положив $x_i := (h_i(\bar{y}_i) - \varepsilon)^{-1}(\bar{y}_i - \varepsilon\mathbb{1}) \vee 0$, видим, что $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ — требуемый набор. $\square$

5.6. Лемма. *Непустое множество $\mathscr{D}$ в $X^\sim$ является n-дизъюнктным тогда и только тогда, когда существуют попарно дизъюнктные решеточные гомоморфизмы $h_1, \dots, h_n : X \to \mathbb{R}$ такие, что $\mathscr{D} \subset \mathbb{R} \cdot h_1 + \dots + \mathbb{R} \cdot h_n$. Кроме того, множество $\mathscr{D}$ максимально тогда и только тогда, когда либо $\mathscr{D} = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{R}) = \{0\}$, либо $\mathscr{D} = \mathbb{R} \cdot h_1 + \dots + \mathbb{R} \cdot h_m$ с ненулевыми $h_1, \dots, h_m$ для некоторого $m \leq n$. Набор $\{h_1, \dots, h_m\}$ единствен с точностью до перестановки.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть $\mathscr{D} \neq \{0\}$. Предположим без потери общности, что из $f \in \mathscr{D}$ следует, что $|f| \in \mathscr{D}$. Согласно [18, теорема 6] всякий функционал в $\mathscr{D}$ разлагается в сумму компонент, сохраняющих дизъюнктность. Пусть символ $\mathscr{D}_0$ обозначает множество всех таких компонент всех функционалов из $\mathscr{D}$. Утверждается, что в предположении n-дизъюнктности $\mathscr{D}$ в $\mathscr{D}_0$ существует не более n ненулевых попарно дизъюнктных элементов. Пусть $\{h_1, \dots, h_m\}$ — набор ненулевых попарно дизъюнктных решеточных гомоморфизмов из $\mathscr{D}_0$. В силу леммы 5.5 мы можем подобрать m ненулевых попарно дизъюнктных элементов $x_0, \dots, x_m \in X_+$ таких, что $h_i(x_j) = \delta_{i,j}$ для всех $1 \leq i, j \leq m$. По построению для каждого $i \leq m$ можно выбрать $0 \leq f_i \in \mathscr{D}$ со свойством $f_i = h_i + \dots$, так что $f_i(x_i) = h_i(x_i) + \dots \geq h_i(x_i) = 1$. Следовательно, $|f_i(x_i)| \wedge \dots \wedge |f_m(x_m)| \geq 1$, а значит, $m \leq n$ по предположению. Очевидно, что $\mathbb{R} \cdot h_1 + \dots + \mathbb{R} \cdot h_m$ — максимальное n-дизъюнктное множество в $X^\sim$, содержащее $\mathscr{D}$. $\square$

5.7. Лемма. *Для непустого множества $\mathscr{D}$ в $L^\sim(X, \mathscr{R}{\downarrow})$ обозначим $\mathscr{D}{\Uparrow} := \{T{\Uparrow} : T \in L^\sim(X, \mathscr{R}{\downarrow})\}$ и $\Delta := (\mathscr{D}{\Uparrow}){\uparrow}$. Если множество $\mathscr{D}$ n-дизъюнктно в $L^\sim(X, \mathscr{R}{\downarrow})$ для некоторого натурального $n \in \mathbb{N}$, то*

$$[\![\Delta\ n^\wedge\text{-дизъюнктно в } (X^\wedge)^\sim]\!] = \mathbb{1}.$$

Кроме того, $\mathscr{D}$ максимально тогда и только тогда, когда $[\![\Delta$ максимально $]\!] = \mathbb{1}$.

Доказательство. Предполагая, что $\mathscr{D}$ n-дизъюнктно в $L^\sim(X, \mathscr{R}{\downarrow})$, покажем, что Δ $n^\wedge$-дизъюнктно в $(X^\wedge)^\sim$ в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Предложение «$\Delta$ $n^\wedge$-дизъюнктно в $(X^\wedge)^\sim$» может быть записано следующим образом:

$$\Phi \equiv (\forall\, \tau : \{0, \dots, n\}^\wedge \to \Delta)(\forall\, \varkappa : \{0, \dots, n\}^\wedge \to X^\wedge)$$
$$\Big((\forall\, i, j \leq n^\wedge)(i \neq j \to \varkappa(i) \perp \varkappa(j)) \to \bigwedge_{i \leq n^\wedge} |\tau(i)\varkappa(i)| = 0\Big).$$

Нужно показать, что $[\![\Phi]\!] = \mathbb{1}$. Вычисляя булевы оценки истинности для универсальных кванторов и учитывая 2.8, видим, что $[\![\Phi]\!] = \mathbb{1}$ тогда и только тогда, когда $[\![|\mathscr{T}(0)k(0)| \wedge \dots \wedge |\mathscr{T}(n)k(n)| = 0]\!] = \mathbb{1}$ для всех отображений $\mathscr{T} = \tau{\Downarrow} : \{0, \dots, n\} \to \Delta{\downarrow}$ и $k = \varkappa{\Downarrow} : \{0, \dots, n\} \to X^\wedge{\downarrow}$ таких, что $[\![\varkappa(i^\wedge) \perp \varkappa(j^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$ для всех $i \neq j$. Поскольку $\Delta{\downarrow} = \mathrm{mix}(\mathscr{D}{\Uparrow})$ и $X^\wedge{\downarrow} = \mathrm{mix}(\{x^\wedge : x \in X\})$, существует разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathbb{B}$ и для каждого $i=0,\dots,n$ найдутся семейства $(T_{\xi,i})_{\xi\in\Xi}$ в $L^\sim(X,\mathscr{R}{\downarrow})$ и $(x_{\xi,i})_{\xi\in\Xi}$ в X такие, что $\mathscr{T}(i)=\operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi T_{\xi,i}{\uparrow})$ и $k(i)=\operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x^\wedge_{\xi,i})_{\xi\in\Xi}$. Заметим, что $b_\xi\leq [\![\varkappa(i^\wedge)=k(i)=x^\wedge_{\xi,i}]\!]$, так что $x_{\xi,i}\perp x_{\xi,j}$ при $b_\xi\neq 0$ и $i\neq j$. Таким образом, из n-дизъюнктности $\mathscr{D}$ выводим:

$$\begin{aligned}b_\xi\leq [\![|T_{\xi,0}x_{\xi,0}|\wedge\dots\wedge|T_{\xi,n}x_{\xi,n}|=0]\!]\wedge\bigwedge_{i\leq n}[\![\mathscr{T}(i)x^\wedge_{\xi,i}=T_{\xi,i}(x_{\xi,i})]\!]\wedge[\![k(i)=x^\wedge_{\xi,i}]\!]\\ \leq [\![|\mathscr{T}(0)k(0)|\wedge\dots\wedge|\mathscr{T}(n)k(n)|=0]\!].\end{aligned}$$

Это дает требуемое соотношение, поскольку $\bigvee\limits_{\xi\in\Xi}b_\xi=\mathbb{1}$. $\square$

5.8. Лемма. *Для непустого подмножества $\mathscr{D}\subset L(X,\mathscr{R}{\downarrow})$ положим $R_{\mathscr{D}}:=\bigvee\{R_T:T\in\mathscr{D}\}$. Тогда*

$$R_{\mathscr{D}}=\chi([\![\Delta\neq 0]\!]).$$

Доказательство. Лемма сразу следует из леммы 4.2 и определения Δ из леммы 5.7. $\square$

Итак, все готово для доказательства основного результата этого параграфа.

5.9. Теорема. *Пусть X и Y — векторные решетки, причем Y обладает свойством проектирования. Непустое множество $\mathscr{D}$ в $L^\sim(X,Y)$ n-дизъюнктно тогда и только тогда, когда существуют попарно дизъюнктные решеточные гомоморфизмы $T_1,\dots,T_n$ из X в $Y^{\mathfrak{u}}$ такие, что $\mathscr{D}$ содержится в $\operatorname{Orth}(T_1(X),Y)\circ T_1+\dots+\operatorname{Orth}(T_n(X),Y)\circ T_n$. Кроме того, множество $\mathscr{D}$ максимально тогда и только тогда, когда дополнительно существует разбиение единицы $\pi_0,\dots,\pi_n$ в $\mathbb{P}(Y^{\mathfrak{u}})$ такое, что*

$$\begin{gathered}\mathscr{D}=\operatorname{Orth}(T_1(X),Y)\circ T_1+\dots+\operatorname{Orth}(T_m(X),Y)\circ T_m,\\ \pi_0\circ\mathscr{D}=\operatorname{Hom}(X,\pi_0Y)=\{0\},\quad \pi_m+\dots+\pi_n=R_{T_m}\quad (m:=1,\dots,n).\end{gathered}$$

В этом представлении набор $T_1,\dots,T_n$ единствен с точностью до $\mathbb{P}(Y)$-перестановки.

Доказательство. Лемма 5.6 сводит теорему к случаю, когда решетка Y универсально полна, поскольку по теореме Гордона можно считать без ограничения общности, что $Y=\mathscr{R}{\downarrow}$.

Пусть $\mathscr{D}$ — n-дизъюнктное множество в $L^\sim(X,\mathscr{R}{\downarrow})$, и пусть Δ означает то же, что и в лемме 5.7. Работая в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и используя принцип переноса, заключаем, что Δ является $n^\wedge$-дизъюнктным множеством в $(X^\wedge)^\sim$, и по лемме 5.6 $\Delta\subset\mathscr{R}\cdot\tau(1^\wedge)+\dots+\mathscr{R}\cdot\tau(n^\wedge)$ для некоторого $\tau:\{1,\dots,n\}^\wedge\to\operatorname{Hom}(X^\wedge,\mathscr{R})$. Как и в лемме 5.7, положим $\mathscr{T}:=\tau{\downarrow}$ и заметим, что $\mathscr{T}$ отображает $\{1,\dots,n\}$ в $\operatorname{Hom}(X^\wedge,\mathscr{R}){\downarrow}$. Если $T\in\mathscr{D}$, то $[\![T{\uparrow}\in\Delta]\!]=\mathbb{1}$, так что существует $\alpha\in\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ со свойством

$$[\![\alpha:\{1,\dots,n\}^\wedge\to\mathscr{R}]\!]=\Big[\!\!\Big[T{\uparrow}=\sum_{i\leq n^\wedge}\alpha(i)\mathscr{T}(i)\Big]\!\!\Big]=\mathbb{1}.$$

Положим $\alpha_i:=\alpha{\downarrow}(i)$ и $T_i:=\mathscr{T}(i){\downarrow}$ для $i:=1,\dots,n$. Тогда $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathscr{R}{\downarrow}$, $T_1,\dots,T_n\in\operatorname{Hom}(X,\mathscr{R}{\downarrow})$ и потому цепочка тождеств

$$Tx=T{\uparrow}x^\wedge=\sum_{i\leq n^\wedge}\alpha(i)\mathscr{T}(i)x^\wedge=\sum_{i\leq n}\alpha_i\mathscr{T}(i){\downarrow}x=\sum_{i\leq n}\alpha_iT_ix,$$

где $x \in X$ произвольно, дает требуемое представление $T = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i T_i$. На самом деле, мы доказали больше: из приведенного выше рассуждения следует, что двойной спуск $(\Lambda{\downarrow}){\downarrow\!\!\!\downarrow} := \{\tau{\downarrow\!\!\!\downarrow} : \tau \in \Lambda{\downarrow}\}$ суммы $\Lambda := \mathscr{R}\cdot\tau(1^\wedge)+\dots+\mathscr{R}\cdot\tau(n^\wedge)$ состоит из всех операторов, представимых в виде $\sum\limits_{i\le n} \alpha_i T_i$ для некоторых $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathscr{R}{\downarrow}$.

Предположим, что множество $\mathscr{D}$ максимально. Тогда $[\![\Delta \text{ максимально }]\!] = \mathbb{1}$ в силу леммы 5.7. Условие максимальности в лемме 5.6 можно записать следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\Psi \equiv {} & (\Delta = \mathrm{Hom}(X^\wedge, \mathscr{R}) = \{0\}) \\
& \vee (\exists\, m \in \{1,\dots,n\}^\wedge)((\forall\, i \le m)(\tau(i) \ne 0) \wedge (\Delta = \mathbb{R}\cdot\tau(1) + \dots + \mathbb{R}\cdot\tau(m))).
\end{aligned}
$$

Положим $b_0 := [\![\Delta = \mathrm{Hom}(X^\wedge, \mathscr{R}) = \{0\}]\!]$. В силу принципа переноса $[\![\Psi]\!] = \mathbb{1}$ и вычисление булевых оценок истинности дает

$$
b_0^* = [\![\Delta \ne 0]\!] = \bigvee_{m=1}^{n} [\![\Delta = \mathbb{R}\cdot\mathscr{T}(1) + \dots + \mathbb{R}\cdot\mathscr{T}(m)]\!] \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} [\![\mathscr{T}(i) \ne 0]\!].
$$

Следовательно, существует конечное разбиение единицы $\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ в $\mathbb{B}$ такое, что $b_m \le [\![\Delta = \mathbb{R}\cdot\mathscr{T}(1) + \dots + \mathbb{R}\cdot\mathscr{T}(m)]\!]$ и $b_m \le [\![\mathscr{T}(i) \ne 0]\!]$ $(i \le m)$ для всех $m := 1,\dots,n$. Положим $\pi_m := \chi(b_m)$ и заметим, что $\{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n\}$ — разбиение единицы в $\mathbb{P}(\mathscr{R}{\downarrow})$. Отметим также, что $(\Lambda{\downarrow}){\downarrow\!\!\!\downarrow} = \mathrm{mix}(\mathscr{D})$, и потому $(\Lambda{\downarrow}){\downarrow\!\!\!\downarrow} = \mathscr{D}$ ввиду максимальности $\mathscr{D}$. Учитывая вышесказанное и применяя лемму 5.8, имеем

$$
\begin{gathered}
R_{\mathscr{D}} = \pi_0^{\perp} = \pi_1 + \dots + \pi_n, \quad \pi_m \le R_{T_1} \circ \ldots \circ R_{T_m}, \\
\pi_m \circ \mathscr{D} = \pi_m \circ (\mathscr{R}{\downarrow}\cdot T_1 + \dots + \mathscr{R}{\downarrow}\cdot T_m) \quad (m := 1,\dots,n).
\end{gathered}
$$

Первое равенство дает $\pi_0 \circ \mathscr{D} = \mathrm{Hom}(X, \pi_0 Y) = \{0\}$. Второе влечет, что $\pi_m + \dots + \pi_n \le R_{T_m}$ $(m := 1,\dots,n)$. Заменяя T_m на $(\pi_m + \dots + \pi_n) T_m$, если нужно, и суммируя третьи тождества по m, получаем требуемые условия максимальности. $\square$

5.10. Следствие. *Пусть X и Y — векторные решетки, причем Y порядково полна. Для любого конечного набора $\{T_1,\dots,T_N\}$ в $L^\sim(X,Y)$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\{T_1,\dots,T_N\}$ сохраняет дизъюнктность в $L^\sim(X,Y)$;*

(2) *$|T_1| + \dots + |T_N|$ — решеточный гомоморфизм;*

(3) *существуют решеточный гомоморфизм $T \in L^\sim(X,Y)$ и ортоморфизмы $S_1,\dots,S_N \in \mathrm{Orth}(Y)$ такие, что $T_k = S_k \circ T$ для всех $k := 1,\dots,N$.*

В частности, сумма $T_1+\dots+T_N$ сохраняет дизъюнктность, если выполнено одно из этих эквивалентных условий.

5.11. Следствие. *Пусть X и Y — векторные решетки, где Y порядково полна, и пусть $\mathscr{D}$ — максимальное множество, сохраняющее дизъюнктность в $L^\sim(X,Y)$. Тогда существует решеточный гомоморфизм T из X в $Y^{\mathbb{U}}$ такой, что $\mathscr{D} = \mathrm{Orth}(T(X),Y) \circ T$.*

5.12. Замечание. Заметим, что определение 5.2 ортоморфизма не является общепринятым (ср. с [1, определения 2.35 и 2.41; 3, определение 3.1.1]), но оно с очевидностью эквивалентно стандартному определению в случае $X = Y$.

Тем не менее определение 5.2 иногда удобно и появляется в литературе в различных контекстах (см. [16, 26]).

5.13. Замечание. Следующий вопрос был задан в [25, проблема 5.8]. *Пусть дан решеточный гомоморфизм T из X в Y. При каких условиях множество* $\mathscr{D} := \mathrm{Orth}(Y) \circ T$ *максимально?* Из следствия 5.11 вытекает, что $\mathscr{D}$ максимально тогда и только тогда, когда $\mathrm{Orth}(T(X), Y) = \mathrm{Orth}(Y_0)$, где $Y_0 = T(X)^{\perp\perp}$. Ясно, что $\mathrm{Orth}(L^p, L^1) = L^q \neq \mathrm{Orth}(L^1) = L^\infty$ для $1 < p < \infty$ и $q = p/(p-1)$ и, стало быть, это условие выполняется не всегда.

5.14. Замечание. Некоторые аспекты теории операторов, сохраняющих дизъюнктность, изложены в [2, 27]. Обзор недавних результатов об операторах, сохраняющих дизъюнктность, можно найти в [25]. В частности, понятие множества операторов, сохраняющих дизъюнктность, и некоторые порядковые свойства максимального множества операторов, сохраняющего дизъюнктность, представлены в [25].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operators. New York: Springer-Verl., 1985.
2. *Kusraev A. G.* Dominated operators. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000.
3. *Meyer-Nieberg P.* Banach lattices. Berlin etc.: Springer-Verl., 1991.
4. *Zaanen A. C.* Riesz Spaces. Amsterdam: North-Holland, 1983. V. 2.
5. *Bell J. L.* Boolean valued models and independence proofs in set theory. New York: Clarendon Press, 1985.
6. *Takeuti G., Zaring W. M.* Axiomatic set theory. New York: Springer-Verl., 1973.
7. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Boolean valued analysis. Dordrecht: Kluwer, 1999.
8. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ. М.: Наука, 2005.
9. *Гордон Е. И.* Вещественные числа в булевозначых моделях теории множеств и K-пространства // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 4. С. 773–775.
10. *Кутателадзе С. С.* О разностях решеточных гомоморфизмов // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 393–396.
11. *Кусраев А. Г., Табуев С. Н.* О мультипликативном представлении билинейных операторов, сохраняющих дизъюнктность // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 357–366.
12. *Bu Q., Buskes G., Kusraev A. G.* Bilinear maps on product of vector lattices: A survey // Positivity (Eds. K. Boulabiar, G. Buskes, A. Triki). Basel etc.: Birkhäuser, 2007. P. 97–126.
13. *Buskes G., Kusraev A. G.* Representation and extension of orthoregular bilinear operators // Владикавк. мат. журн. 2007. Т. 9, № 1. С. 16–29.
14. *Boulabiar K., Buskes G., Page R.* On some properties of bilinear maps of order bounded variation // Positivity. 2005. V. 9, N 3. P. 401–414.
15. *Кусраев А. Г., Табуев С. Н.* О билинейных операторах, сохраняющих дизъюнктность // Владикавк. мат. журн.. 2004. Т. 6, № 1. С. 58–70.
16. *Boulabiar K., Buskes G.* Polar decomposition of order bounded disjointness preserving operators // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. V. 132, N 3. P. 799–806.
17. *de Pagter B. and Schep A. R.* Band decomposition for disjointness preserving operators // Positivity. 2000. V. 4, N 3. P. 259–288.
18. *Bernau C. B., Huijsmans C. B., de Pagter B.* Sums of lattice homomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 115, N 1. P. 151–156.
19. *Radnaev V. A.* On n-disjoint operators // Siberian Adv. Math. 1997. V. 7, N 4. P. 44–78.
20. *Fremlin D. H.* Tensor product of Archimedean vector lattices // Amer. J. Math. 1972. V. 94, N 3. P. 777–798.
21. *Кутателадзе С. С.* О подпространствах Гротендика // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 620–624.
22. *Benamor F.* Riesz spaces of order bounded disjointness preserving operators // Comment. Math. Univ. Carolinae. 2007. V. 48. P. 607–622.
23. *Benamor F., Boulabiar K.* Maximal ideals of disjointness preserving operators // J. Math. Anal. Appl. 2006. V. 322. P. 599–609.

24. *Benamor F., Boulabiar K.* On the modulus of disjointness preserving operators on complex vector lattices // Algebra Univ. 2005. V. 54. P. 185–193.

25. *Boulabiar K.* Recent trends on order bounded disjointness preserving operators // Irish Math. Soc. Bull. 2008. V. 62. P. 43–69.

26. *Wickstead A. W.* The injective hull of an Archimedean f-algebra // Compositio Math. 1987. V. 62, N 4. P. 329–342.

27. *Gutman A. E.* Disjointness preserving operators // Vector lattices and integral operators. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1996. P. 361–454.

Статья поступила 19 июня 2014 г.

Кусраев Анатолий Георгиевич
Северо-Осетинский гос. университет им. К. Л. Хетагурова,
ул. Ватутина, 46, Владикавказ 362025;
Южный математический институт ВНЦ РАН
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
`kusraev@smath.ru`

Кутателадзе Семен Самсонович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`sskut@member.ams.org`