Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2014. Том 55, № 5

УДК 514.763+512.812.4+517.911

ГЕОМЕТРИЯ cc–ШАРОВ И КОНСТАНТЫ В ТЕОРЕМЕ BALL–BOX НА ГРУППАЛГЕБРАХ ГЕЙЗЕНБЕРГА

А. В. Грешнов

Аннотация. На группалгебрах Гейзенберга $\mathbb{H}^n_\alpha$ исследована геометрия шаров в метрике Карно — Каратеодори и найдены оптимальные константы эквивалентности в теореме Ball-Box.

Ключевые слова: группалгебры Гейзенберга, кратчайшие, метрика Карно — Каратеодори, квазиметрика, принцип максимума Понтрягина.

Юрию Григорьевичу Решетняку
к 85-летнему юбилею

Введение

Под группалгеброй Гейзенберга $\mathbb{H}^n_\alpha$ мы подразумеваем пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$, каждый элемент которого записывается в виде $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,t)$, $0=\underbrace{(0,\dots,0)}_{2n+1}$, снабженное следующей групповой операцией:

$$(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,t)\cdot(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n,\hat{y}_1,\dots,\hat{y}_n,\hat{t}) = u\cdot\hat{u} = L_u\hat{u}$$
$$=\left(x_1+\hat{x}_1,\dots,x_n+\hat{x}_n,y_1+\hat{y}_1,\dots,y_n+\hat{y}_n,t+\hat{t}+\frac{\alpha}{2}\left(\sum_{i=1}^n(x_i\hat{y}_i-y_i\hat{x}_i)\right)\right),\ \alpha=\mathrm{const},$$

где $u=(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,t)$, $\hat{u}=(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n,\hat{y}_1,\dots,\hat{y}_n,\hat{t})$ (*левый сдвиг на u элемента* $\hat{u}$). Число n называется *размерностью* группалгебры Гейзенберга, α — *частотой контактной структуры* группалгебры Гейзенберга [1]. По-другому, группалгебру Гейзенберга $\mathbb{H}^n_\alpha$ мы можем представлять себе как элементы $\sum\limits_{i=1}^n x_ie_i+\sum\limits_{i=1}^n y_ie_{n+i}+te_{2n+1}$, где $\{e_i\}_{i=1,\dots,2n+1}$ — координатные векторы пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$, удовлетворяющие следующим коммутационным соотношениям:

$$[e_i,e_{n+i}]=\alpha e_{2n+1},\quad i=1,\dots,n \tag{0.1}$$

(при этом все остальные возможные коммутационные соотношения между координатными векторами равны нулю), а умножение (групповая операция) двух произвольных элементов

$$\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i+\sum_{i=1}^n y_ie_{n+i}+te_{2n+1}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n \hat{x}_ie_i+\sum_{i=1}^n \hat{y}_ie_{n+i}+\hat{t}e_{2n+1}\right) \tag{0.2}$$

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029).

есть элемент $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} z_i e_i$, координаты которого определяются как результат применения к (0.2) формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа [2]; при этом используем соотношения (0.1). Стандартным образом выводим координаты левоинвариантных векторных полей для $\mathbb{H}^n_\alpha$:

$$\begin{gathered}
X_i^\alpha = \Big(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\substack{i\text{-е}\\ \text{место}}}, 0, \dots, 0, -\frac{\alpha}{2} y_i\Big), \\
Y_i^\alpha = \Big(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\substack{n+i\text{-е}\\ \text{место}}}, 0, \dots, 0, \frac{\alpha}{2} x_i\Big), \quad i = 1, \dots, n, \\
T^\alpha = (0, \dots, 0, 1).
\end{gathered} \tag{0.3}$$

В дальнейшем для краткости будем опускать верхний индекс α при использовании записи векторных полей, тем более что наборы векторных полей при различных α будем сравнивать только в последнем параграфе. Отметим следующий очевидный факт:

$$\operatorname{rank}\big(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, T\big)(u) = 2n + 1 \quad \forall u \in \mathbb{H}^n_\alpha.$$

Из левоинвариантности векторных полей $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, T\}$ и тождеств (0.1) следует таблица коммутаторов векторных полей

$$[X_i, Y_i] = \alpha T, \quad i = 1, \dots, n$$

(все остальные возможные коммутационные соотношения между векторными полями равны нулю). Мы рассматриваем только случай, когда $\alpha > 0$; действительно, возможность $\alpha < 0$ сводится к $\alpha > 0$ путем «переобозначения» $\{X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n\}$ (X становится Y, и наоборот, а затем переставляем в таблице коммутаторов «переобозначенные» векторные поля).

Точка 0 является единицей группалгебры Гейзенберга, элемент, обратный к элементу $x = (x_1, \dots, x_{2n+1})$, совпадает с $x^{-1} = -x = (-x_1, \dots, -x_{2n+1})$.

Из классического результата Рашевского — Чоу вытекает, что при $\alpha \neq 0$ любые две точки $u, v \in \mathbb{H}^n_\alpha$ можно соединить абсолютно непрерывной горизонтальной кривой γ конечной длины. Абсолютно непрерывная кривая

$$\gamma(s) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t)(s) : [0, s_0] \to \mathbb{H}^n_\alpha$$

называется *горизонтальной*, если для почти всех s выполняется равенство

$$\dot\gamma(s) = \sum_{i=1}^{n} p_i(s) X_i(\gamma(s)) + q_i(s) Y_i(\gamma(s)) \tag{0.4}$$

для некоторых измеримых функций $p_i(s)$, $q_i(s)$; используя (0.3) и (0.4), без труда получаем, что для почти всех s выполняются тождества

$$p_i(s) = \dot x_i(s), \quad q_i(s) = \dot y_i(s), \quad \dot t(s) = \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^{n} (\dot y_i x_i - \dot x_i y_i). \tag{0.5}$$

Длина l произвольной абсолютно непрерывной кривой на группалгебре $\mathbb{H}^n_\alpha$ измеряется при помощи формы скалярного произведения, относительно которой векторные поля $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, T\}$ ортонормальны; в частности, длина горизонтальной кривой (0.4) вычисляется по формуле

$$l(\gamma) = \int_0^{s_0} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\dot{x}_i^2(s) + \dot{y}_i^2(s)\right)}\, ds.$$

Расстояние Карно — Каратеодори (см. [3]) $d_{cc}^{\alpha}(u,v)$ на $\mathbb{H}_{\alpha}^{n}$ определяется как

$$d_{cc}^{\alpha}(u,v) = \inf\{l(\gamma) \mid \gamma \text{ — абсолютно непрерывная горизонтальная кривая, соединяющая } u, v\}.$$

Символом $B_{cc}(x,R)$ обозначаем *cc-шар*, т. е. шар в метрике Карно — Каратеодори с центром в точке x радиуса R.

Определим на $\mathbb{H}_{\alpha}^{n}$ следующий неоднородный *оператор растяжения*:

$$\delta_{\tau}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) = (\tau x_1, \dots, \tau x_n, \tau y_1, \dots, \tau y_n, \tau^2 t).$$

Отметим, что метрика Карно — Каратеодори *левоинвариантна*, т. е.

$$d_{cc}^{\alpha}(L_u v, L_u w) = d_{cc}^{\alpha}(v,w), \tag{0.6}$$

и *однородна* относительно действия оператора растяжений δ_{τ}, т. е.

$$d_{cc}^{\alpha}(\delta_{\tau} v, \delta_{\tau} w) = |\tau| d_{cc}^{\alpha}(v,w) \tag{0.7}$$

(эти свойства хорошо известны, см., например, [4], однако в их справедливости несложно убедиться и непосредственно).

Рассмотрим произвольные точки $u, v \in \mathbb{H}_{\alpha}^{n}$. Несложно убедиться непосредственно, что существуют и единственные числа $a_i = a_i(u,v)$, $b_i = b_i(u,v)$, $c = c(u,v)$ такие, что

$$v = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + \sum_{i=1}^{n} b_i Y_i + cT\right)(u), \tag{0.8}$$

где символом $\exp(Z)(x)$ обозначается отрезок интегральной линии единичной временной длины векторного поля Z с началом в точке x. (Если точки u, v лежат достаточно «близко» с точки зрения обычной евклидовой топологии, то этот факт является прямым следствием известных теорем о существовании, единственности и непрерывной зависимости от параметров решений обыкновенных дифференциальных уравнений.) Более того (см. (0.8)),

$$L_w v = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + \sum_{i=1}^{n} b_i Y_i + cT\right)(L_w u) \quad \forall w \in \mathbb{H}_{\alpha}^{n},$$
$$u = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} a_i X_i - \sum_{i=1}^{n} b_i Y_i - cT\right)(v).$$

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$Z\mathbb{H}_{\alpha}^{n} = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \exp(sT), \quad V_1(v) = \bigcup_{\substack{(a_1,\dots,a_n),\\(b_1,\dots,b_n)}} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + \sum_{i=1}^{n} b_i Y_i\right)(v).$$

Рассмотрим метрическую функцию

$$\rho^\alpha_{cc} : \mathbb{H}^n_\alpha \times \mathbb{H}^n_\alpha \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad \rho^\alpha_{cc}(v,u) = \max\{|a_i|, |b_i|, |c|^{\frac{1}{2}} \mid i = 1, \dots, n\},$$

где величины a_i, b_i, c определяются согласно (0.8). Функция ρ^α_{cc} является квазиметрикой (см., например, [5–7]), т. е. для нее выполняются следующие аксиомы:

1^0 $\rho^\alpha_{cc}(u,v) \geq 0 \quad \forall u,v \in \mathbb{H}^n_\alpha$, $\rho^\alpha_{cc}(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$,

2^0 $\rho^\alpha_{cc}(u,v) = \rho_{cc}(v,u)$,

3^0 $\rho^\alpha_{cc}(u,v) \leq Q\big(\rho^\alpha_{cc}(u,w) + \rho^\alpha_{cc}(w,v)\big) \quad \forall u,v,w \in \mathbb{H}^n$ для некоторой константы Q.

Так же, как и d^α_{cc}, квазиметрика ρ^α_{cc} левоинвариантна и однородна относительно действия оператора растяжения δ_τ. В дальнейшем символом $\mathrm{Box}_{cc}(x,R)$ обозначаем шар в квазиметрике ρ^α_{cc} с центром в точке x радиуса R.

Следствием известной теоремы Ball-Box [7] является следующий факт.

Теорема 0.1. *Существуют константы $C_1, C_2 > 0$ такие, что для всех пар точек $u, v \in \mathbb{H}^n_\alpha$ выполняется*

$$\mathrm{C}_1 \rho^\alpha_{cc}(u,v) \leq d^\alpha_{cc}(u,v) \leq C_2 \rho^\alpha_{cc}(u,v).$$

(Используя однородность относительно действия оператора растяжения и левоинвариантность d^α_{cc}, ρ^α_{cc}, теорему 0.1 на $\mathbb{H}^n_\alpha$ несложно получить самостоятельно.)

После выхода работы [4] среди специалистов по квазиконформному анализу получило распространение следующее определение *n-мерной группы Гейзенберга*: это группалгебра $\mathbb{H}^n_\alpha$, где $\alpha = -4$. Конечно, аналитический аппарат, необходимый для изучения квазиконформных отображений и связанных с ними неголономных пространств Соболева, никак не зависит от выбора параметра α (исключение составляет случай $\alpha = 0$, в этом случае мы попадаем в обычную «евклидову» ситуацию). Однако следует отметить, что если $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то квазиметрики $\rho^{\alpha_i}_{cc}$, $i = 1, 2$, неэквивалентны в области определения (см. § 5 настоящей работы), а значит, в силу теоремы 0.1 и метрики Карно — Каратеодори $d^{\alpha_i}_{cc}$, $i = 1, 2$, также неэквивалентны. Неэквивалентность здесь понимается в следующем смысле. Пусть на некотором множестве X определены две метрики (или квазиметрики) d_1, d_2. Говорим, что d_1, d_2 *неэквивалентны*, если не существует константы C такой, что $C^{-1} d_1(u,v) \leq d_2(u,v) \leq C d_1(u,v)$ для любых двух точек $u, v \in X$. В рассматриваемой ситуации в качестве X имеем одно и то же пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$, на котором посредством двух различных наборов векторных полей $\big\{X^{\alpha_i}_1, \dots, X^{\alpha_i}_n, Y^{\alpha_i}_1, \dots, Y^{\alpha_i}_n, T^{\alpha_i}\big\}$, $i = 1, 2$, определены, вообще говоря, различные метрические функции $\rho^{\alpha_i}_{cc}$, $d^{\alpha_i}_{cc}$, $i = 1, 2$.

В настоящей работе мы пытаемся разобраться в ситуации, насколько выбор параметра α влияет на геометрию *cc*-шаров с точки зрения задачи о нахождении точных констант C_1, C_2 в теореме 0.1. Для этого изучаем свойства кратчайших в метрике Карно — Каратеодори (*cc-кратчайших*) на $\mathbb{H}^n_\alpha$ как решений дифференциальных уравнений соответствующей вариационной задачи. Такой подход использовался в [8] для доказательства *cc*-равномерности *cc*-шаров на группалгебре H^1_{-4} (там же отмечалось, что рассуждениями, подобными случаю $\mathbb{H}^1_{-4}$, можно доказать *cc*-равномерность *cc*-шаров на группалгебрах H^n_{-4}). Здесь *cc*-равномерность области — это аналог известного в евклидовой теории пространств Соболева условия равномерности области в терминах метрики Карно — Каратеодори. Форма сферы на группалгебре $\mathbb{H}^1_1$ была изучена в работе

В. Н. Берестовского и И. А. Зубаревой [9]. Отметим, что сферы на $\mathbb{H}_1^1$ получаются вращением специальных двумерных кривых, так называемых «шаров Грушина» для специальной вырожденной римановой метрики на $\mathbb{R}^2$ (см. [9–13]); в ряде работ (см., например, [12, 14, 15]) можно найти схематичные изображения сфер на одномерных группалгебрах Гейзенберга, однако работа [9] дает наиболее точное представление об их устройстве. Методы из [8] были развиты в [16], где доказывалось условие cc-однородного конуса (аналог хорошо известного в евклидовой теории пространств Соболева условия конуса [17] в терминах метрики Карно — Каратеодори) для группалгебр Гейзенберга $\mathbb{H}_{-4}^n$. Также отметим недавнюю работу [1], посвященную некоторым вопросам геометрической теории меры на нильпотентных субримановых многообразиях, в которой изучались определенные свойства кратчайших группалгебр, натянутых на векторные поля $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, T\}$, таких, что

$$[X_i, Y_i] = -b_i T, \ i = 1, \dots, n, \quad [X_i, Y_j] = 0, \ i \neq j,$$

$$[X_i, T] = [Y_i, T] = 0, \ i = 1, \dots, n,$$

где $b_i = \mathrm{const}$, $i = 1, \dots, n$.

В § 1 мы изучаем простейшие взаимосвязи между cc-кратчайшими группалгебр $\mathbb{H}_\alpha^1$ и $\mathbb{H}_\alpha^n$, не используя методы вариационного исчисления. В § 2 рассматриваем единичные сферы группалебры $\mathbb{H}_\alpha^1$, имеющие центр в начале координат, основываясь на свойствах cc-кратчайших, параметризованных длиной дуги, как решений соответствующих уравнений Эйлера — Лагранжа. Ключевой результат § 2 — теорема 2.1, в которой явно находим множество значений параметра λ (которое зависит от α), соответствующего cc-кратчайшей как решению вариационной задачи. В процессе доказательства теоремы 2.1 вычислим ряд необходимых в дальнейшем параметров, характеризующих cc-сферы группалгебр $\mathbb{H}_\alpha^1$. Также в § 2 дан ряд следствий из теоремы 2.1, среди которых следствия 2.2 и 2.5 несколько другим методом были получены ранее в работах [9, 18] для группалгебры $\mathbb{H}_1^1$. В § 3 обобщаем полученные в § 2 результаты для группалгебр произвольной размерности; специфика дифференциальных уравнений, описывающих cc-кратчайшие группалгебр $\mathbb{H}_\alpha^n$, оказывается таковой, что все результаты § 2 переносятся для $n > 1$ без существенных изменений. В § 4, используя результаты § 1–3, выводим теоремы о точных константах эквивалентности квазиметрики и метрики Карно — Каратеодори на группалгебрах Гейзенберга, но формулируем наши результаты в терминах «точных» включений соответствующих шаров. Константы включения зависят как от α, так и от размерности n группалгебры Гейзенберга. Отметим, что задача об оптимальности констант в теореме Ball-Box решена только при $\alpha \leq \frac{(2+\pi)^2}{2\pi n}$ (см. теоремы 4.1–4.3); этот промежуток включает в себя, в частности, случай группы Гейзенберга из [4] (с точностью до знака в таблице коммутаторов), см. следствие 4.1. В § 5 показываем, почему квазиметрики $\rho_{cc}^{\alpha_i}$, $i = 1, 2$, неэквивалентны в $\mathbb{R}^3$, когда $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Автор выражает глубокую признательность организаторам конференции «Управление и оптимизация неголономных систем» (10–13.07.2013, г. Переславль–Залесский) и лично профессору Ю. Л. Сачкову за предоставленную возможность выступить с докладом на конференции, что способствовало скорейшему написанию настоящей статьи, профессору А. А. Аграчеву за интерес к результатам автора и рецензенту за замечания.

§ 1. Свойства cc-кратчайших группалгебр $\mathbb{H}^n_\alpha$

Свойство 1.1. *Кратчайшие группы Гейзенберга $\mathbb{H}^n_\alpha$ — бесконечно гладкие кривые.*

Доказательство. В силу левоинвариантности метрики Карно — Каратеодори достаточно доказать, что cc-кратчайшая

$$\gamma_u(s) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t)(s), \quad s \in [0, s_0],$$

соединяющая единицу группалгебры $\mathbb{H}^n$ (начало координат евклидова пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$) и произвольную точку $u = (u_1, \dots, u_{2n+1}) \in \mathbb{H}^n$, принадлежит классу C^∞. Из определения метрики Карно — Каратеодори вытекает, что рассматриваемая кратчайшая есть абсолютно непрерывная кривая γ_u, минимизирующая функционал длины $\int\limits_0^{s_0} \bigl(\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2 + \dot{y}_1^2 + \dots + \dot{y}_n^2\bigr)^{\frac{1}{2}}(s)\, ds$ или, что эквивалентно, функционал энергии $\int\limits_0^{s_0} \bigl(\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2 + \dot{y}_1^2 + \dots + \dot{y}_n^2\bigr)(s)\, ds$ при условии

$$t(s) = \frac{\alpha}{2} \int\limits_0^s \sum_{i=1}^n (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i)(s)\, ds, \quad \gamma_u(0) = 0, \quad \gamma_u(s_0) = u. \tag{1.1}$$

Используя правило множителей Лагранжа [18], получаем, что $\gamma_u(s)$ является экстремалью функционала

$$\int\limits_0^{s_0} \left(\lambda_0 \bigl(\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2 + \dot{y}_1^2 + \dots + \dot{y}_n^2\bigr) - \tilde{\lambda} \left(\dot{t} + \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n (y_i \dot{x}_i - x_i \dot{y}_i) \right)(s) \right) ds, \quad \lambda_0 = \mathrm{const}, \tag{1.2}$$

при условии $\gamma_u(0) = 0$, $\gamma_u(s_0) = u$. Составляя уравнения Эйлера — Лагранжа для (1.2), для п. в. $s \in [0, s_0]$ получаем тождества

$$\begin{cases} \tilde{\lambda} &= \mathrm{const}, \\ \lambda_0 \dot{x}_i(s) &= \frac{\tilde{\lambda}\alpha}{2} y_i(s) + c_{x_i}, \quad c_{x_i} = \mathrm{const}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \lambda_0 \dot{y}_i(s) &= -\frac{\tilde{\lambda}\alpha}{2} x_i(s) + c_{y_i}, \quad c_{y_i} = \mathrm{const}, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{1.3}$$

В случае $\lambda_0 = 0$ (1.3) принимает вид

$$\begin{cases} \tilde{\lambda} &= \mathrm{const}, \\ 0 &= \frac{\tilde{\lambda}\alpha}{2} y_i(s) + c_{x_i}, \quad c_{x_i} = \mathrm{const}, \quad i = 1, \dots, n, \\ 0 &= -\frac{\tilde{\lambda}\alpha}{2} x_i(s) + c_{y_i}, \quad c_{y_i} = \mathrm{const}, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{1.4}$$

Тогда для существования нетривиальных решений системы (1.4) необходимо, чтобы $\tilde{\lambda} \neq 0$, но в этом случае $x_i(s) = \mathrm{const}$, $y_i(s) = \mathrm{const}$, $i = 1, \dots, s$, откуда с учетом (1.1) вытекает, что $t(s) = \mathrm{const}$. Следовательно, решения системы (1.4) тривиальны, и с необходимостью в (1.3) должно быть $\lambda_0 \neq 0$. Если при этом $\tilde{\lambda} = 0$, то (1.3) имеет вид

$$\begin{cases} \tilde{\lambda} &= 0, \\ \lambda_0 \dot{x}_i(s) &= c_{x_i}, \quad c_{x_i} = \mathrm{const}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \lambda_0 \dot{y}_i(s) &= c_{y_i}, \quad c_{y_i} = \mathrm{const}, \quad i = 1, \dots, n, \end{cases} \tag{1.5}$$

откуда с учетом (1.1) вытекает, что $t(s) \equiv 0$ и единственная cc-кратчайшая, соединяющая начало координат евклидова пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$ и точку $(u_1, \dots, u_{2n}, 0)$, — обычный прямолинейный отрезок. Рассмотрим случай $\tilde{\lambda} \neq 0$, тогда система уравнений (1.3) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_i(s) & = \frac{\lambda\alpha}{2} y_i(s) + c'_{x_i}, \quad c'_{x_i} = \mathrm{const}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \dot{y}_i(s) & = -\frac{\lambda\alpha}{2} x_i(s) + c'_{y_i}, \quad c'_{y_i} = \mathrm{const}, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{1.6}$$

Нетрудно видеть, что решения системы (1.6) бесконечно гладкие.

Свойство 1.2. 1^0. *Соединим точки с координатами* $(0, 0, 0)$ *и* (a, b, c) *группалгебры* $\mathbb{H}^1_\alpha$ *абсолютно непрерывной горизонтальной кривой* $\gamma_0 = \gamma_0(s) = (x, y, t)(s)$, $s \in [0, s_0]$. *Тогда параметризованная кривая*

$$\gamma_\varphi = \gamma_\varphi(s) = (x \cos\varphi - y \sin\varphi, x \sin\varphi + y \cos\varphi, t)(s), \quad \varphi \in \mathbb{R},\ s \in [0, s_0],$$

горизонтальна, при этом $l(\gamma_\varphi) = l(\gamma_0)$.

2^0. *Любая точка* $v = (0, 0, c) \in \mathbb{H}^1_\alpha$ *соединяется с началом координат бесконечным числом числом* cc*-кратчайших, совокупность которых образует поверхность вращения* Γ_c. *При этом если* $c > 0$, *то множество* $\Gamma_c \setminus 0$ *лежит не ниже плоскости* $t = 0$, *если* $c < 0$, *то множество* $\Gamma_c \setminus 0$ *лежит не выше плоскости* $t = 0$.

Доказательство. П. 1^0 проверяется непосредственно, п. 2^0 является следствием п. 1^0 и следующего элементарного наблюдения: если cc-кратчайшая γ, соединяющая точки 0 и $(0, 0, \pm c)$, $c > 0$, пересекает плоскость $V_1(0)$ в точке v и при этом участок cc-кратчайшей γ от 0 до v целиком не принадлежит $V_1(0)$, то всегда можно построить горизонтальную кривую, соединяющую точки 0 и $(0, 0, \pm c)$, длины, меньшей чем γ.

Введем обозначение $u^\pm_{c,n} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{2n \text{ раз}}, \pm c)$.

Свойство 1.3. 1^0. *Пусть* $\gamma = \gamma(s) = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, t)(s) \subset \mathbb{H}^n_\alpha$, $s \in [0, s_0]$, — cc*-кратчайшая, соединяющая точки* 0 *и* $u^\pm_{c,n}$. *Тогда любая кривая* $(x_k, y_k, t_k)(s) \subset \mathbb{H}^1_\alpha$, $s \in [0, s_0]$,

$$t_k(s) = \frac{\alpha}{2} \int\limits_0^s (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k)(s)\, ds,$$

является cc*-кратчайшей, соединяющей точки с координатами* $(0, 0, 0)$, $(0, 0, t_k)(s_0)$.

2^0. *Пусть* $\gamma_1(s) = (x_1, y_1, t_1)(s) \subset \mathbb{H}^1_\alpha$, $s \in [0, s_0]$, — cc*-кратчайшая, соединяющая точки* 0, $u^\pm_{c,1}$ *и параметризованная длиной дуги. Тогда параметризованная кривая* $(x_1, y_1, 0, \dots, 0, t_1)(s) \subset \mathbb{H}^n_\alpha$, $s \in [0, s_0]$, *является* cc*-кратчайшей, соединяющей точки* 0 *и* $u^\pm_{c,n}$.

3^0. *Для любого вектора* $v = (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$, $\sum\limits_{i=1}^n \left(a_i^2 + b_i^2\right) = 1$, *в группалгебре* $\mathbb{H}^n_\alpha$ *найдется* cc*-кратчайшая* $\gamma(s)$, $s \in [0, s_0]$, *параметризованная длиной дуги, соединяющая точки* 0, $u^\pm_{c,n}$ *и такая, что* $\dot{\gamma}(0) = v$.

Доказательство. Для простоты записи докажем свойство 1.3 только для $\mathbb{H}^2_\alpha$; для произвольного случая доказательство аналогично.

1^0. Предположим, что горизонтальная кривая $\sigma = \sigma(s) = (x_1, y_1, t_1)(s)$, $s \in [0, s_0]$, не является cc-кратчайшей группалгебры Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$, соединяющей точки 0 и $(0,0,t_1)(s_0)$. Пусть горизонтальная кривая $\hat{\gamma}=\hat{\gamma}(s)=(p,q,r)(s)$, $s\in[0,s_0]$, является cc-кратчайшей группалгебры Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$, соединяющей точки 0 и $(0,0,t_1)(s_0)$ (отметим, что здесь кратчайшая $\hat{\gamma}$, вообще говоря, не параметризована длиной дуги). Таким образом, имеем

$$l(\hat{\gamma})=\int\limits_0^{s_0}\sqrt{(\dot{p}^2+\dot{q}^2)(s)}\,ds<\int\limits_0^{s_0}\sqrt{\big(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2\big)(s)}\,ds=l(\sigma).$$

В $\mathbb{H}^2_\alpha$ рассмотрим горизонтальную кривую $\gamma_1=\gamma_1(s)$, $s\in[0,s_0]$, исходящую из начала координат, такую, что ее проекция на евклидову плоскость с координатами (x_1,y_1) совпадает с кривой $(p,q)(s)$, $s\in[0,s_0]$, а ее проекция на евклидову плоскость с координатами (x_2,y_2) совпадает с кривой $(x_2,y_2)(s)$, $s\in[0,s_0]$, т. е.

$$\gamma_1=\gamma_1(s)=(p,q,x_2,y_2,\tilde{t})(s)\subset\mathbb{H}^2_\alpha,\quad s\in[0,s_0].$$

Из построения вытекает, что γ_1 соединяет точки 0 и $u^{\pm}_{c,2}$, при этом

$$l(\gamma_1)=\int\limits_0^{s_0}\sqrt{\big(\dot{p}^2+\dot{q}^2+\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2\big)(s)}\,ds<\int\limits_0^{s_0}\sqrt{\big(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2\big)(s)}\,ds=l(\gamma),$$

что противоречит тому, что γ — cc-кратчайшая.

2^0. Рассмотрим точку $u^+_{c,2}$. Пусть $\gamma=\gamma(s)=(x_1,y_1,x_2,y_2,t)(s)$, $s\in[0,s_0]$, — cc-кратчайшая, соединяющая точки 0 и $u^+_{c,2}$. Заметим, что

$$c\geq t_i(s_0)=\frac{\alpha}{2}\int\limits_0^{s}(\dot{y}_ix_i-\dot{x}_iy_i)(s)\,ds>0,\quad i=1,2. \tag{1.7}$$

Действительно, пусть, например, $t_1(s_0)<0$, тогда $t_2(s_0)>c$, откуда вытекает, что длина параметризованной кривой $\gamma_2(s)=(0,0,x_2,y_2,t_2)(s)$, $s\in[0,s_0]$, соединяющей точки 0 и $(0,0,0,0,t_2(s_0))$, меньше чем $d_{cc}\big(0,u^+_{c,2}\big)$. Следовательно, длина горизонтальной кривой $\delta_\tau\gamma_2(s)$, $\tau=\sqrt{\frac{c}{t_2(s_0)}}$, соединяющей точки 0 и $u^+_{c,2}$, также меньше $d_{cc}\big(0,u^+_{c,2}\big)$, что противоречит тому, что $(x_1,y_1,x_2,y_2,t)(s)$, $s\in[0,s_0]$, — cc-кратчайшая, соединяющая точки 0 и $u^+_{c,2}$. Следовательно, неравенства (1.7) выполняются. Кроме того,

$$t_1(s_0)+t_2(s_0)=\frac{\alpha}{2}\int\limits_0^{s_0}(\dot{x}_1y_1-\dot{y}_1x_1)(s)\,ds+\frac{\alpha}{2}\int\limits_0^{s_0}(\dot{x}_2y_2-\dot{y}_2x_2)(s)\,ds=c. \tag{1.8}$$

Используя п. 1^0 свойства 1.3 и (1.7), можно записать

$$(x_k,y_k)(s)=(\tau_kp_k,\tau_kq_k)(s),\quad \tau_k=\sqrt{\frac{t_k(s_0)}{c}},\quad s\in[0,\tilde{s}],\quad k=1,2, \tag{1.9}$$

где $\tilde{\gamma}_k=\tilde{\gamma}_k(s)=(p_k,q_k,\tilde{t}_k)(s)$, $k=1,2$, — cc-кратчайшие группалгебры $\mathbb{H}^1_\alpha$, соединяющие точки 0 и $u^+_{c,1}$, параметризованные длиной дуги. Тогда

$$l(\tilde{\gamma}_k)=\int\limits_0^{\tilde{s}}\sqrt{\big(\dot{p}_k^2+\dot{q}_k^2\big)(s)}\,ds=\int\limits_0^{\tilde{s}}1\cdot ds=\tilde{s},\quad k=1,2. \tag{1.10}$$

Рассмотрим параметризованную кривую $\hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_1(s) = (\hat{x}_1, \hat{y}_1, 0, 0, \hat{t}_1)(s) \subset \mathbb{H}^2_\alpha$, $s \in [0, \tilde{s}]$, где $(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{t}_1)(s) \subset \mathbb{H}^1_\alpha$, — некоторая cc-кратчайшая, соединяющая точки 0 и $u^+_{c,1}$. Имеем $l(\hat{\gamma}_1) = \tilde{s}$. Используя (1.8)–(1.10), получаем

$$l(\hat{\gamma}) = \int\limits_0^{\tilde{s}} \sqrt{\tau_1^2 \dot{p}_1^2 + \tau_1^2 \dot{q}_1^2 + \tau_2^2 \dot{p}_2^2 + \tau_2^2 \dot{q}_2^2}\, ds = \tilde{s} = l(\hat{\gamma}_1).$$

Это означает, что $\hat{\gamma}_1$ — cc-кратчайшая, соединяющая точки 0 и $u^+_{c,2}$ в $\mathbb{H}^2_\alpha$.

Случай точки $u^-_{c,2}$ рассматривается аналогично.

3^0. Пусть $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = c_1 \neq 0$, $\sqrt{a_2^2 + b_2^2} = c_2 \neq 0$, и

$$\gamma = \gamma(s) = \big(c_1 x_1, c_1 y_1, c_2 x_2, c_2 y_2, c_1^2 t_1 + c_2^2 t_2\big)(s), \quad s \in [0, s_0],$$

где $\gamma_i(s) = (x_i, y_i, t_i)(s) \subset \mathbb{H}^1_\alpha$, $i = 1, 2$, — cc-кратчайшие, соединяющие точки 0 и $u^\pm_{c,1}$, параметризованные длиной дуги, такие, что $\dot{\gamma}_i(0) = \big(\frac{a_i}{c_i}, \frac{b_i}{c_i}, 0\big)$. Тогда $l(\gamma) = s_0$, $t(s_0) = \pm c$, $\dot{\gamma}(0) = (a_1, b_1, a_2, b_2, 0)$. Таким образом, кривая γ — искомая cc-кратчайшая.

Случай $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 0$ фактически рассмотрен в п. 2^0.

§ 2. cc-Шары группалгебры $\mathbb{H}^1_\alpha$

Мы рассматриваем $\mathbb{H}^1_\alpha$ как $\mathbb{R}^3$ с системой координат (x, y, t) и со следующей групповой операцией:

$$(x, y, t) \cdot (x', y', t') = \left(x + x', y + y', t + t' + \frac{\alpha}{2}(xy' - x'y)\right).$$

Соответственно левоинвариантные векторные поля группалгебры $\mathbb{H}^1_\alpha$ имеют вид

$$X = \left(1, 0, -\frac{\alpha}{2} y\right), \quad Y = \left(0, 1, \frac{\alpha}{2} x\right), \quad T = (0, 0, 1).$$

Абсолютно непрерывная параметризованная кривая $(x, y, t)(s)$, $s \in [0, s_0]$, горизонтальна (см. (0.5)), если для почти всех $s \in [0, s_0]$ выполняется тождество

$$\dot{t} = \frac{\alpha}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Из рассуждений, приведенных в доказательстве леммы 1.1, следует, что если горизонтальная кривая $(x, y, t)(s)$, $s \in [0, s_0]$, является cc-кратчайшей группалгебры $\mathbb{H}^1_\alpha$, соединяющей две произвольно выбранные точки, то она минимизирует следующий функционал:

$$\int\limits_0^{s_0} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{\alpha\lambda}{2}(y\dot{x} - x\dot{y})\right) ds, \quad \lambda = \text{const}. \tag{2.1}$$

Выпишем экстремали функционала (2.1), исходящие из начала координат пространства $\mathbb{R}^3$, в явном виде. Пусть экстремаль $(x, y, t)(s)$ соединяет начало координат с некоторой точкой (a, b, c). Тогда, используя лемму 1.1, имеем

$$\ddot{x}(s) = -\frac{\alpha\lambda}{2}\dot{y}(s), \quad \ddot{y}(s) = \frac{\alpha\lambda}{2}\dot{x}(s), \tag{2.2}$$

откуда

$$\dot{x}(s) = -\frac{\alpha\lambda}{2}y(s) + \dot{x}(0), \quad \dot{y}(s) = \frac{\alpha\lambda}{2}x(s) + \dot{y}(0).$$

Пусть $\lambda = 0$, тогда

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \dot{x}(0), \\ \dot{y}(s) = \dot{y}(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(s) = \dot{x}(0)s, \\ y(s) = \dot{y}(0)s \end{cases} \Rightarrow t(s) = 0.$$

Следовательно, значению $\lambda = 0$ соответствует отрезок $(as/s_0, bs/s_0, 0)$, $s \in [0, s_0]$.

Запишем систему (2.2) в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{a}_3 \\ \dot{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha\lambda}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha\lambda}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Стандартным образом находим фундаментальную матрицу решений системы (2.3):

$$Y(s) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right) & -\cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right) & 1 & 0 \\ -\cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right) & -\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right) & 0 & 1 \\ \frac{\alpha\lambda}{2}\cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right) & \frac{\alpha\lambda}{2}\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right) & 0 & 0 \\ \frac{\alpha\lambda}{2}\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right) & -\frac{\alpha\lambda}{2}\cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение системы (2.3) определяется по формуле

$$Y(s)\cdot C, \quad C = (C_1, C_2, C_3, C_4)^{\mathrm{T}}, \quad C_i = \mathrm{const}, \ i = 1, 2, 3, 4.$$

Так как экстремаль $\big(x, y, t\big)(s)$ исходит из начала координат, то $C_1 = C_4$, $C_2 = C_3$. Таким образом,

$$\begin{cases} x(s) = C_1\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right) + C_2\big(1 - \cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right)\big), \quad x(s_0) = a, \\ y(s) = C_1\big(1 - \cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right)\big) - C_2\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right), \quad y(s_0) = b, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(s) = \frac{\alpha\lambda C_1}{2}\cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right) + \frac{\alpha\lambda C_2}{2}\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right), \quad \dot{x}(0) = \frac{\alpha\lambda C_1}{2}, \\ \dot{y}(s) = -\frac{\alpha\lambda C_1}{2}\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right)\big) - \frac{\alpha\lambda C_2}{2}\cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right), \quad \dot{y}(0) = -\frac{\alpha\lambda C_2}{2}, \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = \frac{b\big(1 - \cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s_0\right)\big) + a\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s_0\right)}{2\big(1 - \cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s_0\right)\big)}, \quad C_2 = \frac{a\big(1 - \cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s_0\right)\big) - b\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s_0\right)}{2\big(1 - \cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s_0\right)\big)}, \tag{2.4}$$

$$t(s) = \frac{\alpha^2\lambda}{4}\big(C_1^2 + C_2^2\big)\int\limits_0^s \left(1 - \cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right)\right)ds = \frac{\alpha^2\lambda}{4}\big(C_1^2 + C_2^2\big)\left(s - \frac{2\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right)}{\alpha\lambda}\right),$$

$$\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s) = \big(C_1^2 + C_2^2\big)\frac{\alpha^2\lambda^2}{4},$$

поэтому если экстремаль параметризована длиной дуги ($\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s) = 1$), то

$$t(s) = \frac{\alpha\lambda s - 2\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right)}{\alpha\lambda^2},$$

$$r^2(s) = x^2(s) + y^2(s) = 2\big(C_1^2 + C_2^2\big)\left(1 - \cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right)\right) = \frac{16}{\alpha^2\lambda^2}\sin^2\left(\frac{\alpha\lambda}{4}s\right)$$

$$\Rightarrow r(s) = \frac{4}{|\alpha\lambda|}\left|\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{4}s\right)\right|,$$

где $r(s)$ — длина радиус-вектора точки плоскости с координатами $(x, y)(s)$.

Теорема 2.1. *Пусть* $\gamma_u = \gamma_u(s) = (x_\lambda, y_\lambda, t_\lambda)(s) \subset \mathbb{H}^1_\alpha$, $s \in [0,1]$, *— cc-кратчайшая, параметризованная длиной дуги, соединяющая точку* 0 *и произвольную точку* $u \in S_{cc}(0,1) = \partial B_{cc}(0,1)$, *где* λ *— параметр, соответствующий этой кратчайшей как экстремали, удовлетворяющей системе* (2.2). *Тогда набор таких параметров совпадает с отрезком* $\left[-\frac{4\pi}{\alpha}, \frac{4\pi}{\alpha}\right]$. *При этом если* u *лежит выше* (*ниже*) *плоскости* $t = 0$, *то* $\lambda \in \left(0, \frac{4\pi}{\alpha}\right]$ $\left(\lambda \in \left[-\frac{4\pi}{\alpha}, 0\right)\right)$.

Доказательство. Обозначим $u_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda)$, тогда, учитывая выражения для функций $r(s)$, $t(s)$, получаем

$$a_\lambda = C_1 \sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}\right) + C_2\left(1 - \cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}\right)\right),\ b_\lambda = C_1\left(1 - \cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}\right)\right) - C_2 \sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}\right),$$

$$c_\lambda = \frac{\alpha\lambda - 2\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}\right)}{\alpha\lambda^2}, \quad r(\lambda) = \sqrt{a_\lambda^2 + b_\lambda^2} = \frac{4}{|\alpha\lambda|}\left|\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{4}\right)\right|. \tag{2.5}$$

Рассмотрим функцию $r(\lambda)$ на $\left(0, 4\pi/\alpha\right]$. Имеем

$$r(\lambda) = \frac{4}{\alpha\lambda}\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{4}\right), \quad \lim_{\lambda\to 0} r(\lambda) = 1, \quad r\left(\frac{4\pi}{\alpha}\right) = 0, \quad r\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) = \frac{2}{\pi}. \tag{2.6}$$

Как несложно видеть,

$$\dot r(\lambda) = 4\frac{\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha\lambda}{4}\cdot\alpha\lambda - \alpha\sin\frac{\alpha\lambda}{4}}{(\alpha\lambda)^2}\Bigg|_{\lambda\in(0,4\pi/\alpha]} < 0, \tag{2.7}$$

при этом $\lim\limits_{\lambda\to 0}\dot r(\lambda) = 0$, $\dot r\left(4\pi/\alpha\right) = -\frac{\alpha}{4\pi}$. Таким образом, функция $r(\lambda)$, доопределенная при $\lambda = 0$ значением 1, убывая, непрерывно монотонно отображает отрезок $\left[0, 4\pi/\alpha\right]$ на отрезок $i_1 = [0,1]$. Поэтому на $[0,1]$ существует обратная к $r(\lambda)$ непрерывная монотонная функция

$$\lambda = \lambda(r) : i_1 \to [0, 4\pi/\alpha]. \tag{2.8}$$

Зафиксируем некоторую точку (a_0, b_0) такую, что $a_0^2 + b_0^2 = 1$. В качестве i_1 будем рассматривать натуральную параметризацию отрезка евклидовой плоскости, соединяющего начало координат и точку (a_0, b_0). Тогда каждому значению $r \in i_1$ однозначно соответствует точка плоскости с координатами (ra_0, rb_0) и значение параметра $\lambda = \lambda(r)$ так, что $(ra_0, rb_0) = (a_{\lambda(r)}, b_{\lambda(r)})$. Рассмотрим функцию $c_\lambda = t(\lambda)$ при $\lambda \in (0, 4\pi/\alpha]$. Заметим, что $\lim\limits_{\lambda\to+0} t(\lambda) = 0$, поэтому, доопределяя функцию $t(\lambda)$ при $\lambda = 0$ значением 0, будем рассматривать $t(\lambda)$ на $[0, 4\pi/\alpha]$. Несложно видеть, что

$$t(\lambda)|_{(0,\frac{4\pi}{\alpha}]} > 0, \quad t\left(\frac{4\pi}{\alpha}\right) = \frac{\alpha}{4\pi}. \tag{2.9}$$

При этом $\dot t(\lambda) = \frac{4\sin\frac{\alpha\lambda}{2} - \alpha\lambda\cos\frac{\alpha\lambda}{2} - \alpha\lambda}{\alpha\lambda^3}$.

Решим уравнение $\dot t(\lambda) = 0$ на промежутке $\left(0, 4\pi/\alpha\right)$, что эквивалентно решению уравнения $4\sin\frac{\alpha\lambda}{2} - \alpha\lambda\cos\frac{\alpha\lambda}{2} - \alpha\lambda = 0$ на промежутке $(0, 4\pi/\alpha)$. Используя тригонометрические формулы двойных углов, сводим задачу к решению эквивалентного уравнения $\cos\frac{\alpha\lambda}{4}\cdot\left(\sin\frac{\alpha\lambda}{4} - \frac{\alpha\lambda}{4}\cdot\cos\frac{\alpha\lambda}{4}\right) = 0$, и поскольку уравнение $\sin\frac{\alpha\lambda}{4} - \frac{\alpha\lambda}{4}\cdot\cos\frac{\alpha\lambda}{4} = 0$ не имеет решений на промежутке $\left(0, 4\pi/\alpha\right)$, то единственная точка локального экстремума функции $t(\lambda)$ на промежутке $\left(0, 4\pi/\alpha\right)$ определяется из равенства $\cos\frac{\alpha\lambda}{4} = 0$, т. е. $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$. Имеем

$$t\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow \frac{2\pi}{\alpha} \text{ — точка максимума функции } t(\lambda) \text{ на } [0, 4\pi/\alpha]. \tag{2.10}$$

Из (2.6)–(2.10) следует, что в точке $r = \frac{2}{\pi}$ функция

$$t(r) = t(\lambda(r)), \quad r \in [0,1], \tag{2.11}$$

достигает своего максимума на $[0,1]$, равного $\frac{\alpha}{2\pi}$, при $r = \frac{2}{\pi}$.

Таким образом, мы установили, что параметризованная кривая

$$\gamma_{(a_0,b_0)}(\lambda) = (a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda), \quad \lambda \in [0, 4\pi/\alpha], \tag{2.12}$$

удовлетворяет следующим свойствам:

1^0 лежит в плоскости $\Pi_{(a_0,b_0)}$, натянутой на векторы $(0,0,1)$, $(a_0,b_0,0)$, где $a_0^2 + b_0^2 = 1$,

2^0 соединяет точки $(a_0,b_0,0)$ и $(0,0,\alpha/2\pi)$,

3^0 не имеет самопересечений,

4^0 $\max\limits_{\lambda\in[0,4\pi/\alpha]} d_e(\gamma_{(a_0,b_0)}(\lambda), V_1(0)) = d_e\big(\big(\frac{2a_0}{\pi}, \frac{2b_0}{\pi}, 0\big), \big(\frac{2a_0}{\pi}, \frac{2b_0}{\pi}, \frac{\alpha}{2\pi}\big)\big) = \frac{\alpha}{2\pi}$,

5^0 устроена одинаково в каждой плоскости $\Pi_{(a_0,b_0)}$; другими словами, если $\begin{pmatrix} a_\varphi \\ b_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$, то $\gamma_{(a_\varphi,b_\varphi)}(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\lambda \\ b_\lambda \\ c_\lambda \end{pmatrix}$.

Рассмотрим $\lambda \in [-4\pi/\alpha, 0)$. Несложно убедиться, используя (2.4), (2.5), в том, что

$$a_\lambda = a_{-\lambda}, \quad b_\lambda = b_{-\lambda}, \quad c_\lambda = -c_{-\lambda}. \tag{2.13}$$

Таким образом, множество

$$\bigcup_{\substack{\lambda\in[-4\pi/\alpha,0],\\ \varphi\in[0,2\pi)}} \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\lambda \\ b_\lambda \\ c_\lambda \end{pmatrix} \right\}$$

симметрично относительно плоскости $t = 0$ множеству

$$\bigcup_{\substack{\lambda\in[0,4\pi/\alpha],\\ \varphi\in[0,2\pi)}} \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\lambda \\ b_\lambda \\ c_\lambda \end{pmatrix} \right\}.$$

Покажем, что множество

$$S = \bigcup_{\substack{\lambda\in[-4\pi/\alpha,4\pi/\alpha],\\ \varphi\in[0,2\pi)}} \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\lambda \\ b_\lambda \\ c_\lambda \end{pmatrix} \right\} \tag{2.14}$$

совпадает с множеством $S_{cc}(0,1)$. Пусть B — множество такое, что $\partial B = S$ Покажем, что

$$u_\lambda \in B \quad \text{в случае } \lambda \in \Big(-\infty, -\frac{4\pi}{\alpha}\Big) \cup \Big(\frac{4\pi}{\alpha}, \infty\Big).$$

Несложно видеть, что

$$r(\lambda) < \frac{1}{\pi} \quad \text{при } |\lambda| \in \Big(\frac{4\pi}{\alpha}, \infty\Big). \tag{2.15}$$

Имеем

$$|c_\lambda| = \left|\frac{\alpha\lambda - 2\sin(\frac{\alpha\lambda}{2})}{\alpha\lambda^2}\right| = \alpha\left|\frac{1 - \frac{\sin\frac{\lambda\alpha}{2}}{\frac{\lambda\alpha}{2}}}{\lambda\alpha}\right|. \tag{2.16}$$

Если $|\lambda| \in \left(\frac{4\pi}{\alpha}, \frac{6\pi}{\alpha}\right)$, то $\left|\frac{\lambda\alpha}{2}\right| \in (2\pi, 3\pi)$, и, используя (2.16), получаем следующую оценку:

$$|c_\lambda| < \frac{\alpha}{4\pi}, \quad |\lambda| \in \left(\frac{4\pi}{\alpha}, \frac{6\pi}{\alpha}\right). \tag{2.17}$$

Оценим $|c_\lambda|$ в случае, когда $|\lambda| \in \left[\frac{6\pi}{\alpha}, \infty\right)$. Пусть, например, $\lambda \in \left[\frac{6\pi}{\alpha}, \infty\right)$, тогда

$$|c_\lambda| = \left|\frac{\alpha}{\lambda\alpha} - \frac{2\alpha\sin\frac{\lambda\alpha}{2}}{\lambda^2\alpha^2}\right| \le \left|\frac{\alpha}{\lambda\alpha}\right| + \left|\frac{2\alpha\sin\frac{\lambda\alpha}{2}}{\lambda^2\alpha^2}\right| \le \frac{\alpha}{6\pi} + \frac{2\alpha}{(6\pi)^2}$$
$$= \frac{\alpha}{6\pi}\left(1 + \frac{2}{6\pi}\right) < \frac{\alpha}{4\pi}. \tag{2.18}$$

Точно так же можно показать, что

$$|c_\lambda| < \frac{\alpha}{4\pi}, \quad \lambda \in \left(-\infty, -\frac{6\pi}{\alpha}\right). \tag{2.19}$$

Таким образом, из (2.15)–(2.19) вытекает, что любая точка вида $(a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda)$ принадлежит внутренности кругового цилиндра K с радиусом основания, равным $\frac{1}{\pi}$, и высотой $\frac{\alpha}{2\pi}$. С другой стороны, из п. 4^0 вытекает, что $K \subset B$. Но тогда любая экстремаль $(x_\lambda, y_\lambda, t_\lambda)(s)$, параметризованная длиной дуги и имеющая единичную длину, где $|\lambda| \in \left(\frac{4\pi}{\alpha}, \infty\right)$, не cc-кратчайшая. Действительно, предположим противное, т. е. для какого-то λ', $|\lambda'| \in \left(\frac{4\pi}{\alpha}, \infty\right)$, экстремаль $(x_{\lambda'}, y_{\lambda'}, t_{\lambda'})(s)$, $s \in [0,1]$, является cc-кратчайшей. Тогда из определения множества B вытекает, что найдется число

$$\tau > 1 \quad \text{такое, что } \delta_\tau u_{\lambda'} \in S, \quad l(\delta_\tau \gamma_{u_{\lambda'}}(s)) = \tau > 1,$$

но в силу определения поверхности S всегда найдется число $\lambda'' \in$ такое, что $\delta_\tau u_{\lambda'} = u_{\lambda''}$, $l(\gamma_{u_{\lambda''}}) = 1$, что противоречит тому, что экстремаль $\gamma_{u_{\lambda'}}(s)$, $s \in [0,1]$, параметризованная длиной дуги, cc-кратчайшая. Таким образом, $S = S_{cc}(0,1)$. Теорема 2.1 доказана.

Следствие 2.1. *Отображение, сопоставляющее каждой точке $u \in \left(S_{cc} \setminus Z\mathbb{H}^1_\alpha\right)$ тройку $(\dot{x}_\lambda(0), \dot{y}_\lambda(0), \lambda)$, является гомеоморфизмом между множествами $S_{cc} \setminus Z\mathbb{H}^1_\alpha$ и $S^1 \times \left(-\frac{4\pi}{\alpha}, \frac{4\pi}{\alpha}\right)$, где S^1 — единичная плоская окружность.*

Следствие 2.2 [19]. 1^0. *Не существует точек $w = (a,b,c) \in \mathbb{H}^1_\alpha$, $a^2 + b^2 > 0$, таких, что w можно соединить с началом координат двумя cc-кратчайшими.*

2^0. *Любая cc-кратчайшая, соединяющая некоторую точку $w = (a,b,c) \in \mathbb{H}^1_\alpha$, $a^2 + b^2 > 0$, является частью некоторой cc-кратчайшей, соединяющей некоторую точку $v \in \mathbb{H}^1$ такую, что $v = (0,0,c')$.*

Доказательство. П. 1^0 фактически установлен в доказательстве теоремы 2.1 в случае, когда $w \in S_{cc}(0,1)$, общий случай получается из него по свойству растяжений δ_τ (см. (0.7)). Из п. 2^0 свойства 1.2 следует, что

$$\mathbb{H}^1_\alpha = \bigcup_{t\in(0,\infty)} \delta_t\Gamma_c \cup \bigcup_{t\in(0,\infty)} \delta_t\Gamma_{-c} \cup V_1(0), \tag{2.20}$$

откуда с учетом п. 1^0 вытекает п. 2^0.

Замечание 2.1. Из п. 1^0 следствия 2.2 вытекает, что Γ_c является замкнутой поверхностью без края топологической коразмерности 1. Действительно, рассмотрим окружность $S(w,\varepsilon)$ радиуса ε с центром в точке $w=(0,0,c)$, принадлежащую плоскости $V_1(w)$. По п. 1^0 каждая точка v_ε окружности $S(w,\varepsilon)$ соединяется с началом координат единственной cc-кратчайшей γ_{v_ε}. Понятно, что множество $\Gamma_c^\varepsilon = \bigcup\limits_{v_\varepsilon\in S(w,\varepsilon)} \gamma_{v_\varepsilon}$ представляет собой компактную поверхность локально топологической коразмерности 1, $\partial\Gamma_c^\varepsilon = S(w,\varepsilon)$. Тогда множество $\Gamma_c = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Gamma_c^\varepsilon$ обладает всеми требуемыми свойствами, откуда следует (2.20).

Введем обозначения

$$S^+_{cc}(0,R) = \{(x,y,t)\in S_{cc}(0,R) \mid t\ge 0\},\quad S^-_{cc}(0,R) = \{(x,y,t)\in S_{cc}(0,1) \mid t\le 0\}.$$

Следствие 2.3. *Любая cc-кратчайшая группалгебры Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$, исходящая из начала координат и соединяющая произвольную точку $u\notin V_1(0)$, если и пересекает плоскость $t=A$, $A=\mathrm{const}$, то в единственной точке.*

Доказательство. Для определенности пусть cc-кратчайшая $(x,y,t)(s)$, исходящая из начала координат и параметризованная длиной дуги, заканчивается в точке $u\in S^+_{cc}(0,1)\setminus V_1(0)$. Имеем

$$t(s) = \frac{\alpha\lambda s - 2\sin\bigl(\frac{\alpha\lambda}{2}s\bigr)}{\alpha\lambda^2},$$

откуда

$$\dot t(s) = \frac{1-\cos\bigl(\frac{\alpha\lambda}{2}s\bigr)}{\lambda}.$$

По теореме 2.1 $\lambda\in\bigl(0,\frac{4\pi}{\alpha}\bigr]$, поэтому $\dot t(s)>0$ для всех $s\in(0,1]$, $\dot t(0)$, т. е. функция $t(s)$ строго возрастающая. Таким образом, случай $S^+_{cc}(0,1)\setminus V_1(0)$ доказан, откуда (см. (2.13)) вытекает случай $u\in S^-_{cc}(0,1)\setminus V_1(0)$. Общий случай получается из уже разобранных при помощи растяжений δ_τ (см. (0.7)).

Следствие 2.4. 1^0. *Любая прямая $x=a$, $y=b$ если и пересекает множества $S^\pm_{cc}(0,R)$, то в единственной точке.*

2^0. *Пусть $v=(a,b,0)$, $v_c=(a,b,c)$. Тогда функция $f(c)=d_{cc}(v,v_c)$ строго возрастающая на $[0,\infty)$ (строго убывающая на $(-\infty,0]$).*

Доказательство. Для определенности рассмотрим множество $S^+_{cc}(0,1)$. Для каждой пары (a_0,b_0), $a_0^2+b_0^2=1$, можно рассматривать кривую

$$\gamma_{(a_0,b_0)}(\lambda) = \gamma_{(a_0,b_0)}(\lambda(r)),\quad r\in[0,1],$$

из (2.10) как график функции $t=t(\lambda(r))=t(r)$ в плоскости $\Pi_{(a_0,b_0)}$ с системой координат (r,t), где взаимно однозначная непрерывная функция $\lambda=\lambda(r):[0,1]\to\bigl[0,\frac{4\pi}{\alpha}\bigr]$ была определена в доказательстве теоремы 2.1. Поэтому следствие 2.4 выполняется для множества $S^+_{cc}(0,1)$. С учетом (2.11) следствие 2.4 вытекает и для множества $S^-_{cc}(0,1)$. Общий случай следует из уже установленных фактов для множеств $S^\pm_{cc}(0,1)$ при помощи действия растяжений δ_τ. Таким образом, п. 1^0 доказан. П. 2^0 вытекает из п. 1^0 и свойств растяжений δ_τ.

Следствие 2.5 [9]. *Функция $t(r)$ из (2.11) выпукла вверх на интервале $\bigl[\frac{2}{\pi},1\bigr]$ и имеет перегиб в точке $\frac{\sin\kappa}{\kappa}$ на интервале $\bigl[0,\frac{2}{\pi}\bigr)$, где κ — единственный корень уравнения $\operatorname{ctg} v+v=0$, $v\in\bigl(\frac{\pi}{2},\pi\bigr)$.*

Доказательство. Имеем

$$t'_r(r) = \frac{t'_\lambda(\lambda)}{r'_\lambda(\lambda)} = -\frac{2}{\lambda}\cos\frac{\alpha\lambda}{4},$$

откуда

$$t''_{rr}(r) = \frac{t''_{\lambda\lambda}(\lambda)}{r'_\lambda(\lambda)} = \frac{\left(\frac{2}{\lambda^2}\cos\frac{\alpha\lambda}{4} + \frac{\alpha}{2\lambda}\sin\frac{\alpha\lambda}{4}\right)\alpha\lambda^2}{\left(\frac{\alpha\lambda}{4}\cos\frac{\alpha\lambda}{4} - \sin\frac{\alpha\lambda}{4}\right)4}. \tag{2.21}$$

В силу того, что $\frac{\alpha\lambda}{4} \in [0,\pi]$, знаменатель дроби (2.21) всегда меньше 0. Числитель дроби (2.21) принимает нулевое значение только в случае $\operatorname{ctg}\frac{\alpha\lambda}{4} = -\frac{\alpha\lambda}{4}$. Пусть $\operatorname{ctg}\kappa = -\kappa$, $\kappa \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. Тогда $\frac{4\kappa}{\alpha} > \frac{2\pi}{\alpha}$. Несложно заметить, что при $\frac{\alpha\lambda}{4} \in (\kappa,\pi]$ числитель дроби (2.21) отрицательный, а при $\frac{\alpha\lambda}{4} \in [0,\kappa)$ — положительный, откуда $t''_{rr}(r) > 0$ на $\left[0,\frac{\sin\kappa}{\kappa}\right)$, $t''_{rr}(r) < 0$ на $\left(\frac{\sin\kappa}{\kappa},1\right]$, где $\frac{\sin\kappa}{\kappa} = r\left(\frac{4\kappa}{\alpha}\right)$.

§ 3. Обобщения для случая $\mathbb{H}^n_\alpha$, $n > 1$

Рассмотрим cc-кратчайшую $\gamma(s)$ группалгебры Гейзенберга $\mathbb{H}^n_\alpha$, $n > 1$, соединяющую начало координат и точку с координатами $(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, c)$. С учетом свойства 1.1 эта cc-кратчайшая удовлетворяют следующей системе уравнений (см. (1.6)):

$$\begin{cases} \ddot{x}_i(s) &= \frac{\lambda\alpha}{2}\dot{y}_i(s), \quad i = 1,\dots,n, \\ \ddot{y}_i(s) &= -\frac{\lambda\alpha}{2}\dot{x}_i(s), \quad i = 1,\dots,n, \end{cases} \tag{3.1}$$

также сравни (2.2). Запишем (3.1) в следующем эквивалентном виде:

$$\dot{a}(s) = \Lambda(s)a(s), \quad a \in \mathbb{R}^{4n}, \tag{3.2}$$

где $\Lambda(s)$ — блочно-диагональная матрица, на диагонали которой расположены блоки $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha\lambda}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha\lambda}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Фундаментальная матрица решений системы (3.2) также имеет блочно-дагональный вид, на диагонали которой расположены блоки

$$Y(s) = \begin{pmatrix} \sin(\frac{\alpha\lambda}{2}s) & -\cos(\frac{\alpha\lambda}{2}s) & 1 & 0 \\ -\cos(\frac{\alpha\lambda}{2}s) & -\sin(\frac{\alpha\lambda}{2}s) & 0 & 1 \\ \frac{\alpha\lambda}{2}\cos(\frac{\alpha\lambda}{2}s) & \frac{\alpha\lambda}{2}\sin(\frac{\alpha\lambda}{2}s) & 0 & 0 \\ \frac{\alpha\lambda}{2}\sin(\frac{\alpha\lambda}{2}s) & -\frac{\alpha\lambda}{2}\cos(\frac{\alpha\lambda}{2}s) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда общее решение системы (3.2) определяется по формуле

$$Y(s)\cdot C', \quad C' = (C'_1,\dots,C'_{4n})^{\mathrm{T}}, \quad C'_i = \mathrm{const},\ i = 1,\dots,4n.$$

Так как экстремаль $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, t)(s)$ исходит из начала координат, то $C'_{4k+1} = C'_{4(k+1)}$, $C'_{4k+2} = C'_{4k+3}$, $k = 0,\dots,n-1$, следовательно, принимая обозначения $C'_{4k+1} = C_{2k+1}$, $C'_{4k+2} = C_{2k+2}$, $k = 0,\dots,n-1$, имеем

$$\begin{cases} x_k(s) = C_{2k-1}\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right) + C_{2k}\left(1-\cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right)\right), \quad x_k(s_0) = a_k, \\ y_k(s) = C_{2k-1}\left(1-\cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right)\right) - C_{2k}\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right), \quad y_k(s_0) = b_k, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_k(s) = \frac{\alpha\lambda C_{2k-1}}{2}\cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right) + \frac{\alpha\lambda C_{2k}}{2}\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right), \quad \dot{x}_k(0) = \frac{\alpha\lambda C_{2k-1}}{2}, \\ \dot{y}_k(s) = -\frac{\alpha\lambda C_{2k-1}}{2}\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right) - \frac{\alpha\lambda C_{2k}}{2}\cos\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right), \quad \dot{y}_k(0) = -\frac{\alpha\lambda C_{2k}}{2}, \end{cases}$$

откуда

$$t(\lambda,s) = \frac{\alpha^2\lambda}{4}\left(C_1^2 + \dots + C_{2n}^2\right)\left(s - \frac{2\sin\left(\frac{\alpha\lambda}{2}s\right)}{\alpha\lambda}\right),$$

$$r^2(\lambda,s) = \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2\right)(s) = \left(C_1^2 + \dots + C_{2n}^2\right)\frac{\alpha^2\lambda^2}{4}.$$

Таким образом, параметризуя cc-кратчайшую $\gamma(s)$ единичной длины длиной дуги, фактически получим, что на каждой 2-мерной евклидовой плоскости $\Pi_{(a,b)}$, натянутой на векторы $(0,\dots,0,1)$, $(a_1,b_1,\dots,a_n,b_n,0)$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i^2+b_i^2\right)=1$, параметризованная кривая $(r(\lambda,1),t(\lambda,1))$ устроена так же, как и кривая (2.12), поэтому имеет место следующая

Теорема 3.1. *Пусть $\gamma_u=\gamma_u(s)=(x_\lambda,y_\lambda,t_\lambda)(s)\subset\mathbb{H}^n_\alpha$, $s\in[0,1]$, — cc-кратчайшая, параметризованная длиной дуги и соединяющая точку 0 и произвольную точку $u\in S_{cc}(0,1)=\partial B_{cc}(0,1)$, где λ — параметр, соответствующий этой кратчайшей как экстремали, удовлетворяющей системе* (3.1). *Тогда набор таких параметров совпадает с отрезком $\left[-\frac{4\pi}{\alpha},\frac{4\pi}{\alpha}\right]$. При этом если u лежит выше (ниже) плоскости $t=0$, то $\lambda\in\left(0,\frac{4\pi}{\alpha}\right]$ $\left(\lambda\in\left[-\frac{4\pi}{\alpha},0\right)\right)$.*

Также понятно, что все соответствующие аналоги следствий 2.1–2.4 и замечания 2.1 также имеют место для группалгебр $\mathbb{H}^n_\alpha$.

§ 4. Константы в теореме Ball-Box на группалгебрах Гейзенберга

Рассмотрим включения

$$\mathrm{Box}_{cc}(0,C_1)\subset B_{cc}(0,1)\subset\mathrm{Box}_{cc}(0,C_2). \tag{4.1}$$

Константу C_1 из (4.1) назовем *нижней оценкой* в теореме Ball-Box, константу C_2 из (4.1) — *верхней оценкой* в теореме Ball-Box. Соответственно C_1 — *точная нижняя оценка* в теореме Ball-Box, если C_1 — нижняя оценка в теореме Ball-Box и для любого $\epsilon>0$ шар $\mathrm{Box}_{cc}(0,C_1+\epsilon)$ не лежит целиком в $B_{cc}(0,1)$; аналогично определяем понятие *точной верхней оценки* в теореме Ball-Box.

Теорема 4.1 (точная верхняя оценка в теореме Ball-Box). *Рассмотрим группалгебру $\mathbb{H}^n_\alpha$. Пусть $0<\alpha\le 2\pi$. Тогда $B_{cc}(0,1)\subset\mathrm{Box}_{cc}(0,1)$. Пусть $\alpha>2\pi$. Тогда $B_{cc}(0,1)\subset\mathrm{Box}_{cc}\left(0,\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\right)$. Верхняя оценка во включении точная.*

Доказательство. Пусть $v\in B_{cc}(0,1)$ имеет координаты $(v_1,\dots,v_{2n+1})$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{2n}v_i^2<1$. Понятно, что

$$B^{2n}_{\mathrm{e}}(0,1)\subset\mathrm{Box}^{2n}_e(0,1), \tag{4.2}$$

где

$$B^{2n}_{\mathrm{e}}(0,1)=\left\{x\in\mathbb{R}^{2n}\mid x=(x_1,\dots,x_{2n}),\quad \sum_{i=1}^{2n}x_i^2<1\right\},$$
$$\mathrm{Box}^{2n}_e(0,1)=\{x\in\mathbb{R}^{2n}\mid x=(x_1,\dots,x_{2n}),\quad \max_{i=1,\dots,2n}|x_i|<1\},$$

причем верхняя оценка во включении (4.2) точная. С другой стороны, из результатов § 3 вытекает, что

$$\max_{w\in S_{cc}(0,1)}d_e(w,V_1(0))=\frac{\alpha}{2\pi}, \tag{4.3}$$

где d_e — стандартная евклидова метрика пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$. Теорема 4.1 вытекает из (4.2), (4.3).

Отметим, что результат теоремы 4.1 охватывает все возможные значения параметра α.

Теорема 4.2 (точные нижние оценки в теореме Ball-Box на $\mathbb{H}^1_\alpha$). *Рассмотрим группалгебру $\mathbb{H}^1_\alpha$. Пусть $0 < \alpha \le \frac{(2+\pi)^2}{2\pi}$. Тогда $\mathrm{Box}_{cc}\big(0, \sqrt{\frac{\alpha}{4\pi}}\big) \subset B_{cc}(0,1)$. Нижняя оценка во включении точная.*

Доказательство. Рассмотрим график функции $t(r)$ из (2.11), лежащий в соответствующей плоскости с координатами (r,t). Напомним (см. (2.11)), что $\max\limits_{r\in[0,1]} t(r) = \frac{2}{\pi}$; также (см. (2.6), (2.8), (2.9)) имеем $t(0) = t(\lambda(0)) = \frac{\alpha}{4\pi}$, $t(1) = t(\lambda(1)) = 0$. Из свойства 2.1 вытекает, что прямолинейный отрезок, соединяющий точки с координатами $(1,0)$, $\big(\frac{2}{\pi}, t\big(\frac{2}{\pi}\big)\big) = \big(\frac{2}{\pi}, \frac{\alpha}{2\pi}\big)$, лежит под графиком функции $t(r)$. Уравнение прямой, соединяющей эти две точки, имеет вид

$$\frac{r-1}{\frac{2}{\pi}-1} = \frac{t}{\frac{\alpha}{2\pi}} \Leftrightarrow t = (r-1)\frac{\alpha}{2(2-\pi)} \Leftrightarrow r = 1 + \frac{2(2-\pi)}{\alpha}y. \qquad (4.4)$$

Точка z', принадлежащая множеству

$$\left\{z = (z_1, z_2, z_3) \in \partial\,\mathrm{Box}\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right) \mid z_1 > 0, z_2 > 0\right\},$$

наиболее удаленная от 0, имеет координаты $\big(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}, \frac{\alpha}{4\pi}\big)$, поэтому ее координаты (r,t) в плоскости, проходящей через точки 0, w, $v = \big(0, 0, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\big)$, имеют вид $\big(\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}, \frac{\alpha}{4\pi}\big)$. Учитывая (4.4), можно утверждать, что z' принадлежит $B_{cc}(0,1)$, а вместе с тем и $\mathrm{Box}\,\big(0, \sqrt{\frac{\alpha}{4\pi}}\big)$, если выполняется неравенство

$$\frac{2(2-\pi)}{\alpha}\frac{\alpha}{4\pi} + 1 \ge \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \Leftrightarrow \frac{2+\pi}{2\pi} \ge \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \Leftrightarrow \frac{(2+\pi)^2}{(2\pi)^2} \ge \frac{\alpha}{2\pi} \Leftrightarrow \frac{(2+\pi)^2}{2\pi} \ge \alpha.$$

Следствие 4.1. *На группалгебре Гейзенберга $\mathbb{H}^1_4$ выполняются включения*

$$\mathrm{Box}_{cc}\left(0, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \subset B_{cc}(0,1) \subset \mathrm{Box}_{cc}(0,1);$$

константы во включениях точные.

Теорема 4.3 (точные нижние оценки в теореме Ball-Box на $\mathbb{H}^n_\alpha$, $n > 1$). *Рассмотрим группалгебру $\mathbb{H}^n_\alpha$, $n > 1$. Пусть $0 < \alpha \le \frac{(2+\pi)^2}{2\pi n}$. Тогда $\mathrm{Box}_{cc}\,\big(0, \sqrt{\frac{\alpha}{4\pi}}\big) \subset B_{cc}(0,1)$. Нижняя оценка во включении точная.*

Доказательство. С учетом результатов § 3 теорема 4.3 доказывается точно так же, как и теорема 4.2. В итоге сводим задачу к решению неравенства

$$\frac{2(2-\pi)}{\alpha}\frac{\alpha}{4\pi} + 1 \ge \sqrt{\frac{n\alpha}{2\pi}},$$

которое, очевидно, эквивалентно неравенству $\alpha \le \frac{(2+\pi)^2}{2\pi n}$.

§ 5. Неэквивалентные квазиметрики

Назовем две квазиметрики d_1, d_2, определенные на одном и том же множестве X, *неэквивалентными*, если не существует константы $C > 0$ такой, что $C^{-1}d_1(u,v) \le d_2(u,v) \le Cd_1(u,v)$ для любых двух точек $u, v \in X$.

Рассмотрим векторные поля

$$X^\alpha = \left(1, 0, -\frac{\alpha}{2}y\right), \quad Y^\alpha = \left(0, 1, \frac{\alpha}{2}x\right), \quad T^\alpha = (0,0,1).$$

Зафиксируем точку $u = (u_1, u_2, u_3)$. Для любой точки v найдется единственный набор (a, b, c) такой, что $v = \exp(aX_\alpha + bY_\alpha + cT_\alpha)(u)$. Рассмотрим точку

$$v_\varepsilon = \left(u_1 + \varepsilon, u_2, -\frac{\alpha}{2}u_2\varepsilon + u_3\right).$$

Тогда

$$\exp(\varepsilon X^\alpha)(u) = v_\varepsilon \Rightarrow \rho^\alpha_{cc}(u, v_\varepsilon) = \varepsilon.$$

С другой стороны, для любого $\beta \neq \alpha$ имеем

$$\exp\left(\varepsilon X^\beta + \frac{\beta - \alpha}{2}u_2\varepsilon T^\beta\right)(u) = v_\varepsilon.$$

Проверим это:

$$(\dot{x}(s), \dot{y}(s), \dot{t}(s)) = \left(\varepsilon X^\beta + \frac{\beta - \alpha}{2}u_2\varepsilon T^\beta\right)(s), \quad (x(0), y(0), t(0)) = u, \quad s \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \dot{x}(s) = \varepsilon \Rightarrow x(s) = u_1 + s\varepsilon, \quad x(1) = u_1 + \varepsilon,\\ \dot{y}(s) = 0 \Rightarrow y(s) = u_2, \quad y(1) = u_2,\\ \dot{t}(s) = -\frac{\beta}{2}y\varepsilon + \frac{\beta - \alpha}{2}u_2\varepsilon \Rightarrow t(s) = -s\frac{\beta}{2}u_2\varepsilon + s\frac{\beta - \alpha}{2}u_2\varepsilon + u_3\\ = -s\frac{\alpha}{2}u_2\varepsilon + u_3, \quad t(1) = -\frac{\alpha}{2}u_2\varepsilon + u_3.\end{aligned}$$

Поэтому $\rho^\beta_{cc}(u, v_\varepsilon) = \max\{|\varepsilon|, |2^{-1}(\beta - \alpha)u_2\varepsilon|^{1/2}\}$.

Зафиксируем $u_2 \neq 0$, $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, $\beta \neq \alpha$. Пусть v_ε близка к u (т. е. ε мало), тогда $\rho^\beta_{cc}(u, v_\varepsilon) = |2^{-1}(\beta-\alpha)u_2\varepsilon|^{1/2}$ и отношение $\frac{\rho^\beta_{cc}(u,v_\varepsilon)}{\rho^\alpha_{cc}(u,v_\varepsilon)}$ при уменьшении ε ограничить нельзя. Поэтому квазиметрики ρ^β_{cc}, ρ^α_{cc} неэквивалентны. Тем не менее очевидным фактом является следующее

Свойство 5.1. *Существуют положительные константы K_1, K_1 такие, что*

$$K_1\rho^\beta_{cc}(0, u) \leq \rho^\alpha_{cc}(0, u) \leq K_2\rho^\beta_{cc}(0, u) \quad \forall u \in \mathbb{R}^3.$$

Доказательство. Свойство 5.1 вытекает из формулы (0.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* On the Hausdorff volume in sub-Riemannian geometry // Calc. Var. 2012. V. 43. P. 355–388.
2. *Постников М. М.* Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.
3. *Gromov M.* Carnot–Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323.
4. *Korányi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg groups // Adv. Math. 1995. V. 111. P. 1–87.
5. *Грешнов А. В.* Локальная аппроксимация равномерно регулярных квазипространств Карно — Каратеодори их касательными конусами // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 290–312.
6. *Грешнов А. В.* О дифференцируемости горизонтальных кривых в квазипространствах Карно — Каратеодори // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 1. С. 67–86.
7. *Nagel A., Stein E. M., Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties // Acta Math. 1985. V. 155. P. 103–147.
8. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* О продолжении функций ограниченной средней осцилляции на пространствах однородного типа с внутренней метрикой // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1015–1048.

9. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Формы сфер специальных неголономных левоинвариантных внутренних метрик на некоторых группах Ли // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 731–748.

10. *Грушин В. В.* Об одном классе гипоэллиптических операторов // Мат. сб. 1970. Т. 83, № 3. С. 456–473.

11. *Грушин В. В.* Об одном классе эллиптических псевдодифференециальных операторов, вырождающихся на подмногообразии // Мат. сб. 1971. Т. 84, № 2. С. 163–195.

12. *Belläiche A.* The tangent space in sub-Riemannian geometry // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 1–78.

13. *Файзуллин Р. Р.* О связи неголономной метрики на группе Гейзенберга с метрикой Грушина // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 6. С. 1377–1384.

14. *Capogna L., Danielli D., Pauls S. D., Tyson J. T.* An introduction to the Heisenberg groups and the sub-Riemannian isoperimetric problem. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verl. AG, 2007.

15. *Вершик А. М., Гершкович В. Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 16. Динамические системы. М.: ВИНИТИ, 1987. С. 7–85. (Итоги науки и техники).

16. *Белых А. В., Грешнов А. В.* Условие *cc*-однородного конуса и *cc*-шары на группах Гейзенберга // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, № 4. С. 8–20.

17. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. Л: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.

18. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. Изд. 2-е. М: Наука, 1969.

19. *Берестовский В. Н.* Геодезические неголономных левоинвариантных внутренних метрик на группе Гейзенберга и изопериметриксы плоскости Минковского // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 3–11.

Статья поступила 16 декабря 2013 г., окончательный вариант — 17 июня 2014 г.

Грешнов Александр Валерьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`grashnov@math.nsc.ru`