Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2014. Том 55, № 5

УДК 517.518+517.54

ИЗОМОРФИЗМЫ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВ НА ГРУППАХ КАРНО И КВАЗИИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

С. К. Водопьянов, Н. А. Евсеев

Аннотация. Изучаются свойства отображений на группе Карно, индуцирующих по правилу замены переменной изоморфизмы пространств Соболева, показатель суммируемости которых отличен от хаусдорфовой размерности группы.

Ключевые слова: оператор композиции, пространство Соболева, квазиизометрическое отображение, группа Карно.

Дорогому Юрию Григорьевичу Решетняку
к 85-летнему юбилею

1. Введение

Изучение операторов композиции в пространствах Соболева восходит к классической работе С. Л. Соболева [1] (см. работу [2], в которой приведены подробная история и библиография по этому вопросу). Новый импульс для развития этой проблематики возник при решении задачи Ю. Г. Решетняка об описании всех изоморфизмов φ^* однородных пространств Соболева L^1_n, порожденных квазиконформными отображениями φ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, сформулированной в 1968 г. на первом Донецком коллоквиуме по теории квазиконформных отображений. В [3] показано, что таковыми являются структурные изоморфизмы пространств L^1_n и только они. Предложенный в [3] подход к задаче Решетняка естественно рассматривать в контексте предшествующих этому результатов (см., например, [4]): в теоремах Банаха, Стоуна, Эйленберга, Аренса и Келли, Хьюита, Гельфанда и Колмогорова получены условия на различные структуры пространства непрерывных функций $C(S)$, изоморфизм которых определяет топологическое пространство S с точностью до гомеоморфизма. Отметим здесь результат Стоуна, согласно которому $C(S)$ как структурно упорядоченная группа определяет S. С другой стороны, Накаи [5] и Льюис [6] установили, что изоморфность алгебр Ройдена равносильна квазиконформной эквивалентности областей определения. Выделяя в однородном пространстве Соболева L^1_n две структуры: векторной решетки и полунормированного пространства, мы получаем ситуацию, в алгебраическом смысле близкую к работе Стоуна, а в метрическом — к работе Накаи. Такой взгляд на задачу является наиболее естественным, так как все еще дает возможность восстановить отображение, несмотря на минимум «материала»

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029).

для его нахождения, доказать его непрерывность и установить его метрические свойства.

В рамках найденного в [3] подхода к проблеме Решетняка возникла следующая задача: *какие метрические и аналитические свойства имеет измеримое отображение φ, индуцирующее изоморфизм φ^* по правилу $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, $f \in L^1_n$?* Варьируя функциональное пространство, мы каждый раз приходим к новой задаче: пространства Соболева W^1_p, $p > n$, рассмотрены в [7], однородные пространства Бесова $b^l_p(\mathbb{R}^n)$, $n > 1$, $lp = n$, — в [8] при $p = n + 1$ и в [9] при $p > n + 1$, пространства Соболева W^1_p, $n - 1 < p < n$, — в [10], пространства риссовых и бесселевых потенциалов — в [11], трехиндексные шкалы пространств Никольского — Бесова и Лизоркина — Трибеля (и их анизотропные аналоги) — в [12], пространства Соболева W^1_p на областях многомерных евклидовых областей, $1 \leq p < \infty$, $p \neq n$, — в [13] (новое сравнительно с работами [7, 11] доказательство). В [14] к задаче замены переменной в пространствах Соболева применена теория мультипликаторов. Свойства ограниченного оператора композиции на пространствах Бесова кроме [9] изучались также в [15] и [16]. Квазиконформная эквивалентность классов Лизоркина — Трибеля исследована в [17].

Вывод работ [8–14] состоит в том, что изоморфность оператора φ^* влечет в зависимости от соотношения между показателями гладкости, суммируемости и размерностью пространства свойство отображения быть квазиконформным или квазиизометрическим в метрике области определения, адекватной геометрии функционального пространства.

Настоящую работу можно рассматривать как естественное развитие результатов и методов работы [13]. Исследуемая здесь задача состоит в том, чтобы найти необходимые и достаточные условия на измеримое отображение φ такие, чтобы φ индуцировало по правилу замены переменной изоморфизм φ^* неголономных пространств Соболева с первыми горизонтальными обобщенными производными на областях групп Карно при условии, что суммируемость отлична от хаусдорфовой размерности группы (в [13] эта задача решена в евклидовых пространствах).

Пусть D, D' — области на группе Карно $\mathbb{G}$. Будем говорить, что измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ *принадлежит классу* IL^1_p, если φ индуцирует оператор композиции пространств Соболева

$$\varphi^* : L^1_p(D') \cap C^\infty(D') \to L^1_p(D), \quad \varphi^*(f) = f \circ \varphi, \quad f \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D'), \tag{1}$$

такой, что

1) для любой функции $f \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$ справедливы неравенства

$$K^{-1}\|f \mid L^1_p(D')\| \leq \|\varphi^*(f) \mid L^1_p(D)\| \leq K\|f \mid L^1_p(D')\|, \tag{2}$$

где постоянная K не зависит от выбора функции f,

2) образ $\varphi^*\big(L^1_p(D') \cap C^\infty(D')\big)$ всюду плотен в $L^1_p(D)$.

Отметим, что условие 2 не зависит от условия 1. Действительно, рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, действующее по правилу $\varphi(x_1, x_2) = (|x_1|, x_2)$. Очевидно, что условие 1 выполнено. С другой стороны, образ $\varphi^*(L^1_p(\mathbb{R}^2) \cap C^\infty(\mathbb{R}^2))$ будет состоять из функций, четных относительно оси $x_2 = 0$, и, следовательно, не будет плотным в $L^1_p(\mathbb{R}^2)$.

Основной результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1 [18]. *Пусть $p \geq 1$, $p \neq \nu$, и D, D' — области на группе Карно $\mathbb{G}$ (здесь ν — хаусдорфова размерность $\mathbb{G}$). Измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу IL_p^1 тогда и только тогда, когда φ совпадает п. в. с некоторой квазиизометрией $\Phi : D \to \Phi(D)$, для которой пространства Соболева $L_p^1(\Phi(D))$ и $L_p^1(D')$ $(1, p)$-эквивалентны.*

Замечание 1. 1. В силу двусторонней оценки (2) оператор (1) является мономорфизмом.

2. В лемме 10 будет показано, что оператор (1) продолжается по непрерывности до изоморфизма пространств Соболева L_p^1 и продолженный оператор будет также оператором композиции в определенном смысле.

Приведем определения основных понятий из формулировки этой теоремы.

Определение 1. Гомеоморфизм $\Phi : D \to D'$ двух открытых множеств называется *квазиизометрией*, если выполнены условия

$$\varlimsup_{y\to x} \frac{d(\Phi(y), \Phi(x))}{d(y, x)} \leq M, \quad \varlimsup_{y\to z} \frac{d(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z))}{d(y, z)} \leq M \tag{3}$$

для всех $x \in D$ и $z \in D'$, M — некоторая константа, не зависящая от выбора точек $x \in D$ и $z \in D'$, d — расстояние Карно — Каратеодори на группе $\mathbb{G}$.

Определение 2. Два открытых множества D_1 и D_2 называются $(1, p)$-*эквивалентными*, если операторы ограничения

$$r_i : L_p^1(D_i) \to L_p^1(D_1 \cap D_2), \quad r_i(f) = f|_{D_1\cap D_2}, \quad \text{где } f \in L_p^1(D_i),$$

являются изоморфизмами.

Свойства $(1, p)$-эквивалентных областей исследованы в евклидовом пространстве в [19], на группе Карно — в [20].

Замечание 2. Отметим, что из теоремы 1 можно получить следующее следствие: если отображение $\varphi : D \to D'$ — квазиизометрия, то $f \circ \varphi \in L_p^1(D)$ для любой функции $f \in L_p^1(D')$, а оператор φ^*, индуцированный по правилу композиции, является изоморфизмом пространств Соболева.

Данная работа организована следующим образом. В § 2, 3 приводятся основные определения и вспомогательные результаты. В § 4 показываем, что оператор композиции (1) можно определить на всем пространстве $L_p^1(D')$ с сохранением свойств (1) и (2). Более того, полученный оператор композиции $\varphi^* : L_p^1(D') \to L_p^1(D)$ является изоморфизмом пространств Соболева $L_p^1(D')$ и $L_p^1(D)$. Далее, в § 5 доказываем основной результат работы.

Доказательство теоремы 1 разбивается на два основных случая. Первый — $p > \nu$ — более простой. По существу, он сводится к ситуации, когда измеримое отображение φ биективно, и базируется на том, что емкость двух точек x и y в пространстве $L_p^1(\mathbb{G})$ сравнима с величиной $d(x, y)^{\nu-p}$. Тогда изоморфность оператора φ^* равносильна соотношениям $M^{-1}d(x, y) \leq d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq Md(x, y)$ для достаточно близких точек $x, y \in D$, выбранных из специального всюду плотного подмножества в D. Из последнего выводим (3) (см. детали в доказательстве теоремы 4).

Второй случай — $1 \leq p < \nu$ (лемма 22) — значительно более деликатный. Лемме 22 предшествуют многошаговые рассуждения, суть которых состоит в том, чтобы удалить на каждом шаге некоторое множество нулевой меры с целью получения в конце концов суженной области определения $\operatorname{Dom}_6 \varphi \subset D$

измеримого отображения φ, $|D \setminus \mathrm{Dom}_6\,\varphi| = 0$, на которой φ обладает рядом замечательных свойств таких, как биективность, $\mathscr{N}$-свойство Лузина и $\mathscr{N}^{-1}$-свойство Лузина. Эти свойства дают возможность доказать аппроксимативную дифференцируемость отображения φ вдоль горизонтальных векторных полей. Последнее — это основа для применения аналитических методов исследования отображения φ. Оказывается, что прямое отображение φ аппроксимативно дифференцируемо и его аппроксимативный дифференциал $D\varphi(x)$ и якобиан $J(x,\varphi) = \det D\varphi(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$|D\varphi|(x) \leq L < \infty, \quad |J(x,\varphi)| \geq \alpha_1 > 0 \quad \text{п. в. в } D.$$

Здесь мы доказываем аналогичные соотношения для аппроксимативного дифференциала $D\psi(y)$ обратного отображения $\psi = \varphi^{-1}$:

$$|D\psi|(y) \leq L' < \infty, \quad |J(y,\psi)| \geq \alpha > 0 \quad \text{п. в. в } D'.$$

С помощью этих соотношений и условий на оператор φ^* сводим исследование метрических свойств отображения φ к первому случаю. Эта редукция и позволяет доказать, что φ совпадает п. в. на D с некоторой квазиизометрией $\Phi : D \to D'$.

Часть методов, которые используются при доказательстве основных результатов, являются обобщениями классических подходов. Например, аппроксимация функций из пространства Соболева гладкими функциями. С другой стороны, в некоторых случаях требуется привлечение новых методов, базирующихся на свойствах метрических пространств с мерой. Основная преодолеваемая трудность состоит в том, чтобы корректно удалить из области определения множество нулевой меры и доказать, что суженное отображение аппроксимативно дифференцируемо п. в. вдоль горизонтальных векторных полей. В ходе доказательства применяются также результаты и методы работ [20–25].

В случае $p = \nu$ справедлив следующий результат.

Теорема 2 [18]. *Пусть D, D' — области на группе Карно $\mathbb{G}$, а ν — хаусдорфова размерность $\mathbb{G}$. Измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу IL^1_ν тогда и только тогда, когда φ совпадает п. в. с некоторым квазиконформным отображением $\Phi : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{G}$, для которого пространства Соболева $L^1_\nu(\Phi(D))$ и $L^1_\nu(D')$ $(1,\nu)$-эквивалентны, где $x_0 \in \mathbb{G}$ — некоторая точка.*

Теорема 2 доказывается в [26]. При этом используется часть утверждений, полученных в настоящей работе для $p \leq \nu$.

2. Пространства Соболева на группе Карно

Определение 3. *Группой Карно* $\mathbb{G}$ называется связная односвязная нильпотентная группа Ли, алгебра Ли $\mathscr{G}$ которой градуирована, т. е. $\mathscr{G} = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$, где $\dim V_1 = n_1 \geq 2$, $[V_1, V_k] = V_{k+1}$ для $1 \geq k \geq m-1$, $[V_1, V_m] = 0$ и $N = \sum\limits_{i=1}^{m} \dim V_i$.

Отождествим элементы $g \in \mathbb{G}$ с элементами $x \in \mathbb{R}^N$ посредством экспоненциального отображения $\exp\bigl(\sum x_{ij} X_{ij}\bigr)$, числа x_{ij} называются *координатами первого рода* точки $g \in \mathbb{G}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n_i = \dim V_i$. Для краткости координаты, соответствующие горизонтальному подпространству, будем обозначать без двойной индексации: $x_j = x_{1j}$, $1 \leq j \leq n_i$. Таким образом, на $\mathbb{G}$ существует глобальная система координат, посредством которой точки на группе $\mathbb{G}$ отождествляются с точками в $\mathbb{R}^N$. Будем обозначать символом g_h элементы группы, у которых все координаты, кроме $x_1, \dots, x_{n_1}$, равны нулю.

В координатах первого рода отображение

$$\delta_t : (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m) \mapsto (t\bar{x}_1, t^2\bar{x}_2, \dots, t^m\bar{x}_m), \quad t > 0,$$

задает однопараметрическое семейство растяжений. Здесь $\bar{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$.

Левоинвариантные векторные поля $X_i = X_{i,1}$, $i = 1, \dots, n_1$, составляющие стандартный базис подрасслоения V_1, называются *горизонтальными*.

Зафиксируем следующую однородную норму на группе $\mathbb{G}$ (см., например, [22]):

$$\rho(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} |\bar{x}_i|^{2m!/i} \right)^{1/2m!},$$

где $|\bar{x}_i|$ — евклидова норма в V_i. Как и для всякой однородной нормы [27] выполняются следующие свойства:

1) $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2) $\rho(x^{-1}) = \rho(x)$,

3) $\rho(\delta_\lambda(x)) = \lambda\rho(x)$,

4) $\rho(xy) \leq c(\rho(x) + \rho(y))$, где c — некоторая постоянная, не зависящая от $x, y \in \mathbb{G}$; однородная норма задает однородную квазиметрику: $\rho(x, y) = \rho(x^{-1}y)$ для точек $x, y \in \mathbb{G}$.

Абсолютно непрерывная кусочно гладкая кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{G}$, касательный вектор которой принадлежит V_1, называется *горизонтальной кривой*.

Определение 4. *Метрика Карно — Каратеодори* $d(x, y)$ на группе $\mathbb{G}$ — это точная нижняя грань длин всех горизонтальных кривых, соединяющих точки x и y.

Обозначим расстояние до нуля символом $d(x) = d(0, x)$.

Можно показать, что величины $d(x, y)$ и $\rho(x, y)$ эквивалентны (см. рассуждения из леммы 1.4 и предложения 1.5 в [27]), т. е. соотношения

$$c\rho(x, y) \leq d(x, y) \leq C\rho(x, y)$$

выполнены для всех точек $x, y \in \mathbb{G}$ с некоторыми постоянными $0 < c \leq C < \infty$.

Пусть $g \in \mathbb{G}$. Несложно показать, что для элементов g_h верно

$$d(g_h) = \rho(g_h) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n_1}^2} \tag{4}$$

и

$$d(g_h) \leq d(g). \tag{5}$$

Действительно, пусть $g_h = (x_1, \dots, x_{n_1}, 0, \dots, 0)$. Кривая $\gamma(t) = (tx_1, \dots, tx_{n_1}, 0, \dots, 0)$, $t \in [0, 1]$, горизонтальна и $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = g_h$. Так как $\gamma(t)$ — прямолинейный отрезок, соединяющий 0 и g_h, а метрика в горизонтальной плоскости совпадает с евклидовой, то $\gamma(t)$ имеет минимальную длину. Таким образом, $d(g_h)$ совпадает с длиной данного отрезка: $d(g_h) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n_1}^2}$. Для любой горизонтальной кривой $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_2(t), \gamma_{21}(t), \dots, \gamma_{mn_m}(t))$, соединяющей 0 и g, имеем

1) $\mathrm{Pr}_h\,\gamma(0) = 0$ и $\mathrm{Pr}_h\,\gamma(1) = g_h$;

2) длина кривой $\mathrm{Pr}_h\,\gamma$ равна длине кривой γ,

где $\mathrm{Pr}_h\,\gamma(t) = (\gamma_1(t),\dots,\gamma_2(t),0,\dots,0)$ — проекция кривой на горизонтальное подпространство; с другой стороны, $d(g_h)$ — длина отрезка, соединяющего 0 и g_h, и, следовательно, не превосходит длины любой кривой, соединяющей эти точки, т. е. $d(g_h) \leq d(g)$.

Размерность Хаусдорфа группы $\mathbb{G}$ равна $\nu = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots + mn_m$, где $n_i = \dim V_i$.

Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно с однопараметрической группой растяжений δ и D — открытое множество в $\mathbb{G}$. Определим пространство функций $L_p(D)$, суммируемых в степени $p \in [1,\infty)$, как совокупность измеримых по Лебегу функций, имеющих конечную норму

$$\|f \mid L_p(D)\| = \Bigg(\int\limits_D |f(x)|^p\,dx\Bigg)^{1/p} < \infty.$$

Здесь dx — мера Лебега в $\mathbb{R}^N$, нормированная таким образом, что мера шара единичного радиуса (относительно квазиметрики ρ) равна 1. Локально суммируемая функция $v_i : D \mapsto \mathbb{R}$ называется *обобщенной производной функции f вдоль векторного поля X_i*, $i = 1,\dots,n_1$, если

$$\int\limits_D v_i\psi\,dx = -\int\limits_D fX_i\psi\,dx$$

для произвольной финитной функции $\psi \in C_0^\infty(D)$.

Однородное пространство Соболева $L_p^1(D)$ состоит из локально суммируемых функций с конечной полунормой

$$\big\|f \mid L_p^1(D)\big\| = \|\nabla_{\mathscr{L}} f \mid L_p(D)\|,$$

где $\nabla_{\mathscr{L}} f(x) = (X_1f(x),\dots,X_{n_1}f(x))$ — обобщенный субградиент f в точке $x \in D$ (здесь производные только по горизонтальным полям).

Пространство Соболева $W_p^1(D)$ состоит из локально суммируемых функций, имеющих конечную норму

$$\big\|f \mid W_p^1(D)\big\| = \|f \mid L_p(D)\| + \|\nabla_{\mathscr{L}} f \mid L_p(D)\|.$$

Будем говорить, что f *принадлежит классу* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, если $f \in W_p^1(V)$ для любой ограниченной подобласти $V \subset D$ такой, что $\overline{V} \subset D$.

В [28] Ю. Г. Решетняк предложил подход к определению соболевских классов функций со значениями в метрических пространствах. Пусть $(\mathbb{X}, r)$ — полное метрическое пространство, r — метрика на $\mathbb{X}$, а D — открытое множество на группе Карно $\mathbb{G}$. Будем говорить, что отображение $\varphi : D \to \mathbb{X}$ *принадлежит классу* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D;\mathbb{X})$, если выполнены следующие условия.

(A) Для всякого $z \in \mathbb{X}$ функция $[\varphi]_z : x \in D \mapsto r(\varphi(x), z)$ принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$.

(B) Семейство субградиентов $(\nabla_{\mathscr{L}}[\varphi]_z)_{z\in\mathbb{X}}$ имеет мажоранту, принадлежащую $L_{p,\mathrm{loc}}(D)$, т. е. существует функция $g \in L_{p,\mathrm{loc}}(D)$, не зависящая от z, такая, что $|\nabla_{\mathscr{L}}[\varphi]_z(x)| \leq g(x)$ для п. в. $x \in D$.

Если $\mathbb{X} = \mathbb{G}'$ — еще одна группа Карно с однопараметрической группой растяжений δ', расстоянием ρ' и т. д., то получаем определение отображения класса Соболева различных групп Карно и обозначаем этот класс символом $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D;\mathbb{G}')$. В этом случае удобно использовать эквивалентное описание отображения класса Соболева (см., например, [22]): отображение $\varphi : D \mapsto \mathbb{G}'$ принадлежит $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D;\mathbb{G}')$ тогда и только тогда, когда его можно изменить на множестве нулевой меры так, что

(a) функция $D \ni x \mapsto [\varphi]_z(x) = \rho'(\varphi(x), z)$ принадлежит $L_{p,\mathrm{loc}}(D)$ для любой точки $z \in G'$;

(b) отображение $\varphi : D \to \mathbb{G}'$ абсолютно непрерывно на интегральных линиях горизонтальных векторных полей, т. е. для любого открытого ограниченного множества U, $\overline{U} \subset D$, и слоения Γ_j множества U, определяемого левоинвариантным векторным полем X_j, $j = 1, \dots, n_1$, отображение φ абсолютно непрерывно на $\gamma \cap U \in \Gamma_j$ относительно одномерной меры Хаусдорфа для $d\tau$-п. в. кривых $\gamma \in \Gamma_j$ (здесь γ — это левый сдвиг кривой $\exp tX_j$, а мера $d\tau$ на слоении Γ_j равна внутреннему произведению $i(X_j)$ векторного поля X_j с биинвариантной формой объема dx);

(c) производная $X_j\varphi(x) = \lim\limits_{t\to 0} \delta_{t^{-1}}(\varphi(x)^{-1}\varphi(\exp tX_j))$ существует и принадлежит $V_1'(\varphi(x))$ п. в. в открытом множестве D и, кроме того, $|X_j(\varphi)| \in L_{p,\mathrm{loc}}(D)$ для всех j.

Если отображение $\varphi : D \mapsto \mathbb{G}'$ удовлетворяет только сформулированным выше условиям (a) и (b), то говорим, что φ *принадлежит классу* $ACL(D)$. Для такого отображения φ существуют производные $X_j\varphi \in V_1'$ вдоль векторных полей X_j, $j = 1, \dots, n_1$, п. в. в D (см. [29]).

Матрица $(X_j\varphi_k(x))$, $j, k = 1, \dots, n_1$, называемая (*формальным*) *горизонтальным дифференциалом* отображения φ в точке x, определяет линейный оператор $D_h\varphi : V_1 \mapsto V_1'$ горизонтального пространства V_1 в горизонтальное пространство V_1' для п. в. x (см. [29]), $|D_h\varphi|$ — норма этого оператора. В [21, 22] доказано, что линейный оператор $D_h\varphi : V_1 \mapsto V_1'$ продолжается до гомоморфизма $D\varphi : \mathscr{G} \mapsto \mathscr{G}'$ алгебры Ли $\mathscr{G}$ в алгебру Ли $\mathscr{G}'$. В случае $\mathbb{G} = \mathbb{G}'$ якобиан $J(x,\varphi) = \det D\varphi(x)$ представляет собой определитель матрицы $D\varphi(x)$.

Напомним определение локально липшицевых и билипшицевых отображений.

Определение 5. Отображение $\varphi : U \to \mathbb{G}$ называется *локально липшицевым* (*билипшицевым*), если для каждой точки $x \in U$ найдутся окрестность V такая, что $V \subset U$, и постоянная L_V, для которых выполняются соотношения

$$d(\varphi(y), \varphi(z)) \le L_V d(y,z) \quad (L_V^{-1} d(y,z) \le d(\varphi(y), \varphi(z)) \le L_V d(y,z)) \tag{6}$$

для всех $y, z \in V$. Если в качестве V можно взять U, то отображение $\varphi : U \to \mathbb{G}$ будем называть *липшицевым* (*билипшицевым*) на U.

Символом $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D)$ будем обозначать пространство локально липшицевых функций $f : D \to \mathbb{R}$. Заметим, что пространство локально липшицевых функций $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D)$ совпадает с пересечением $C(D) \cap W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(D)$ (см., например, [30]).

Лемма 1. *Пусть $g(x) = d(x_0, x)$, где $x_0 \in \mathbb{G}$ — фиксированная точка. Тогда*

$$|\nabla_{\mathscr{L}} g(x)| = 1 \quad \text{п. в. в } \mathbb{G}.$$

Доказательство. Разобьем доказательство на три шага.

1. Имеем

$$|g(x) - g(y)| = |d(x_0, x) - d(x_0, y)| \le d(x, y).$$

Таким образом, g — липшицева функция. Отсюда выводим неравенство

$$\frac{|g(x) - g(y)|}{d(x,y)} \le 1 \quad \text{для всех } x \ne y. \tag{7}$$

2. Для произвольной точки $x \in \mathbb{G}$ найдется кратчайшая γ, соединяющая x и x_0. Пусть y — точка на кривой γ. Тогда $|g(x) - g(y)| = d(x, y)$ и, следовательно,

$$\frac{|g(x) - g(y)|}{d(x, y)} = 1 \quad \text{для } y \in \gamma. \tag{8}$$

Из неравенств (7) и (8) выводим

$$\overline{\lim_{y \to x \in \mathbb{G}}} \frac{|g(y) - g(x)|}{d(x, y)} = 1. \tag{9}$$

3. Так как g — липшицева функция, она $\mathscr{P}$-дифференцируема п. в. в смысле Пансю [29] (см. другое доказательство в [22]). Следовательно, в точке x $\mathscr{P}$-дифференцируемости функции g имеем

$$\lim_{d(x,y) \to 0} \frac{g(y) - g(x) - \nabla_{\mathscr{L}} g(x) \cdot (x^{-1}y)_h}{d(x, y)} = 0, \tag{10}$$

где $\nabla_{\mathscr{L}} g(x) \cdot (x^{-1}y)_h = \sum\limits_{i=1}^{n_1} X_i g(x)(x^{-1}y)_{1i}$.

Обозначим $z = x^{-1}y$. Из (9) и (10) можно вывести, что

$$\overline{\lim_{d(z) \to 0}} \frac{|\nabla_{\mathscr{L}} g(x) \cdot z_h|}{d(z)} = 1. \tag{11}$$

Тогда

$$1 = \overline{\lim_{d(z) \to 0}} \frac{|\nabla_{\mathscr{L}} g(x) \cdot z_h|}{d(z)} \geq \overline{\lim_{z = z_h, d(z) \to 0}} \frac{|\nabla_{\mathscr{L}} g(x) \cdot z_h|}{d(z)} = \overline{\lim_{d(z_h) \to 0}} \frac{|\nabla_{\mathscr{L}} g(x) \cdot z_h|}{d(z_h)}. \tag{12}$$

С другой стороны, из неравенства (5) имеем

$$\overline{\lim_{d(z_h) \to 0}} \frac{|\nabla_{\mathscr{L}} g(x) \cdot z_h|}{d(z_h)} = \overline{\lim_{d(z) \to 0}} \frac{|\nabla_{\mathscr{L}} g(x) \cdot z_h|}{d(z_h)} \geq \overline{\lim_{d(z) \to 0}} \frac{|\nabla_{\mathscr{L}} g(x) \cdot z_h|}{d(z)} = 1. \tag{13}$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{d(z) \to 0}} \frac{|\nabla_{\mathscr{L}} g(x) \cdot z_h|}{d(z)} = \overline{\lim_{d(z_h) \to 0}} \frac{|\nabla_{\mathscr{L}} f(x) \cdot z_h|}{d(z_h)} = 1. \tag{14}$$

Учитывая равенство $d(z_h) = \rho(z_h)$ (см. (4)), получаем

$$1 = \overline{\lim_{\rho(z_h) \to 0}} \left| \nabla_{\mathscr{L}} g(x) \cdot \frac{z_h}{\rho(z_h)} \right| = \sup_{y_h \in \mathbb{R}^{n_1},\, \rho(y_h) = 1} |\nabla_{\mathscr{L}} g(x) \cdot y_h|,$$

где $y_h = \frac{z_h}{\rho(z_h)}$. Отсюда приходим к равенству $|\nabla_{\mathscr{L}} g(x)| = 1$. $\square$

Замечание 3. Утверждение леммы 1 справедливо также и для функции

$$g(x) = d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$$

в следующей форме: $|\nabla_{\mathscr{L}} g(x)| = 1$ п. в. в $\mathbb{G} \setminus F$. Здесь функция g — расстояние от точки x до фиксированного множества F.

2.1. Аппроксимация гладкими функциями. Рассуждения в этом подпункте во многом основаны на работах [27, 31]. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{G})$, $\operatorname{supp} \varphi \subset B(0, 1)$ и

$$\int_{\mathbb{G}} \varphi(x)\, dx = a. \tag{15}$$

Пусть $u \in L_p^1(D)$ и $u(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{G} \setminus D$. Рассмотрим семейство усреднений:

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^\nu} \int_{\mathbb{G}} \varphi(\delta_{\varepsilon^{-1}} x y^{-1}) u(y)\, dy. \tag{16}$$

Функция φ называется *усредняющим ядром*, а число ε — *радиусом усреднения*.

Предложение 1. *Если $u \in L_p(D)$, $p \in [1, \infty)$, то имеют место следующие свойства:*

1) $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{G})$;
2) $u_\varepsilon \to au$ *в* $L_p(D)$.

Доказательство. 1. Функции $\varphi(x)$ и $\tau_y(x) = xy^{-1}$ принадлежат $C^\infty(\mathbb{G})$, поэтому в силу теоремы о дифференцировании под знаком интеграла $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{G})$.

2. Непрерывные финитные функции плотны в $L_p(\mathbb{G})$, стало быть, для любой $v \in L_p(\mathbb{G})$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{G}} |v(xz^{-1}) - v(x))|^p \, dx \to 0 \quad \text{при } z \to e, \tag{17}$$

где e — единица группы $\mathbb{G}$.

Положим $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^\nu}\varphi(\delta_{\varepsilon^{-1}}x)$. Далее,

$$|u_\varepsilon(x) - au(x)| = \Bigg| \int\limits_{\mathbb{G}} \varphi_\varepsilon(xy^{-1})u(y)\, dy - u(x) \int\limits_{\mathbb{G}} \varphi_\varepsilon(xy^{-1})\, dy \Bigg|$$
$$\le \int\limits_{\mathbb{G}} |\varphi_\varepsilon(xy^{-1})||u(y) - u(x)|\, dy$$
$$\le \Bigg(\int\limits_{\mathbb{G}} |\varphi_\varepsilon(xy^{-1})|\, dy \Bigg)^{\frac{1}{p'}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{G}} |\varphi_\varepsilon(xy^{-1})||u(y) - u(x)|^p dy \Bigg)^{\frac{1}{p}}$$
$$= K \Bigg(\int\limits_{\mathbb{G}} |\varphi_\varepsilon(z)| \cdot |u(xz^{-1}) - u(x)|^p dz \Bigg)^{\frac{1}{p}},$$

где K — положительная константа. Имеем

$$\|u_\varepsilon - au \mid L_p(\mathbb{G})\|^p = \int\limits_{\mathbb{G}} |u_\varepsilon(x) - au(x)|^p \, dx$$
$$\le K \int\limits_{\mathbb{G}} \int\limits_{\mathbb{G}} |\varphi_\varepsilon(z)||u(xz^{-1}) - u(x)|^p \, dz \, dx = K \int\limits_{\mathbb{G}} |\varphi_\varepsilon(z)| \int\limits_{\mathbb{G}} |u(xz^{-1}) - u(x)|^p \, dx \, dz$$
$$= K \int\limits_{\mathbb{G}} |\varphi(h)| \int\limits_{\mathbb{G}} |u(x(\delta_\varepsilon h)^{-1}) - u(x)|^p \, dx \, dh \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

В предпоследнем интеграле сделали замену переменных $h = \delta_{\varepsilon^{-1}} z$. Таким образом, $u_\varepsilon \to au$ при $\varepsilon \to 0$ в $L_p(\mathbb{G})$. $\square$

Замечание 4. В частности, если $a = 1$, то $u_\varepsilon \to u$ при $\varepsilon \to 0$ в $L_p(\mathbb{G})$.

Предложение 2. *Пусть $u \in L^1_p(D)$, $a = 1$ (т. е. $\int\limits_{\mathbb{G}} \varphi(x)\, dx = 1$) и $V \Subset D$ — компактно вложенная область*[1)]. *Тогда*

$$X_i u_\varepsilon \to X_i u \quad \text{в } L_p(V). \tag{18}$$

Доказательство. Заметим, что на группе Карно свертка не коммутативна, поэтому аргументы, применяемые в $\mathbb{R}^n$, на группах Карно не работают.

[1)] Другими словами, V — ограниченная область такая, что $\overline{V} \subset D$.

Доказательство этого утверждения на группах Карно основано на более рафинированных методах. В [32, лемма 2.1; 33] доказано существование функций $\chi_{ij} \in C_0^\infty(B(0,1))$ таких, что $\int\limits_G \chi_{ij}(x)\,dx = \delta_{ij}$ и для всех $x \in V$ и $\varepsilon < \operatorname{dist}(V, \partial D)$ выполнено следующее равенство:

$$X_i u_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{N} (X_j u) * \chi_{ij,\varepsilon}(x),$$

где $\chi_{ij,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon^\nu}\chi_{ij}(\delta_{\varepsilon^{-1}}x)$. По предложению 1 имеем $(X_j u) * \chi_{ij,\varepsilon} \to \delta_{ij} X_j u$ при $\varepsilon \to 0$ в $L_p(V)$. В итоге

$$\begin{aligned}\|X_i u_\varepsilon - X_i u \mid L_p(V)\| &= \left\| \sum_{j=1}^{N} (X_j u) * \chi_{ij,\varepsilon} - \sum_{j=1}^{N} \delta_{ij} X_j u \mid L_p(V) \right\| \\ &\le \sum_{j=1}^{N} \|(X_j u) * \chi_{ij,\varepsilon} - \delta_{ij} X_j u \mid L_p(V)\| \to 0\end{aligned}$$

при $\varepsilon \to 0$. $\square$

Предложение 2 позволяет доказать плотность гладких функций в $L_p^1(D)$.

Лемма 2. *Пространство $L_p^1(D) \cap C^\infty(D)$ плотно в $L_p^1(D)$. Если $f \in L_p^1(D)$ — локально липшицева функция, то существует последовательность функций $f_l \in L_p^1(D) \cap C^\infty(D)$, $l \in \mathbb{N}$, сходящаяся к f локально равномерно и в $L_p^1(D)$.*

Доказательство. Приводимое ниже доказательство основано на рассуждениях из [31, теорема 1].

Пусть $u \in L_p^1(D)$. Рассмотрим локально конечное покрытие[2)] $\{B_k\}_{k\ge1}$ области D шарами $B_k \subset D$ и разбиение единицы $\{\psi_k\}_{k\ge1}$, подчиненное этому покрытию. Пусть $\{\rho_k\}$ — убывающая к нулю последовательность положительных чисел такая, что последовательность шаров $\{(1+\rho_k)B_k\}$ также образует локально конечное покрытие области D. Обозначим символом w_k усреднение функции $u_k = \psi_k u$ с радиусом усреднения $\rho_k r_k$, где r_k — радиус шара B_k. Легко видеть, что $w = \sum\limits_k w_k$ принадлежит $C^\infty(D)$, так как сумма локально конечна (каждая точка имеет окрестность, в которой только конечное число функций w_k не равны нулю). Возьмем произвольное $\varepsilon \in \left(0, \frac12\right)$. В силу предложений 1 и 2 можно выбрать ρ_k так, что

$$\left\|u_k - w_k \mid L_p^1(D)\right\| \le \varepsilon^k. \tag{19}$$

На любой ограниченной области V такой, что $\overline{V} \subset D$, выполнено равенство $u = \sum\limits_k u_k$. Следовательно,

$$\left\|u - w \mid L_p^1(V)\right\| \le \sum_k \left\|u_k - w_k \mid L_p^1(V)\right\| \le \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{20}$$

Таким образом, для любой функции $u \in L_p^1(D)$ и произвольного $\varepsilon \in \left(0, \frac12\right)$ найдется функция $w \in L_p^1(D) \cap C^\infty(D)$ такая, что $\left\|u - w \mid L_p^1(D)\right\| \le \varepsilon$. $\square$

[2)] Т. е. для каждой точки $x \in D$ найдется окрестность $U \subset D$, которая пересекается только с конечным числом шаров из покрытия $\{B_k\}$.

Отметим следующие свойства, очевидным образом вытекающие из леммы 2.

Замечание 5. Если $f \in L^1_p(D)$, то найдется последовательность гладких функций $f_n \in L^1_p(D) \cap C^\infty(D)$, сходящаяся к f п. в. в D. А если $p > \nu$, то можно подобрать последовательность, которая будет сходится локально равномерно в D.

Доказательство. В качестве данной последовательности можно взять функции $\{w_k\}$, построенные в лемме 2. $\square$

Из леммы 2 выводим

Следствие 1. *Пространство $L^1_p(D) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D)$ плотно в $L^1_p(D)$, где $D \subset \mathbb{G}$ — область.*

2.2. Неравенства Пуанкаре и области Джона. Напомним, что кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{G}$ *спрямляема*, если

$$\sup_P \sum_{i=1}^{k_P} d(\gamma(x_{i-1}), \gamma(x_i)) < \infty,$$

где супремум берется по всем разбиениям $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k_P} = b\}$. Для двух точек $x, y \in \mathbb{G}$ *кратчайшей* называется горизонтальная кривая, соединяющая эти точки и имеющая минимальную длину.

Определение 6. Область $\Omega \subset \mathbb{G}$ называется *областью Джона* $J(\alpha, \beta)$ (коротко $\Omega \in J(\alpha, \beta)$), $0 < \alpha \le \beta$, если найдется точка $x_0 \in \Omega$ такая, что любую точку $x \in \Omega$ можно соединить с x_0 спрямляемой кривой γ, которая содержится в Ω и удовлетворяет следующим условиям: если $s \in [0, l]$ — натуральная параметризация кривой γ, то $l \le \beta$,

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma(l) = x_0, \quad \mathrm{dist}(\gamma(s), \partial\Omega) \ge \frac{\alpha s}{l} \ \text{ для всех } \ s \in [0, l]. \tag{21}$$

Замечание 6. Легко проверить, что шар $B(x, r)$ в метрике Карно — Каратеодори является областью Джона $J(r, r)$, где центр шара (точка x) является выделенной точкой.

Лемма 3. *Пусть D — произвольная область в $\mathbb{G}$ и шары B_0, B_1 содержатся в этой области. Тогда найдется область Джона $\Omega \in J(\alpha, \beta)$, $\Omega \subset D$, с некоторыми параметрами α, β, зависящими от области D и шаров B_0, B_1, которая будет содержать оба этих шара.*

Доказательство. Пусть x_0, x_1 — центры данных шаров, а r_0, r_1 — их радиусы. Построим спрямляемую кривую, соединяющую точки x_0 и x_1.

Для этого рассмотрим сначала произвольную непрерывную кривую K, лежащую в D и соединяющую точки x_0 и x_1, т. е. непрерывное отображение $K : [0, 1] \to D$ такое, что $K(0) = x_0$ и $K(1) = x_1$. Такая кривая существует, поскольку D — связное открытое множество. (Заметим, что кривая K не обязательно является спрямляемой.)

Совокупность шаров $\bigl\{B(K(t)), \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(K(t), \partial D)\bigr\}_{t\in[0,1]}$ образует покрытие компактного множества $K([0, 1])$. Из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $B(\xi_1, \rho_1), \dots, B(\xi_m, \rho_m)$, где $\xi_j = K(\tau_j)$, $\tau_j \in [0, 1]$, $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$.

Пусть $B(\xi_l,\rho_l)$ — шар с наибольшим номером, содержащий точку x_0. Если $x_1\in B(\xi_l,\rho_l)$, то кривая γ, составленная из кратчайших, соединяющих точку ξ_l с точками x_0 и x_1, спрямляема и ее длина $|\gamma|$ не больше $2\rho_l$.

В противном случае существует максимальное значение t_1 параметра $t\in(0,1)$ такое, что $v_1=K(t_1)\in\partial B(\xi_l,\rho_l)$, а $K(t)\notin\overline{B(\xi_l,\rho_l)}$ для всех $t\in(t_1,1]$. Тогда найдется кривая $\gamma_1\subset\overline{B(\xi_l,\rho_l)}\subset D$, составленная из кратчайших, соединяющих точку ξ_l с точками x_0 и v_1. Длина кривой γ_1 не превосходит $2\rho_l$.

В свою очередь, точка v_1 принадлежит некоторому шару $B(\xi_k,\rho_k)$, где $l<k\le m$ — максимальный номер шара, содержащий точку v_1. Если $x_1\in B(\xi_k,\rho_k)$, то дополним кривую γ_1 кратчайшими, соединяющими точку ξ_k с точками v_1 и x_1. Получим кривую γ, длина которой не превосходит $2(\rho_l+\rho_k)$.

В противном случае существует максимальное значение t_2 параметра $t\in(t_1,1)$ такое, что $v_2=K(t_2)\in\partial B(\xi_k,\rho_k)$, а $K(t)\notin\overline{B(\xi_k,\rho_k)}$ для всех $t\in(t_2,1]$. Тогда дополним кривую γ_1 новой кривой $\gamma_2\subset\overline{B(\xi_k,\rho_k)}\subset D$, составленной из кратчайших, соединяющих точку ξ_k с точками v_1 и v_2. Так как длина γ_2 не превосходит $2\rho_k$, длина составленной кривой $\gamma_1\cup\gamma_2$ не превосходит $2(\rho_l+\rho_k)$.

Продолжая этот процесс по индукции, через конечное число шагов (не более m) получим спрямляемую кривую $\Gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\dots$ в D, длина которой не превосходит $2\sum\limits_{k=1}^{m}\rho_k$.

Таким образом, кривая Γ спрямляема и соединяет центры шаров B_0 и B_1: $\Gamma(0)=x_0$, $\Gamma(L)=x_1$ (считаем, что Γ параметризована натуральным параметром, а L — длина Γ).

Обозначим символом $\delta=\operatorname{dist}(\Gamma,\partial D)$ расстояние между кривой Γ и границей области D. Рассмотрим область $\Omega=B_0\cup B_1\cup\bigcup\limits_{x\in\Gamma}B(x,\delta)$, состоящую из шаров B_0, B_1 и всех шаров радиуса δ с центрами на Γ. Положим $\alpha=\min\{\operatorname{dist}(\Gamma,\partial\Omega),r_0,r_1\}$ (или, что то же самое, $\alpha=\min\{\delta,r_0,r_1\}$), $\beta=L+r_0+r_1+\delta$.

Покажем, что Ω является областью Джона $J(\alpha,\beta)$ с выделенной точкой x_0. Пусть $x\in\Omega$. Если $x\in B_0$, то условия (21) выполняются автоматически: в качестве кривой γ выбираем кратчайшую, соединяющую x и x_0. Тогда $l=|\gamma|<r_0<\beta$ и для всех $s\in[0,l]$ выполнены следующие неравенства:

$$\operatorname{dist}(\gamma(s),\partial\Omega)\ge\operatorname{dist}(\gamma(s),\partial B_0)\ge s=\frac{sl}{l}\ge\frac{sr_0}{l}\ge\frac{\alpha s}{l}. \tag{22}$$

Если $x\in B_1$, то положим $\gamma=\gamma_1\cup\Gamma$, где γ_1 — кратчайшая, соединяющая x и x_1. Обозначим $l_1=|\gamma_1|<r_1$, тогда $l=|\gamma|=l_1+L<r_1+L<\beta$, $\operatorname{dist}(\gamma(s),\partial\Omega)\ge\frac{\alpha s}{l_1}\ge\frac{\alpha s}{l}$ для $s\in[0,l_1]$ и $\operatorname{dist}(\gamma(s),\partial\Omega)\ge\alpha\ge\frac{\alpha s}{l}$ для $s\in[l_1,l_1+L]$. Следовательно, $\operatorname{dist}(\gamma(s),\partial\Omega)\ge\frac{\alpha s}{l}$ для всех $s\in[0,l]$.

Пусть x не принадлежит ни B_0, ни B_1. Тогда $x\in B(\xi,r)$, где ξ — точка на кривой Γ и $r<\delta$. В качестве кривой γ возьмем кривую, состоящую из кратчайшей, соединяющей x и ξ, и сегмента кривой Γ от ξ до x_0. Как и в предыдущих двух случаях, имеем $l_1=|\gamma_1|<\delta$, $l=|\gamma|<\delta+L<\beta$,

$$\operatorname{dist}(\gamma(s),\partial\Omega)\ge\frac{\alpha s}{l_1}\ge\frac{\alpha s}{l}\ \text{для } s\in[0,l_1],\quad \operatorname{dist}(\gamma(s),\partial\Omega)\ge\alpha\ge\frac{\alpha s}{l}\ \text{для } s\in[l_1,l].$$

Таким образом, $\operatorname{dist}(\gamma(s),\partial\Omega)\ge\frac{\alpha s}{l}$ для всех $s\in[0,l]$.

Поэтому $\Omega\subset D$ является областью Джона, содержащей данные шары B_0,B_1. $\square$

Приведем следующее неравенство Пуанкаре для областей Джона (см. [34]).

Предложение 3 [34, теорема 4]. *Пусть $p < \nu$, $p \le q \le \frac{\nu p}{\nu - p}$ и U — область Джона $J(\alpha,\beta)$. Тогда для любой функции $u \in W_p^1(U)$ имеем*

$$\|u - c_u \mid L_q(U)\| \le C\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} \operatorname{diam}(U)^{1-\frac{\nu}{p}+\frac{\nu}{q}} \|\nabla_{\mathscr{L}} u \mid L_p(U)\|, \tag{23}$$

где c_u и C — постоянные, причем $C > 0$ не зависит от u, U, α, β.

Далее нам потребуется вариант неравенства Пуанкаре в следующей форме (см. также [24]).

Лемма 4. *Пусть U — область Джона $J(\alpha,\beta)$ и подмножество $F \subset U$ имеет положительную меру, $|F| > 0$. Тогда для всех $u(x) \in W_p^1(U)$, $p \le q \le \frac{\nu p}{\nu - p}$, $p < \nu$, таких, что $u|_F = 0$, выполнено неравенство*

$$\left(\int\limits_U |u(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \le \frac{|U|^{\frac{1}{q}}}{|F|^{\frac{1}{q}}} C\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} \operatorname{diam}(U)^{1-\frac{\nu}{p}+\frac{\nu}{q}} \left(\int\limits_U |\nabla_{\mathscr{L}} u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{24}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $u(x) \in W_p^1(U)$ такую, что $u|_F = 0$, где подмножество $F \subset U$ имеет положительную меру. Обозначим $M = \|u \mid L_q(U)\| > 0$. Тогда

$$|F| = \int\limits_U (\chi_F(x))^q\,dx \le \int\limits_U \left|1 - \frac{u(x)|U|^{\frac{1}{q}}}{M}\right|^q dx \le \frac{|U|}{M^q} \int\limits_U \left|\frac{M}{|U|^{\frac{1}{q}}} - u(x)\right|^q dx.$$

Следовательно,

$$M^q |F| \le |U| \|(M|U|^{-\frac{1}{q}} - u) \mid L_q(U)\|^q. \tag{25}$$

Для постоянной c_u из неравенства Пуанкаре (предложение 3) справедлива оценка

$$|M|U|^{-\frac{1}{q}} - c_u| = \big||U|^{-\frac{1}{q}}\|u \mid L_q(U)\| - |U|^{-\frac{1}{q}}\|c_u \mid L_q(U)\|\big| \le |U|^{-\frac{1}{q}}\|u - c_u \mid L_q(U)\|.$$

Используя неравенство Пуанкаре (23), имеем

$$\begin{aligned}\|(M|U|^{-\frac{1}{q}} - u) \mid L_q(U)\| &\le \|(M|U|^{-\frac{1}{q}} - c_u) \mid L_q(U)\| + \|u - c_u \mid L_q(U)\| \\ &\le 2\|u - c_u \mid L_q(U)\| \le 2C\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} \operatorname{diam}(U)^{1-\frac{\nu}{p}+\frac{\nu}{q}} \|\nabla_{\mathscr{L}} u \mid L_p(U)\|.\end{aligned}$$

Применяя (25), получаем

$$\|u \mid L_q(U)\| \le \frac{|U|^{\frac{1}{q}}}{|F|^{\frac{1}{q}}} 2C\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} \operatorname{diam}(U)^{1-\frac{\nu}{p}+\frac{\nu}{q}} \|\nabla_{\mathscr{L}} u \mid L_p(U)\|.$$

Лемма доказана. □

Лемма 5. *Пусть $p > \nu$, а функция $f \in C(D) \cap L_p^1(D)$ такова, что $f(x_0) = 0$ и $f(x_1) = 1$ для некоторых точек $x_0, x_1 \in B \subset D$. Тогда выполнено неравенство*

$$\frac{1}{d(x_0,x_1)^{1-\nu/p}} \le K \big\|f \mid L_p^1(D)\big\|. \tag{26}$$

Доказательство. Нам потребуется следующее неравенство Пуанкаре из [34, теорема 4]:

$$\|u - c_u \mid L_\infty(B)\| \le C \operatorname{diam}(B)^{1-\frac{\nu}{p}} \|\nabla_{\mathscr{L}} u \mid L_p(B)\|. \tag{27}$$

Фиксируем шар B такой, что $x_0, x_1 \in B$. Имеем

$$|f(x_0) - f(x_1)| \le |f(x_0) - c_f| + |f(x_1) - c_f| \le 2\|f - c_f \mid L_\infty(B)\|$$
$$\le Kd(x_0, x_1)^{1-\nu/p}\|\nabla_{\mathscr{L}} f \mid L_p(B)\| \le Kd(x_0, x_1)^{1-\nu/p}\|\nabla_{\mathscr{L}} f \mid L_p(D)\|, \quad (28)$$

где K — некоторая постоянная. В нашем случае $|f(x_0) - f(x_1)| = 1$ и, следовательно,

$$\frac{1}{d(x_0, x_1)^{1-\nu/p}} \le K\big\|f \mid L_p^1(D)\big\|. \quad \square \quad (29)$$

3. Функция множеств

Пусть $D \subset \mathbb{G}$ — открытое подмножество. Рассмотрим совокупность открытых подмножеств $\Theta(D)$ из D таких, что

1) $B \in \Theta(D)$ для любого шара $B \subset D$;

2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i \in \Theta(D)$ для любых попарно не пересекающихся множеств $U_1, \dots, U_n \in \Theta(D)$, где $n \in \mathbb{N}$.

Замечание 7. Среди таких совокупностей существуют: минимальная — всевозможные объединения конечных наборов открытых шаров, замыкания которых не пересекаются, и максимальная — все открытые подмножества из D.

Определение 7. Отображение $\Phi : \Theta(D) \mapsto [0, \infty]$ называется *конечно-квазиаддитивной функцией множеств*, если

1) для любого $x \in D$ существует δ, $0 < \delta < \operatorname{dist}(x, \partial D)$, такое, что $0 \le \Phi(B_\delta(x)) < \infty$;

2) неравенство $\sum\limits_{i=1}^{k} \Phi(U_i) \le \Phi(U)$ выполнено для любого набора попарно не пересекающихся открытых множеств $U_1, \dots, U_k \subset U$, где $U_i, U \in \Theta(D)$, $i = 1, \dots, k$.

Конечно-квазиаддитивная функция будет также и счетно-квазиаддитивной.

Если вместо второго условия в определении функции множеств потребовать

$$\sum_{i=1}^{k} \Phi(U_i) = \Phi(U)$$

для любого конечного набора $U_i \in \Theta(D)$, $i = 1, \dots, k$, попарно не пересекающихся открытых множеств, то такая функция называется *конечно-аддитивной*. Если это равенство распространить на счетный набор, то функция называется *счетно-аддитивной*.

Определение 8. Квазиаддитивная функция Φ называется *монотонной*, если $\Phi(U_1) \le \Phi(U_2)$ при $U_1 \subset U_2, U_1, U_2 \in \Theta(D)$.

Верхняя и нижняя производные квазиаддитивной функции, заданной на совокупности открытых подмножеств $\Theta(D)$, определяются как

$$\overline{\Phi}'(x) = \lim_{h\to 0} \sup_{\delta<h} \frac{\Phi(B_\delta)}{\mu(B_\delta)}, \quad \underline{\Phi}'(x) = \lim_{h\to 0} \inf_{\delta<h} \frac{\Phi(B_\delta)}{\mu(B_\delta)}.$$

Здесь супремум и инфимум берутся по всем открытым шарам B_δ, содержащим точку x, с радиусом $\delta < h$. Если в некоторой точке x верхняя и нижняя производные совпадают: $\overline{\Phi}'(x) = \underline{\Phi}'(x)$, то их общее значение называется *производной* $\Phi'(x)$ *функции множеств* Φ.

Для квазиаддитивной функции множества справедливо

Предложение 4 [25]. *Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно, а квазиаддитивная функция множества Φ определена на некоторой системе $\Theta(D)$ открытых подмножеств области $D \subset \mathbb{G}$. Тогда*

(a) *почти в каждой точке $x \in D$ существует конечная производная*

$$\Phi'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\Phi(B_\delta)}{|B_\delta|};$$

(b) *$\Phi'(x)$ — измеримая функция;*

(c) *для любого открытого множества $U \in \Theta(D)$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_U \Phi'(x)\, dx \leq \Phi(U).$$

Использование функций множеств позволяет доказать следующую теорему Лебега.

Теорема 3 [25]. *Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно, D — область в $\mathbb{G}$. Предположим, что функция f принадлежит $L_{1,\mathrm{loc}}(D)$. Тогда для п. в. $x \in D$ имеем*

$$\lim_{\delta \to 0,\, x \in B_\delta} \frac{1}{|B_\delta|} \int\limits_{B_\delta} |f(y) - f(x)|\, dy = 0.$$

4. Оператор композиции

Всюду далее $D, D' \subset \mathbb{G}$ — связные области, а отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу IL^1_p.

Напомним определение сходимости в полунормированном пространстве $L^1_p(D)$.

Определение 9. Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n\} \in L^1_p(D)$ *сходится к функции* $f \in L^1_p(D)$ $(f_n \to f)$ *в пространстве* $L^1_p(D)$, если

$$\|f_n - f \mid L^1_p(D)\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Заметим, что если $f_n \to f$ в пространстве $L^1_p(D)$, то также $f_n \to f + C$, где $C \in \mathbb{R}$ — произвольная константа.

Лемма 6. *Пусть $f \in L^1_p(D')$, $f_n \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$, $f_n \to f$ в пространстве $L^1_p(D')$ при $n \to \infty$ и выполнены следующие условия:*

(1) *функция $f \circ \varphi$ определена п. в. на D и п. в. принимает конечные значения;*

(2) *$f_n \circ \varphi(x) \to f \circ \varphi(x)$ при $n \to \infty$ для п. в. $x \in D$.*

Тогда

(1) *$f \circ \varphi \in L^1_p(D)$,*

(2) *$K^{-1}\|f \mid L^1_p(D')\| \leq \|f \circ \varphi \mid L^1_p(D)\| \leq K\|f \mid L^1_p(D')\|$.*

Доказательство. Шаг 1. Сначала рассмотрим случай, когда $|f| < C$ (применяя срезки, можно считать, что $|f_n| < 2C$ для всех $n \in \mathbb{N}$). Обозначим $g_n(x) = f_n \circ \varphi(x)$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости последовательность $\{g_n\}$ сходится к функции $f \circ \varphi$ в $L_1(B)$ на всяком шаре $B \subset D$. Кроме того, последовательность градиентов $\{\nabla_{\mathscr{L}} g_n\}$ фундаментальна в $L_p(D)$

и потому имеет предел в $L_p(D)$. Перечисленные свойства обеспечивают существование обобщенных производных у локально-суммируемой функции $f \circ \varphi$, и эти производные принадлежат $L_p(D)$. Следовательно, $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$.

Шаг 2. Пусть f — произвольная функция в $L^1_p(D')$, которую можно считать положительной, так как $f = f^+ - f^-$, а $f^+, f^- \in L^1_p(D')$.

Фиксируем шар $B_0 \subset D$. Можно считать, что $f \circ \varphi = 0$ на некотором множестве $F \subset B_0$ положительной меры. Действительно, множество $\{x \in B_0 : f(\varphi(x)) - k_0 \leq 0\}$ будет иметь положительную меру при некотором $k_0 \in \mathbb{N}$. Тогда вместо f можно рассматривать функцию $\max\{f(y) - k_0, 0\}$, а вместо последовательности $\{f_n\}$ — функции $\max\{f_n(y) - k_0, 0\}$. При этом

$$f_n \circ \varphi \to 0 \quad \text{п. в. на } F \text{ при } n \to \infty. \tag{30}$$

Далее рассматриваем неотрицательную функцию $f \in L^1_p(D')$ такую, что множество $F = \{x \in B_0 : f \circ \varphi(x) = 0\}$ имеет положительную меру.

Определим монотонную последовательность функций $u_m = g_m \circ \varphi$, где $g_m = \min\{f, m\}$. Поскольку g_m является ограниченной функцией, $u_m \in L^1_p(D)$ в силу шага 1. Также $u_m \to f \circ \varphi$ п. в. при $m \to \infty$. Действительно, для п. в. точек $x \in D$ найдется номер m такой, что $f(\varphi(x)) < m$. Тогда $u_k(x) = f(\varphi(x))$ для всех $k > m$.

Для произвольного шара $B \subset D$ выберем область Джона $U \supset B \cup B_0$ и применим к функциям u_m неравенство Пуанкаре (24). При $q = p$ выводим

$$\begin{aligned}\int\limits_U |u_m(x)|^p\,dx &\leq \frac{\operatorname{diam} U}{|F|} C r^p \int\limits_U |\nabla_{\mathscr{L}} u_m(x)|^p\,dx \\ &= \frac{\operatorname{diam} U}{|F|} C r^p \int\limits_U |\nabla_{\mathscr{L}} (g_m \circ \varphi(x))|^p\,dx = \frac{\operatorname{diam} U}{|F|} C r^p \big\|\varphi^* g_m \mid L^1_p(D)\big\|^p \\ &\leq K \frac{\operatorname{diam} U}{|F|} C r^p \big\|g_m \mid L^1_p(D')\big\|^p \leq C_2 \big\|f \mid L^1_p(D')\big\|^p. \end{aligned} \tag{31}$$

В третьем неравенстве мы воспользовались результатом шага 1. Таким образом, $u_m \in L_p(B)$. Так как функции $u_m = g_m \circ \varphi$, монотонно возрастая, сходятся на B к функции $f \circ \varphi$, по теореме Беппо Леви $f \circ \varphi \in L_p(B)$. Поскольку шар $B \subset D$ произвольный, композиция $f \circ \varphi$ локально суммируема на D. Заметим еще, что последовательность градиентов $\nabla_{\mathscr{L}} u_m$ фундаментальна в $L_p(D)$, поскольку таковой является последовательность градиентов $\nabla_{\mathscr{L}} g_m$. Действительно, имеем

$$\|\nabla_{\mathscr{L}} g_l - \nabla_{\mathscr{L}} g_m \mid L_p(D')\| \leq \int\limits_{\{x \in D' : f(x) \geq m\}} |\nabla_{\mathscr{L}} f|^p\,dx \quad \text{при } l > m.$$

Следовательно, $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$. Таким образом, лемма доказана и в случае, когда f не является ограниченной. $\square$

Лемма 7. *Пусть $p > \nu$. Тогда для любой функции $f \in L^1_p(D')$*

(1) $\tilde f \circ \varphi \in L^1_p(D)$,

(2) $K^{-1}\big\|f \mid L^1_p(D')\big\| \leq \big\|\tilde f \circ \varphi \mid L^1_p(D)\big\| \leq K\big\|f \mid L^1_p(D')\big\|$,

где $\tilde f$ — непрерывный представитель f.

Доказательство. Пусть $f \in L^1_p(D')$ и $\tilde f$ — непрерывный представитель f. Тогда найдется последовательность $f_n \in C^\infty(D') \cap L^1_p(D')$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что

$f_n \to \tilde f$ в $L^1_p(D')$ и $f_n(x) \to \tilde f(x)$ для всех $x \in D'$ (см. замечание 5). Заметим, что композиция непрерывной функции $\tilde f$ с отображением φ определена п. в. на D. Тогда

$$f_n \circ \varphi(x) \to \tilde f \circ \varphi(x) \quad \text{при } n \to \infty \text{ для п. в. } x \in D. \tag{32}$$

Таким образом, для функции $\tilde f$ выполнены условия леммы 6. □

Нам понадобится следующее

Предложение 5 [24, лемма 1]. *Предположим, что отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор*

$$\varphi^* : L^1_p(D') \cap C^\infty(D') \to L^1_q(D), \quad 1 \le q < p \le \infty, \quad \varphi^* f = f \circ \varphi.$$

Тогда

$$\Phi(A') = \sup_{f \in \overset{\circ}{L}{}^1_p(A') \cap C^\infty(A')} \left(\frac{\|\varphi^* f \mid L^1_q(D)\|}{\|f \mid \overset{\circ}{L}{}^1_p(A')\|} \right)^{\varkappa}, \qquad \text{где } \varkappa = \begin{cases} \frac{pq}{p-q} & \text{при } p \le \infty, \\ q & \text{при } p = \infty \end{cases}$$

— ограниченная счетно-аддитивная функция, определенная на открытых ограниченных подмножествах $A' \subset D'$.

Из леммы 14 (см. ниже) можно получить

Следствие 2 [24, следствие 1]. *Аддитивная функция множеств из предложения 5 абсолютно непрерывна.*

Замечание 8. В [24] утверждения следствия 2 и предложения 5 доказаны в $\mathbb{R}^n$. Подобно тому, как это было сделано в [25], доказательства с очевидными изменениями переносятся и на группу Карно.

Лемма 8 [24, теорема 4]. *Если отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный мономорфизм*

$$\varphi^* : L^1_p(D') \cap C^\infty_0(D') \to L^1_p(D), \quad 1 \le p \le \nu,$$

то отображение φ обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина.

Доказательство. Сначала покажем, что прообраз всякого открытого множества имеет положительную меру. Пусть $U \subset D'$ — открытое множество. Покажем, что $|\varphi^{-1}(U)| > 0$. Предположим, что это не так, т. е. $|\varphi^{-1}(U)| = 0$. Поскольку U является открытым множеством, можно выбрать шар $B = B(y_0, r)$ так, что $2B = B(y_0, 2r) \subset U$. Возьмем функцию класса $f \in C^\infty_0(D')$ такую, что $f = 1$ на B и $f = 0$ вне $2B$. Таким образом, $f \not\equiv 0$. С другой стороны, $\varphi^* f = 0$ п. в. на D. Следовательно, $\varphi^* f = 0$, чего быть не может, поскольку φ^* является мономорфизмом. Таким образом, прообраз любого открытого множества не может иметь нулевую меру.

Фиксируем срезку $\eta \in C^\infty_0(\mathbb{G})$, равную единице на $B(0,1)$ и нулю вне шара $B(0,2)$. Рассмотрим шар $B = B(y_0, r) \subset D'$ такой, что $B(y_0, 2r) \subset D'$, и функцию $f(y) = \eta\big(\delta_{r^{-1}}(y_0^{-1} y)\big) \in L^1_p(D')$. Для полунормы этой функции выполнена оценка

$$\big\|f \mid L^1_p(D')\big\| \le C r^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\nu}}. \tag{33}$$

Случай $p < \nu$. Поскольку оператор φ^* ограничен $\big(\big\|\varphi^* f \mid L^1_p(D)\big\| \le \|\varphi^*\| \times \big\|f \mid L^1_p(D')\big\|\big)$, из оценки (33) имеем

$$\big\|\varphi^* f \mid L^1_p(D)\big\| \le \|\varphi^*\| \big\|f \mid L^1_p(D')\big\| \le C_1 \|\varphi^*\| |B|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\nu}}. \tag{34}$$

Фиксируем открытое множество $U \subset D'$. Выберем покрытие области D счетным числом шаров $Q_0, Q_1, Q_2, \dots$ так, чтобы $Q_l \subset D$ и $\bigcup\limits_l Q_l = D$. Пусть множество нулевой меры $E \subset D'$ находится на положительном расстоянии от открытого множества U. По теореме Лузина найдется компактное множество $T \subset \varphi^{-1}(U)$ положительной меры такое, что отображение φ непрерывно на T и, следовательно, $\varphi(T)$ тоже компактное множество. Кроме того, можно считать, что $T \subset Q_0$. Рассмотрим открытое множество конечной меры $V \subset D'$ (сколь угодно малой меры, скажем $|V| = \varepsilon$), такое, что $V \supset E$ и $V \cap \varphi(T) = \varnothing$. Пусть наборы $\{B(y_i, r_i)\} \subset V$ и $\{B(y_i, 2r_i)\} \subset V$ образуют конечнократные покрытия множества V. Для функции $f_i(y) = \eta\big(\delta_{r_i^{-1}}\big(y_i^{-1}y\big)\big)$ имеем $\varphi^* f_i = 1$ на $\varphi^{-1}(B(y_i, r_i))$ и $\varphi^* f_i = 0$ вне $\varphi^{-1}(B(y_i, 2r_i))$, в частности, $\varphi^* f_i = 0$ на множестве T. В этом случае оценка (34) имеет вид

$$\big\|\varphi^* f_i \mid L^1_p(D)\big\| \leq C_1 \|\varphi^*\| |B(y_i, r_i)|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\nu}}. \tag{35}$$

Кроме того, справедлива также оценка меры прообраза $\varphi^{-1}(B(y_i, r_i))$:

$$|\varphi^{-1}(B(y_i, r_i))| \leq \int\limits_D |\varphi^* f_i|^q \, dx, \tag{36}$$

где $1 \leq q$. Для произвольного шара Q_j из покрытия $\{Q_l\}$ найдется область Джона $\Omega \subset D$ ($\Omega \in J(\alpha, \beta)$) такая, что $Q_j \subset \Omega$ и $Q_0 \subset \Omega$ (лемма 3). Далее воспользуемся неравенством Пуанкаре (24)

$$\bigg(\int\limits_\Omega |g|^{p^*} \, dx\bigg)^{\frac{1}{p^*}} \leq C_2 (\operatorname{diam}(\Omega))^{\frac{\nu}{p^*}} \bigg(\int\limits_\Omega |\nabla_{\mathscr{L}} g|^p \, dx\bigg)^{\frac{1}{p}}, \tag{37}$$

где $q = p^* = \frac{p\nu}{\nu - p}$ и $g \in L^1_p(D)$ — произвольная функция, равная нулю на множестве $T \subset Q_0 \subset \Omega$ положительной меры, а постоянная C_2 имеет следующий вид:

$$C_2 = \frac{C}{|T|^{\frac{1}{p^*}}} \Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^\nu.$$

Подставим в неравенство (37) функцию $g = \varphi^* f_i$ и применим оценки (35) и (36). Приходим к цепочке неравенств

$$|\varphi^{-1}(B(y_i, r_i)) \cap Q_j|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\nu}} \leq \bigg(\int\limits_\Omega |\varphi^* f_i|^{p^*} \, dx\bigg)^{\frac{1}{p^*}}$$

$$\leq C_2 (\operatorname{diam}(\Omega))^{\frac{\nu}{p^*}} \bigg(\int\limits_\Omega |\nabla_{\mathscr{L}} \varphi^* f_i|^p \, dx\bigg)^{\frac{1}{p}} \leq C_2 (\operatorname{diam}(\Omega))^{\frac{\nu}{p^*}} C_1 \|\varphi^*\| \cdot |B(y_i, r_i)|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\nu}},$$

откуда

$$|\varphi^{-1}(B(y_i, r_i)) \cap Q_j| \leq C_4 |B(y_i, r_i)|. \tag{38}$$

Поскольку $\{B(y_i, r_i)\}$ образуют конечнократное покрытие V, можно заключить, что

$$\sum_i |\varphi^{-1}(B(y_i, r_i)) \cap Q_j| \leq C_4 \sum_i |B(y_i, r_i)| \leq C_4 \zeta_\nu |V|, \tag{39}$$

где постоянная ζ_ν — кратность покрытия. Так как множества $\varphi^{-1}(B(y_i, r_i)) \cap Q_j$ покрывают $\varphi^{-1}(E) \cap Q_j$, а множество V имеет сколь угодно малую меру, получаем $|\varphi^{-1}(E)\cap Q_j| = 0$ для произвольного шара Q_j из счетного набора $\{Q_l\}$. Следовательно, $|\varphi^{-1}(E)| = 0$.

Если множество $E\subset D'\setminus U$ нулевой меры такое, что $\operatorname{dist}(E,U)=0$, то его можно представить в виде $E=\bigcup E_k$, где $E_k=\bigl\{y\in E : \operatorname{dist}(y,U)\geq \frac{1}{k}\bigr\}$. Тогда $\varphi^{-1}(E)\subset\bigcup\varphi^{-1}(E_k)$. Так как $|\varphi^{-1}(E_k)|=0$, то и $|\varphi^{-1}(E)|=0$.

Таким образом, для всех множеств $E\subset D'\setminus U$ нулевой меры прообраз $\varphi^{-1}(E)$ имеет нулевую меру. Другими словами, если $|E|=0$, то $|\varphi^{-1}(E\setminus\overline{U})|=0$.

Пусть U_1 — другое открытое множество, находящееся на положительном расстоянии от U. Любое множество $E\subset D'$ может быть представлено в виде $E=(E\setminus U)\cup(E\setminus U_1)$. Если множество E имеет нулевую меру, то $|\varphi^{-1}(E\setminus U)|=0$ и $|\varphi^{-1}(E\setminus U_1)|=0$, следовательно, $|\varphi^{-1}(E)|\leq|\varphi^{-1}(E\setminus U)|+|\varphi^{-1}(E\setminus U_1)|=0$.

Случай $p=\nu$. Фиксируем произвольный шар $B_1\subset D$, тогда если $g\in L^1_\nu(B_1)$, то $g\in L^1_q(B_1)$, где $q<\nu$. Рассмотрим ограниченный оператор

$$\varphi^*_B : L^1_\nu(D')\to L^1_q(B_1),$$

определенный по правилу $\varphi^*_B f=\varphi^* f|_{B_1}$. В этом случае неравенство (34) принимает вид

$$\bigl\|\varphi^*_B f \mid L^1_p(B_1)\bigr\|\leq C_1\Phi(2B)^{\frac{1}{\varkappa}}, \tag{40}$$

где функция Φ из предложения 5.

Пусть E — множество нулевой меры и $V\supset E$ — открытое множество меры $\varepsilon>0$. Выберем совокупность шаров $\{B_i\}$ такую, что $2B_i\subset V$ и оба набора $\{B_i\}$, $\{2B_i\}$ образуют конечнократные покрытия множества V. По аналогии с рассуждениями для случая $p<\nu$, используя лемму 14 (см. ниже), получаем

$$|\varphi^{-1}(E)\cap B_1|\leq\sum_i|\varphi^{-1}(B_i)|\leq C\sum_i\Phi(2B_i)\leq C\zeta_N\Phi(V).$$

Применяя абсолютную непрерывность функции Φ (следствие 2), выводим, что $|B_1\cap\varphi^{-1}(E)|=0$ для любого множества нулевой меры $E\in D'$. В силу произвольности шара B_1 получаем требуемое.

В итоге прообраз любого множества нулевой меры также является множеством меры нуль, т. е. отображение $\varphi: D\to D'$ обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина. $\square$

Лемма 9. *Пусть $p\leq\nu$, тогда для любой функции $f\in L^1_p(D')$*

(1) $f\circ\varphi\in L^1_p(D)$,

(2) $K^{-1}\bigl\|f \mid L^1_p(D')\bigr\|\leq\bigl\|f\circ\varphi \mid L^1_p(D)\bigr\|\leq K\bigl\|f \mid L^1_p(D')\bigr\|$.

Доказательство. Пусть $f\in L^1_p(D')$ и $\{f_n\}$ — последовательность функций из $C^\infty(D')\cap L^1_p(D')$ такая, что $\bigl\|f-f_n \mid L^1_p(D')\bigr\|\to 0$ и $f_n\to f$ п. в. на D' (см. замечание 5). Поскольку оператор (1) является мономорфизмом (см. замечание 1), отображение φ обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина (лемма 8). Следовательно, функция $f\circ\varphi$ определена п. в. на D и $f_n\circ\varphi\to f\circ\varphi$ п. в. на D. Далее, из леммы 6 получаем требуемые утверждения (1) и (2). $\square$

Лемма 10. *Пусть $\varphi\in IL^1_p$. Тогда оператор $\varphi*: L^1_p(D')\cap C^\infty(D')\to L^1_p(D)$ продолжается по непрерывности до оператора $\widetilde{\varphi*}: L^1_p(D')\to L^1_p(D)$ и обладает следующими свойствами:*

(1) значение оператора $\widetilde{\varphi*}: L^1_p(D')\to L^1_p(D)$ на классах $[f]\in L^1_p(D')$ можно найти по формуле

$$\widetilde{\varphi^*}([f])=\begin{cases} f\circ\varphi & \text{при } p\leq\nu,\ f \text{ — произвольный представитель класса } [f],\\ \tilde f\circ\varphi & \text{при } p>\nu,\ \tilde f \text{ — непрерывный представитель класса } [f];\end{cases}$$

(2) $K^{-1}\|f \mid L^1_p(D')\| \leq \|\widetilde{\varphi^*}(f) \mid L^1_p(D)\| \leq K\|f \mid L^1_p(D')\|$;

(3) $\widetilde{\varphi^*} : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ — *изоморфизм.*

Доказательство. Поскольку $L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$ плотно в $L^1_p(D')$, оператор $\varphi* : L^1_p(D') \cap C^\infty(D') \to L^1_p(D)$ можно продолжить по непрерывности на $L^1_p(D')$: пусть $f \in L^1_p(D')$, выбираем последовательность $f_n \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$ такую, что $f_n \to f$ в $L^1_p(D')$. Тогда последовательность $\varphi^* f_n$ будет сходиться в пространстве $L^1_p(D)$. С другой стороны, можно считать, что эта же последовательность сходится поточечно. На основании леммы 6 естественно положить $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^* f_n = f \circ \varphi$, так как композиция $f \circ \varphi$ определена п. в. при $p \leq \nu$ (при $p > \nu$ следует рассматривать непрерывный представитель $\tilde{f} \in L^1_p(D')$).

Из лемм 7 и 9 для любой функции $f \in L^1_p(D)$ имеем $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$ при $p \leq \nu$ и $\widetilde{f} \circ \varphi \in L^1_p(D)$ при $p > \nu$, откуда получаем утверждения (1), (2). Свойство (2) влечет изоморфность оператора $\widetilde{\varphi^*}$. $\square$

Далее предполагаем, что оператор φ^* определен на $L^1_p(D')$.

5. Основные теоремы

Приводимое ниже определение квазиизометрического гомеоморфизма эквивалентно определению 1.

Определение 10. Гомеоморфизм $\Phi : D \to D'$, где $D, D' \subset \mathbb{G}$, из неголономного класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D, \mathbb{G})$ называется *квазиизометрией*, если

$$|D\Phi(x)| \leq M \quad \text{и} \quad 0 < \alpha \leq |\det D\Phi(x)| \tag{41}$$

для п. в. $x \in D$, где постоянные M и α не зависят от x.

Используя неравенство Адамара ($|\det D\Phi(x)| \leq |D\Phi(x)|^\nu$), из условия (41) получаем

$$L^{-1} \leq |D\Phi(x)| \leq L, \tag{42}$$

где постоянная L такова, что $L^{-1} \leq \alpha^{\frac{1}{\nu}}$ и $L \geq M$.

Отметим еще, что определение 10 эквивалентно определению, сформулированному в [35].

Определение 11. Пусть U — открытое множество на группе Карно $\mathbb{G}$ и $\Phi : U \to \mathbb{G}$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{G})$. Отображение Φ — квазиизометрия, если якобиан $J(x, \Phi)$ сохраняет знак на U и $L^{-1}|\xi| \leq |D\Phi(x)\xi| \leq L|\xi|$ для всех $\xi \in V_1$ и для п. в. $x \in U$, где $L \geq 1$.

Следующая лемма устанавливает связь между квазиизометриями и локально билипшицевыми отображениями (см. определение 5).

Лемма 11 [35, лемма 1]. *Гомеоморфизм $\Phi : D \to D'$ является квазиизометрией тогда и только тогда, когда отображение Φ локально-билипшицево с одной и той же постоянной билипшицевости.*

Лемма 12. *Пусть $D, D' \subset \mathbb{G}$ — открытые множества и $|D| < \infty$, $\varphi : D \to D'$ — измеримое отображение, определенное п. в. в D. Тогда найдется возрастающая последовательность компактов $\{T_k\} \subset \operatorname{Dom}\varphi \subset D$ такая, что φ непрерывно на каждом T_k и $\big|D \setminus \bigcup\limits_k T_k\big| = 0$.*

Доказательство. По теореме Лузина найдется компактное множество $P_1 \subset \operatorname{Dom}\varphi$ такое, что отображение φ непрерывно на P_1 и $|\operatorname{Dom}\varphi \setminus P_1| < 1$.

Аналогично найдется компактное множество $P_2 \subset \operatorname{Dom}\varphi \setminus P_1$ такое, что отображение φ непрерывно на P_2 и $|(\operatorname{Dom}\varphi \setminus P_1) \setminus P_2| < \frac{1}{2}$, и т. д. Таким образом получаем последовательность множеств $\{P_i\}$. Обозначим $T_k = \bigcup\limits_1^k P_i$, тогда $T_k \subset T_{k+1} \subset \operatorname{Dom}\varphi$. Отображение φ непрерывно на каждом T_k, поскольку T_k представляет собой конечное объединение компактных попарно не пересекающихся множеств $P_1, \dots, P_k$, на каждом из которых отображение φ непрерывно. Кроме того, $|D \setminus T_k| = |\operatorname{Dom}\varphi \setminus T_k| < \frac{1}{k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\bigl|D \setminus \bigcup\limits_k T_k\bigr| = 0$. $\square$

Таким образом, областью определения отображения φ можно считать множество

$$\operatorname{Dom}_1 \varphi = \bigcup_k T_k. \tag{43}$$

Замечание 9. Можно выбрать множества $\widetilde{T}_k \subset T_k$ (где T_k — множества из леммы 12), состоящие только из точек ненулевой плотности. При этом φ непрерывно на каждом $\widetilde{T}_k$ и $\bigl|D \setminus \bigcup\limits_k \widetilde{T}_k\bigr| = 0$.

Доказательство. Действительно, пусть $\widetilde{T}_k$ — множество точек ненулевой плотности множества T_k. Тогда $|T_k \setminus \widetilde{T}_k| = 0$, $\widetilde{T}_{k+1} \supset \widetilde{T}_k$ и $\bigl|D \setminus \bigcup\limits_k \widetilde{T}_k\bigr| = 0$. $\square$

Замечание 10. Лемма 12 также верна и в том случае, когда область D не ограничена.

Доказательство. Область D можно представить в виде счетного объединения непересекающихся множеств: $D = \bigcup\limits_i D_i$, где $D_1 = D \cap B(0,1)$, $D_2 = (D \cap B(0,2)) \setminus \overline{D}_1$ и т. д. По лемме 12 для каждого множества D_i имеем возрастающую (по индексу k) последовательность компактов $T_k^i \subset \operatorname{Dom}\varphi$ такую, что $\bigl|D^i \setminus \bigcup\limits_k T_k^i\bigr| = 0$. Полагая $T_1 = T_1^1$, $T_2 = T_2^1 \cup T_2^2$, $T_3 = T_3^1 \cup T_3^2 \cup T_3^3$ и т. д., получаем возрастающую последовательность компактов $T_k \subset \operatorname{Dom}\varphi$. В частности, $\bigl|D^i \setminus \bigcup\limits_k T_k\bigr| = 0$ (поскольку $\bigcup\limits_k T_k^i \subset \bigcup\limits_k T_k$). Тогда $D \setminus \bigcup\limits_k T_k = \bigcup\limits_i \bigl(D^i \setminus \bigcup\limits_k T_k\bigr)$. Следовательно, $\bigl|D \setminus \bigcup\limits_k T_k\bigr| = 0$ как счетное объединение множеств нулевой меры. $\square$

Далее нам понадобятся следующее очевидные свойства непрерывных функций.

Предложение 6. (1) *Пусть f, g — непрерывные функции на множестве T, состоящем из точек положительной плотности. Если $f = g$ п. в. на T, то $f = g$ всюду на T.*

(2) *Непрерывная функция $f : D \to \mathbb{R}$ определяется однозначно своими значениями на плотном в D множестве T.*

5.1. Случай $p > \nu$.

Лемма 13. *Пусть $p > \nu$ и $\varphi : D \to D'$ — измеримое отображение (где D, D' — области в $\mathbb{G}$). Предположим, что выполнены следующие условия:*

(1) *отображение φ непрерывно на некотором множестве $T \subset D$, все точки множества T являются точками положительной плотности в $\mathbb{G}$;*

(2) *для любой локально липшицевой функции f с компактным носителем в D' верно $f \circ \varphi \in L_p^1(D)$ и*

$$\|f \circ \varphi \mid L_p^1(D)\| \leq C\|f \mid L_p^1(D')\|. \tag{44}$$

Тогда для любых двух точек $x_0, x_1 \in T$, $x_0 \neq x_1$, таких, что $B(x_1, d(x_0, x_1)) \subset D$, справедливо неравенство

$$d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \leq cd(x_0, x_1). \tag{45}$$

Если вместо условия (2) *выполнено условие*

($2'$) *для любой локально липшицевой функции g с компактным носителем в D существует функция $f \in L_p^1(D')$ такая, что $g = f \circ \varphi$ и*

$$\|f \mid L_p^1(D')\| \leq C'\|f \circ \varphi \mid L_p^1(D)\|, \tag{46}$$

то для любых двух точек $x_0, x_1 \in T$ таких, что $B(\varphi(x_1), d(\varphi(x_0), \varphi(x_1))) \subset D'$ и $\varphi(x_0) \neq \varphi(x_1)$, выполняется неравенство

$$d(x_0, x_1) \leq c' d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)). \tag{47}$$

Здесь постоянные c и c' зависят только от ν, p, C и C'.

Доказательство. Если $\varphi(x_0) = \varphi(x_1)$, то неравенство (45) очевидно.

Пусть $\varphi(x_0) \neq \varphi(x_1)$ и выполнены условия (1) и (2). Рассмотрим функцию

$$f(y) = \left(1 - \frac{d(y, \varphi(x_1))}{d(\varphi(x_0), \varphi(x_1))}\right)^+, \tag{48}$$

где $(\cdot)^+$ — положительная часть числа. Заметим, что $f(\varphi(x_0)) = 0$, $f(\varphi(x_1)) = 1$. В силу леммы 1 справедливы оценки

$$\|f \mid L_p^1(D')\| \leq \|f \mid L_p^1(\mathbb{G})\| \leq \frac{\varkappa}{d(\varphi(x_0), \varphi(x_1))^{1-\nu/p}}, \tag{49}$$

где постоянная $\varkappa$ зависит от меры единичного шара.

Носитель функции f содержится в шаре $B(\varphi(x_1), d(\varphi(x_1), \varphi(x_0)))$. Пусть g — непрерывный представитель $f \circ \varphi$. По лемме 10 непрерывная функция g совпадает с $f \circ \varphi$ п. в. на D. Однако на множестве T, состоящем из точек положительной плотности, отображение φ непрерывно. Поэтому $g|_T(x) = f \circ \varphi|_T(x)$ для всех $x \in T$. Следовательно, $g(x_0) = 0$ и $g(x_1) = 1$. По лемме 5 для любой непрерывной функции $g \in L_p^1(D)$ такой, что $g(x_0) = 0$ и $g(x_1) = 1$, справедлива оценка

$$\frac{1}{d(x_0, x_1)^{1-\nu/p}} \leq K\|g \mid L_p^1(D)\|. \tag{50}$$

Возвращаясь к тому, что $g = f \circ \varphi$, где f определена в (48), с учетом соотношений (50), (49) и $\|g \mid L_p^1(D)\| \leq C\|f \mid L_p^1(D')\|$ имеем

$$\frac{1}{d(x_0, x_1)^{1-\nu/p}} \leq K\|g \mid L_p^1(D)\| \leq KC\|f \mid L_p^1(D')\| \leq \frac{KC\varkappa}{d(\varphi(x_0), \varphi(x_1))^{1-\nu/p}}. \tag{51}$$

Отсюда

$$d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \leq cd(x_0, x_1), \tag{52}$$

где постоянная c зависит только от ν, p и C.

Пусть выполнены условия (1) и ($2'$). Рассмотрим функцию

$$g(x) = \left(1 - \frac{d(x, x_1)}{d(x_0, x_1)}\right)^+. \tag{53}$$

Снова отметим, что $g(x_0) = 0$, $g(x_1) = 1$ и справедлива оценка (лемма 1)

$$\|g \mid L_p^1(D)\| \le \frac{\varkappa}{d(x_0, x_1)^{1-\nu/p}}. \tag{54}$$

Пусть функция $f \in L_p^1(D')$ такова, что $g = f \circ \varphi$ (можно считать, что f непрерывна). Поскольку отображение φ непрерывно на T, имеем $f \circ \varphi|_T(x) = g|_T(x)$ для всех $x \in T$ (предложение 6). Тогда $f(\varphi(x_0)) = 0$, $f(\varphi(x_1)) = 1$ и в силу леммы 5 получаем

$$\frac{1}{p(\varphi(x_0), \varphi(x_1))^{1-\nu/p}} \le K'\|f \mid L_p^1(D')\|. \tag{55}$$

Используя соотношения $\|f \mid L_p^1(D')\| \le C'\|g \mid L_p^1(D)\|$, (54) и (55), выводим

$$\frac{1}{d(\varphi(x_0), \varphi(x_1))^{1-\nu/p}} \le K'\|f \mid L_p^1(D')\| \le K'C'\|g \mid L_p^1(D)\| \le \frac{K'C'\varkappa}{d(x_0, x_1)^{1-\nu/p}}. \tag{56}$$

Отсюда

$$d(x_0, x_1) \le c' d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)), \tag{57}$$

где постоянная c' зависит только от ν, p и C'. $\square$

Теорема 4. *Пусть $p > \nu$, а $D, D' \subset \mathbb{G}$ — две области. Если измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ таково, что для любой ограниченной функции $f \in L_p^1(D')$ выполнены условия*

(1) $\tilde{f} \circ \varphi \in L_p^1(D)$,

(2) $K^{-1}\|f \mid L_p^1(D')\| \le \|\tilde{f} \circ \varphi \mid L_p^1(D)\| \le K\|f \mid L_p^1(D')\|$,

где $\tilde{f}$ — непрерывный представитель f и K — положительная константа. Тогда отображение φ совпадает п. в. с некоторой квазиизометрией.

Доказательство. По лемме 12 с учетом замечаний 9 и 10 найдется возрастающая последовательность множеств $\{\widetilde{T}_k\} \subset D$ такая, что отображение φ непрерывно на каждом $\widetilde{T}_k$ и $\bigl|D \setminus \bigcup\limits_k \widetilde{T}_k\bigr| = 0$, где T_k состоят только из точек ненулевой плотности. Тогда областью определения отображения φ можно считать множество

$$\operatorname{Dom}_2 \varphi = \bigcup_k \widetilde{T}_k. \tag{58}$$

Пусть $x_0, x_1 \in \operatorname{Dom}_2 \varphi$ — две различные точки. Тогда найдется номер k такой, что $x_0, x_1 \in \widetilde{T}_k$. Сначала покажем, что для двух таких точек имеем $\varphi(x_0) \ne \varphi(x_1)$. Пусть, напротив, $\varphi(x_0) = \varphi(x_1)$. Рассмотрим непрерывную функцию $f \in L_p^1(D)$ такую, что $f(x_0) \ne f(x_1)$ (очевидно, что такая функция найдется, так как точки x_0 и x_1 находятся на положительном расстоянии). По лемме 10 найдется функция $g \in L_p^1(D')$ такая, что $f = \varphi^* g$. В силу леммы 7 имеем $f = \varphi^* g = \tilde{g} \circ \varphi$ п. в. на $\widetilde{T}_k$, где $\tilde{g}$ — непрерывный представитель g. Отображение φ непрерывно на $\widetilde{T}_k$, поэтому $\tilde{g} \circ \varphi$ тоже непрерывно на $\widetilde{T}_k$ и, следовательно, $f|_{\widetilde{T}_k}(x) = g \circ \varphi|_{\widetilde{T}_k}(x)$ для всех $x \in \widetilde{T}_k$, так как точки множества $\widetilde{T}_k$ имеют положительную плотность (предложение 6). Но тогда $f(x_0) = \tilde{g}(\varphi(x_0)) =$

$\tilde{g}(\varphi(x_1)) = f(x_1)$, т. е. $f(x_0) = f(x_1)$, что противоречит выбору функции f. Итак, $\varphi(x_0) \neq \varphi(x_1)$ при $x_0 \neq x_1$.

Кроме того, выполнено условие (1) леммы 13, если в качестве множества T взять T_k.

Поскольку $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ является ограниченным оператором, для любой липшицевой функции f с компактным носителем верно $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$ и

$$\left\| f \circ \varphi \mid L^1_p(D) \right\| \leq C \left\| f \mid L^1_p(D') \right\|.$$

Таким образом, выполнено условие (2) леммы 13. Следовательно,

$$d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \leq c d(x_0, x_1)$$

при условии, что $B(x_0, d(x_0, x_1)) \subset D$.

Получим неравенство, обратное к (52). Поскольку оператор $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ — изоморфизм, для любой липшицевой функции g с компактным носителем в D существует функция $f \in L^1_p(D')$ такая, что $g = f \circ \varphi$ и

$$\left\| f \mid L^1_p(D') \right\| \leq C' \left\| f \circ \varphi \mid L^1_p(D) \right\|.$$

Другими словами, выполнено условие $(2')$ леммы 13. Значит,

$$d(x_0, x_1) \leq c' d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \tag{59}$$

при условии, что $B(\varphi(x_0), d(\varphi(x_0), \varphi(x_1))) \subset D'$. Из неравенств (52) и (59) получаем, что для для достаточно близких точек $x_0, x_1 \in \operatorname{Dom}_2 \varphi$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{c'} d(x_0, x_1) \leq d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \leq c d(x_0, x_1). \tag{60}$$

Действительно, левая этих соотношений справедлива при условии $d(x_0, x_1) < c^{-1} d(\varphi(x_0), \partial D')$ так как в этом случае

$$d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \leq c d(x_0, x_1) < d(\varphi(x_0), \partial D'),$$

а следовательно, $B(\varphi(x_0), d(\varphi(x_0), \varphi(x_1))) \subset D'$.

Заметим, что неравенства (60) выполняются при выполнении следующего условия:

$$d(x_0, x_1) < r_{x_0} = \min(d(x_0, \partial D), c^{-1} d(\varphi(x_0), \partial D')).$$

Рассмотрим произвольное положительное число $\rho_{x_0} < r_{x_0}$. Подберем его так, чтобы для любых точек $x, y \in B(x_0, \rho_{x_0})$ одновременно выполнялись два условия:

$$d(x, y) < d(x, \partial D) \quad \text{и} \quad d(x, y) < c^{-1} d(\varphi(x), \partial D').$$

Для выполнения первого неравенства достаточно выбрать ρ_{x_0} так, что $0 < \rho_{x_0} < r_{x_0}/3$. Действительно, в этом случае выводим

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq 2\rho_{x_0} < r_{x_0} - \rho_{x_0} < d(x, \partial D).$$

Для обеспечения второго неравенства фиксируем произвольное $0 < \rho_{x_0} < r_{x_0}/3$ так, что

$$\operatorname{diam} \varphi(B(x_0, \rho_{x_0})) < c^{-1} c' \operatorname{dist}(\varphi(B(x_0, \rho_{x_0})), \partial D').$$

Это можно сделать, так как $\operatorname{diam} \varphi(B(x_0, \rho))$ убывает при уменьшении ρ, а $\operatorname{dist}(\varphi(B(x_0, \rho)), \partial D')$ возрастает при уменьшении ρ. При таком выборе ρ_{x_0} получаем

$$\begin{aligned} d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq c d(x, y) \leq c {c'}^{-1} \operatorname{diam} \varphi(B(x_0, \rho_0)) \\ < \operatorname{dist}(\varphi(B(x_0, \rho_{x_0})), \partial D') \leq d(\varphi(x), \partial D'). \end{aligned}$$

Таким образом, для любых точек $x, y \in B(x_0, \rho_{x_0}) \subset D$ выполняются включение $B(\varphi(x), d(\varphi(x), \varphi(y))) \subset D'$, а значит, неравенства

$$\frac{1}{c'} d(x,y) \leq d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq c d(x,y).$$

Обозначим $D_1 = \bigcup\limits_{x_0 \in \mathrm{Dom}_2 \varphi} B(x_0, \rho_{x_0})$. Имеем $D_1 \subset D$ и $|D \setminus D_1| = 0$. Кроме того, $\varphi : \mathrm{Dom}_2 \varphi \to D'$ продолжается по непрерывности до локально-билипшицего отображения $\Phi : D_1 \to D' \subset \mathbb{G}$. Заметим, что $\Phi : D_1 \to D' \subset \mathbb{G}$ — инъективное отображение. Пусть, напротив, $\Phi(x) = \Phi(y)$ для некоторых различных точек $x, y \in D_1$. Тогда найдутся шары $B(x,r)$ и $B(y,r)$, замыкания которых дизъюнктны, а пересечение $\Phi(B(x,r)) \cap \Phi(B(y,r))$ — открытое множество. Очевидно, что любая функция $f \in L^1_p(D)$, равная нулю на $B(x,r)$ и единице на $B(y,r)$, не может быть получена как образ $\varphi^*(g)$ некоторой непрерывной функции $g \in L^1_p(D')$, поскольку мера образа $\Phi(D_1 \setminus \mathrm{Dom}_2 \varphi)$ равна нулю. Следовательно, $\Phi : D_1 \to D' \subset \mathbb{G}$ — гомеоморфизм.

Рассмотрим набор шаров $Q_L = B(e, L)$, $L \in \mathbb{N}$, и гладкие финитные функции

$$\eta_L(y) = \begin{cases} 1, & y \in Q_L, \\ 0, & y \notin Q_{L+1}. \end{cases}$$

Пусть $x \in D \setminus D_1$. Предположим, что существует последовательность $\{x_n \in D_1\}$ такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, а последовательность образов $\{\Phi(x_n)\}$ ограничена: найдется число L такое, что $\{\Phi(x_n)\} \subset Q_{L-1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда не может быть такого, чтобы для какой-нибудь последовательности $\{y_n \in D_1\}$ такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = x$, последовательность образов $\{\Phi(y_n)\}$ была бы неограниченной. Действительно, функция $\varphi^*(\eta_L)$ непрерывна и в точках множества $\mathrm{Dom}_2 \varphi$ совпадает с композицией $\eta_L \circ \varphi$. Так как $\mathrm{Dom}_2 \varphi$ плотно в D_1, непрерывная функция $\varphi^*(\eta_L)$ равна композиции $\eta_L \circ \Phi$ во всех точках множества D_1. Отсюда имеем $\varphi^*(\eta_L)(x_n) = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi^*(\eta_L)(y_n) = 0$, что противоречит непрерывности функции $\varphi^*(\eta_L)$.

Рассмотрим непрерывные функции $y_i \cdot \eta_L \in L^1_p(\mathbb{G})$. Тогда $\varphi^*(y_i \cdot \eta_L)(x) \in L^1_p(D)$ будет непрерывной функцией, совпадающей поточечно с функцией $\Phi_i(x) \cdot \eta_L(\Phi(x))$ на D_1. Из условия $\Phi_i(x_n) = \Phi_i(x_n) \cdot \eta_L(\Phi(x_n))$ для $\Phi(x_n) \in Q_L$ вытекает, что последовательность $\Phi(x_n)$ имеет предел. По критерию Гейне отображение $\Phi : D_1 \to \mathbb{G}$ имеет предел при $y \to x$ по множеству D_1. Полагая значение $\Phi(x)$ равным этому пределу, получаем непрерывное продолжение отображения Φ в точку x.

Остается рассмотреть множество точек

$$F = \{x \in D \setminus D_1 : d(\varphi(x_n)) \to \infty \text{ для любой последовательности } x_n \to x,\ x_n \in D_1\}.$$

Заметим, что множество F замкнуто. Предположим $F \neq \varnothing$. Выберем точку $x \in D_1$ и шар $B(x, \rho) \subset D_1$ так, чтобы $\overline{B(x,\rho)} \cap F \neq \varnothing$. Пусть $y \in \overline{B(x,\rho)} \cap F$. Найдется кривая конечной длины $\gamma \subset B(x, d(x,y))$ соединяющая точки x и y. Образ этой кривой $\Phi(\gamma)$ также имеет конечную длину (см. доказательство леммы 1 из [35]). Следовательно, существует последовательность точек $x_n \in D_1$ такая, что последовательность $\Phi(x_n)$ ограничена. Последнее противоречит определению множества F. Следовательно, $F = \varnothing$.

Таким образом, мы построили отображение $\Phi : D \to \mathbb{G}$, которое очевидно будет непрерывным.

Докажем его открытость. Фиксируем точку $x \in D \setminus D_1$ и полагаем $z = \Phi(x)$. Из условий теоремы вытекает (см. детали ниже в доказательстве леммы 22), что отображение $\Phi : D \to \mathbb{G}$ принадлежит классу Соболева $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(D)$ и индуцирует ограниченный оператор композиции $\Phi^* : L^1_\nu(\mathbb{G}) \to L^1_\nu(D)$. Отсюда выводим, что прообраз $\Phi^{-1}(z)$ имеет $(1,\nu)$-емкость нуль и, следовательно, ν-меру Хаусдорфа нуль (см. детали в [26]). Отсюда стандартным образом выводим, что для некоторого шара $B(x,r) \subset D$ имеем $\Phi(x) \notin \Phi(S(x,r))$.

Пусть $\Phi(x)$ принадлежит ограниченной компоненте дополнения $\mathbb{G}\setminus\Phi(S(x,r))$. Тогда найдутся точки $y \in B(x,r) \cap D_1$, для которых образ $\Phi(y)$ принадлежит той же компоненте связности, и $\Phi(y)$ $\mathscr{P}$- дифференцируемо в точках y, причем $\mathscr{P}$-дифференциал не вырожден. Тогда степень отображения Φ в точке $\Phi(y)$ не равна нулю. Отсюда получаем, что образ $\Phi(B(x,r))$ — окрестность точки $\Phi(x)$. Таким образом, в этом случае Φ — открытое отображение.

Остается исключить возможность, когда $\Phi(x)$ принадлежит неограниченной компоненте дополнения $\mathbb{G}\setminus\Phi(S(x,r))$. Если такое случилось, то аналогично найдутся точки $y \in B(x,r) \cap D_1$, для которых образ $\Phi(y)$ принадлежит неограниченной компоненте связности, и $\Phi(y)$ $\mathscr{P}$-дифференцируемо в точках y, причем $\mathscr{P}$-дифференциал не вырожден. Тогда степень отображения Φ в точке $\Phi(y)$ не равна нулю, чего очевидно быть не может.

Из открытости отображения $\Phi : D \to \mathbb{G}$ аналогично тому, как выше была получена инъективность отображения $\Phi : D_1 \to \mathbb{G}$, выводим его инъективность. Следовательно, отображение $\Phi : D \to \mathbb{G}$ — квазиизометрический гомеоморфизм в соответствии с определением 10. Доказательство теоремы 4 завершено.

5.2. Случай $p < \nu$.

Лемма 14 [25, лемма 10]. *Пусть монотонная счетно-аддитивная функция Φ определена на открытых подмножествах открытого множества $D \subset \mathbb{G}$. Тогда для всякого открытого множества $U \subset D$, $U \neq \mathbb{G}$, существует последовательность евклидовых шаров $\{B_j\}$ такая, что*

(1) *семейства $\{B_j\}$ и $\{2B_j\}$ образуют конечнократное покрытие U;*

(2) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \Phi(2B_j) \leq \zeta_N \Phi(U)$, *где ζ_N — постоянная, зависящая только от размерности N.*

Лемма 15. *Пусть $D, D' \subset \mathbb{G}$, $p \leq \nu$ и отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу IL^1_p. Тогда из области определения отображения φ можно удалить множество нулевой меры так, что на новой области определения $\mathrm{Dom}_3\,\varphi$ будет выполнено следующее свойство: для любых двух шаров $B_1, B_2 \subset D$ таких, что $\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 = \varnothing$, пересечение образов имеет нулевую меру, т. е.*

$$|\varphi(B_1 \cap \mathrm{Dom}_3\,\varphi) \cap \varphi(B_2 \cap \mathrm{Dom}_3\,\varphi)| = 0.$$

Доказательство. Разобьем доказательство леммы на несколько шагов.

Шаг 1. Пусть $\{z_l\}$ — счетное всюду плотное множество в $\mathrm{Dom}_1\,\varphi$, $l \in \mathbb{N}$, и $\left\{\overline{B}_{ml} = \overline{B}\left(z_l, \frac{1}{m}\right)\right\} \subset D$ — набор замкнутых шаров (здесь $m \in \mathbb{N}$). Возьмем два произвольных непересекающихся шара $\overline{B}_{ml}$ и $\overline{B}_{ks}$ из этого набора и локально липшицеву функцию $f \in L^1_p(D)$, удовлетворяющую условиям

$$f_{mlks}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \overline{B}_{ml}, \\ 1, & \text{если } x \in \overline{B}_{ks}. \end{cases} \tag{61}$$

По лемме 10 найдется функция $g_{mlks} \in L^1_p(D')$ такая, что равенство $\varphi^* g_{mlks}(x) = f_{mlks}(x)$ справедливо всюду в D, за исключением некоторого множества Σ_{mlks} нулевой меры. Объединение $\Sigma = \bigcup \Sigma_{mlks}$ по всевозможным индексам m, l, k и s имеет нулевую меру. Удалим Σ из области определения отображения φ. Суженную таким образом область определения обозначим символом $\mathrm{Dom}_0\,\varphi$. Заметим, что для всех точек $x \in \mathrm{Dom}_0\,\varphi$ справедливо равенство $\varphi^* g_{mlks}(x) = f_{mlks}(x)$, где m, l, k и s — все возможные индексы.

Шаг 2. По лемме 12 из $\mathrm{Dom}_0\,\varphi$ — области определения отображения φ — можно удалить множество нулевой меры и получить суженную область $\mathrm{Dom}_1\,\varphi \subset \mathrm{Dom}_0\,\varphi \subset D$, обладающую следующими свойствами:

$$|D \setminus \mathrm{Dom}_1\,\varphi| = 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{Dom}_1\,\varphi = \bigcup_k T_k, \tag{62}$$

где T_k — возрастающая последовательность компактов из замечания 10.

Шаг 3. Обозначим $F_{ml} = \overline{B}_{ml} \cap \mathrm{Dom}_1\,\varphi$. Заметим, что F_{ml} являются борелевскими множествами положительной меры. Рассмотрим всевозможные пары множеств $F_{m_i l_i}, F_{m_j l_j} \subset \mathrm{Dom}_1\,\varphi$ (для краткости будем обозначать их через F_i и F_j) такие, что

(a) замкнутые шары $\overline{B}_{m_i l_i}$ и $\overline{B}_{m_j l_j}$ не пересекаются,

(b) $|\varphi(F_i) \cap \varphi(F_j)| > 0$ (т. е. пересечение образов имеет положительную меру).

Заметим, что множества $\varphi(F_i)$ и $\varphi(F_j)$ борелевские, а потому измеримые.

Обозначим $E_{ij} = \varphi^{-1}(\varphi(F_i) \cap \varphi(F_j))$. Рассмотрим два основных случая:

1) оба множества $E_{ij} \cap F_i$ и $E_{ij} \cap F_j$ имеют положительную меру;

2) одно из множеств $E_{ij} \cap F_i$ или $E_{ij} \cap F_j$ имеет нулевую меру.

Покажем, что случай 1 противоречит свойствам, которыми обладает отображение φ. В силу включений $F_i \subset \overline{B}_{m_i l_i}$ и $F_j \subset \overline{B}_{m_j l_j}$ имеем следующее (используемые ниже функции определены в (61)):

(c) с одной стороны, $g_{m_i l_i m_j l_j}(x) = 0$ во всех точках F_i, так как $g_{m_i l_i m_j l_j}(y) = f_{m_i l_i m_j l_j}(x)$ для всех $y = \varphi(x) \in F_i$ и $f_{m_i l_i m_j l_j}(x) = 0$ для всех $x \in F_i$;

(d) с другой стороны, $g_{m_i l_i m_j l_j}(x) = 1$ во всех точках F_j, ибо $g_{m_i l_i m_j l_j}(y) = f_{m_i l_i m_j l_j}(x)$ для п. в. $y = \varphi(x) \in F_j$ и $f_{m_i l_i m_j l_j}(x) = 1$ для $x \in F_j$.

Значит, случай 1 невозможен, поэтому для множеств $F_i, F_j \subset \mathrm{Dom}_1\,\varphi$ выполнено: или $|\varphi(F_i) \cap \varphi(F_j)| = 0$, что противоречит (b), или имеет место случай 2.

Шаг 4. Перейдем к случаю 2. Обозначим $E_0 = \bigcup (E_{ij} \cap F_j)$, где объединение ведется по таким индексам i, j, для которых $|E_{ij} \cap F_j| = 0$. Имеем $|E_0| = 0$.

Если F_i и F_j принадлежат непересекающимся замкнутым шарам, то

$$|\varphi(F_i \setminus E_0) \cap \varphi(F_j \setminus E_0)| = 0.$$

Из области определения отображения φ удаляем множество E_0 нулевой меры и областью определения считаем далее множество

$$\mathrm{Dom}_3\,\varphi = \mathrm{Dom}_1\,\varphi \setminus E_0. \tag{63}$$

Пусть $B_1, B_2 \subset D$ такие шары, что $\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 = \varnothing$. Поскольку B_1 и B_2 находятся на положительном расстоянии, можно выбрать наборы $\{F_i\}$ и $\{F_j\}$ такие, что $B_1 \cap \mathrm{Dom}_3\,\varphi = \bigcup\limits_i F_i \setminus E_0$ и $B_2 \cap \mathrm{Dom}_3\,\varphi = \bigcup\limits_i F_j \setminus E_0$. Ввиду

$$\varphi(B_1 \cap \mathrm{Dom}_3\,\varphi) = \bigcup_i \varphi(F_i \setminus E_0) \quad \text{и} \quad \varphi(B_2 \cap \mathrm{Dom}_3\,\varphi) = \bigcup_j \varphi(F_j \setminus E_0)$$

получаем

$$|\varphi(B_1 \cap \operatorname{Dom}_3 \varphi) \cap \varphi(B_2 \cap \operatorname{Dom}_3 \varphi)| = \Big| \bigcup_i \varphi(F_i \setminus E_0) \cap \bigcup_j \varphi(F_j \setminus E_0) \Big| \\ \leq \sum_{i,j} |\varphi(F_i \setminus E_0) \cap \varphi(F_j \setminus E_0)|.$$

Все слагаемые в последней сумме равны нулю, следовательно,

$$|\varphi(B_1 \cap \operatorname{Dom}_3 \varphi) \cap \varphi(B_2 \cap \operatorname{Dom}_3 \varphi)| = 0.$$

Таким образом, лемма 15 доказана. □

Фиксируем шар $Q \subset \mathbb{G}$. Определим следующую функцию множеств:

$$\Psi_Q : B \mapsto |\varphi(B \cap \operatorname{Dom}_3 \varphi) \cap Q|, \tag{64}$$

т. е. функция Ψ_Q каждому шару $B \subset D$ сопоставляет меру пересечения образа этого шара с шаром Q. В силу леммы 15 функция Ψ_Q обладает следующим свойством аддитивности: $\Psi_Q(B_1 \cup B_2) = \Psi_Q(B_1) + \Psi_Q(B_2)$ для любых шаров $B_1, B_2 \subset D$ таких, что $\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 = \varnothing$. Используя это свойство и проводя рассуждения из доказательства теоремы 3 из [25] (см. предложение 4), можно показать, что для п. в. $x \in D$ определена и конечна производная

$$\Psi'_Q(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\Psi_Q(B(x,r))}{|B(x,r)|} \tag{65}$$

и выполнено неравенство

$$\int_U \Psi'_Q(x)\, dx \leq \Psi_Q(U), \tag{66}$$

где U — конечное объединение шаров, замыкания которых не пересекаются. Обозначим символом Σ_Ψ множество меры нуль, на котором производная Ψ'_Q либо не определена, либо равна ∞. Тогда во всех точках дополнения $D \setminus \Sigma_\Psi$ определена конечная производная Ψ'_Q.

Лемма 16. *На дополнении $D \setminus \Sigma_\Psi$ отображение φ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина.*

Доказательство. Пусть $A_k = \{x \in D \setminus \Sigma_\Psi : \Psi'_Q(x) < k\}$, тогда $D \setminus \Sigma_\Psi = \bigcup\limits_k A_k$. Пусть $E_k \subset A_k$ — множество нулевой меры. Можно считать, что E_k ограничено. Для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $U_\varepsilon \supset E_k$ такое, что $|U_\varepsilon| < \varepsilon$. С учетом определения множества A_k и (65) имеем: для каждого $x \in E_k$ найдется число $r_x > 0$ такое, что $B(x,r) \subset U_\varepsilon$ и $|\varphi(B(x,r))| < k|B(x,r)|$ для любого числа $0 < r < r_x$. По лемме Витали из семейства шаров $\mathscr{B} = \{B(x,r) : x \in \Sigma_k, B(x,r) \subset U_\varepsilon,\ 0 < r < r_\varepsilon\}$ можно выделить счетное семейство шаров $\{B_j\}$ такое, что будут выполнены следующие условия: $\overline{B}_i \cap \overline{B}_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $E_k \subset \bigcup\limits_j cB_j$, где c — постоянная, зависящая только от ν. Кроме того, $cB(x,r) \subset U_\varepsilon$ и $|\varphi(cB(x,r))| < k|cB(x,r)|$. Тогда

$$|\varphi(E_k)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(cB_j)| < k \sum_{j=1}^{\infty} |cB_j| \leq ck \sum_{j=1}^{\infty} |B_j| \leq ck|U_\varepsilon| < ck\varepsilon, \tag{67}$$

откуда $|\varphi(E_k)| = 0$, так как $\varepsilon > 0$ произвольно. Для любого множества меры нуль $E \subset D \setminus \Sigma_\Psi$ имеем также $|\varphi(E)| = 0$, так как $E = \bigcup\limits_k E \cap A_k$.

Таким образом, отображение $\varphi : D \setminus \Sigma_\Psi \to D'$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина. $\square$

Поскольку $|\Sigma_\Psi| = 0$, областью определения отображения φ можно считать множество

$$\operatorname{Dom}_4 \varphi = \operatorname{Dom}_3 \varphi \setminus \Sigma_\Psi. \tag{68}$$

Теперь можно обобщить утверждение леммы 15.

Лемма 17. *Пусть для отображения $\varphi : \operatorname{Dom}_4 \varphi \to D'$ выполнены условия леммы* 15. *Если $A_1, A_2 \subset \operatorname{Dom}_4 \varphi$ — два непересекающихся измеримых множества положительной меры, то $|\varphi(A_1) \cap \varphi(A_2)| = 0$.*

Доказательство. Из доказательства леммы 15 можно вывести: если $K_1, K_2 \subset D$ — два компакта положительной меры и $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, то $|\varphi(K_1 \cap \operatorname{Dom}_4 \varphi) \cap \varphi(K_2) \cap \operatorname{Dom}_4 \varphi| = 0$. Действительно, пусть $\{B_i^1\}$ и $\{B_j^2\}$ — конечные покрытия компактов K_1 и K_2 такие, что шары из покрытия 1 находятся на положительном расстоянии от шаров из покрытия 2. Тогда

$$\begin{aligned}|\varphi(K_1 \cap \operatorname{Dom}_4 \varphi) \cap \varphi(K_2 \cap \operatorname{Dom}_4 \varphi)|&\\ \le \sum_{i,j} \bigl|\varphi\bigl(B_i^1 \cap \operatorname{Dom}_4 \varphi\bigr) \cap \varphi\bigl(B_j^2 \cap \operatorname{Dom}_4 \varphi\bigr)\bigr| = 0.\end{aligned}$$

Пусть $A_1, A_2 \subset \operatorname{Dom}_4 \varphi$ — два непересекающихся множества положительной меры. Тогда каждое из них можно исчерпать компактами: $\bigl|A_1 \setminus \bigcup K_i^1\bigr| = 0$ и $\bigl|A_2 \setminus \bigcup K_j^2\bigr| = 0$. В силу того, что отображение φ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина, имеем $\bigl|\varphi\bigl(A_l \setminus \bigcup K_i^l\bigr)\bigr| = 0$, $l = 1, 2$, откуда $|\varphi(A_1) \cap \varphi(A_2)| = 0$. $\square$

Замечание 11. В силу леммы 17 для функции множеств Ψ_Q выполнено обычное свойство аддитивности. Другими словами, для двух открытых непересекающихся множеств A_1 и A_2 верно

$$\begin{aligned}\Psi_Q(A_1 \cup A_2) &= |\varphi(A_1 \cup A_2) \cap Q| = |(\varphi(A_1) \cup \varphi(A_2)) \cap Q|\\ &= |(\varphi(A_1)) \cap Q| + |(\varphi(\varphi(A_2)) \cap Q| - |(\varphi(A_1) \cap \varphi(A_2)) \cap Q|\\ &= |(\varphi(A_1)) \cap Q| + |(\varphi(\varphi(A_2)) \cap Q| = \Psi_Q(A_1) + \Psi_Q(A_2).\end{aligned} \tag{69}$$

Замечание 12. Отображение, для которого выполнено заключение леммы 17, будем называть *почти всюду инъективным.*

Далее покажем, что из образа $\varphi(\operatorname{Dom}_4 \varphi)$ можно удалить множество нулевой меры так, что будет определено обратное отображение φ^{-1}.

Предложение 7. *Отображение φ инъективно вне некоторого множества нулевой меры.*

Доказательство. Пусть $\{z_i\}$ — счетное всюду плотное множество в $\operatorname{Dom}_4 \varphi$. Рассмотрим набор шаров $\{B_{ij} = B(z_i, \rho_j)\}$ с убывающими радиусами ($\rho_j \to 0$ при $j \to \infty$). Получим счетный набор множеств $V_{ij} = B_{ij} \cap \operatorname{Dom}_4 \varphi$. Будем рассматривать только такие наборы индексов i_1, j_1, i_2, j_2, что множества вида $V_{i_1 j_1}$ и $V_{i_2 j_2}$ не пересекаются ($V_{i_1 j_1} \cap V_{i_2 j_2} = \varnothing$). Обозначим $F_{kl} =$

$\varphi(V_{i_k j_k}) \cap \varphi(V_{i_l j_l})$. Поскольку отображение φ является почти всюду инъективным, имеем $|F_{kl}| = 0$. Положим $\Sigma = \bigcup\limits_{kl} F_{kl}$. Тогда $|\Sigma| = 0$ и $|\varphi^{-1}(\Sigma)| = 0$ (последнее в силу того, что φ обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина).

Положим

$$\operatorname{Dom}_5 \varphi = \operatorname{Dom}_4 \varphi \setminus \varphi^{-1}(\Sigma) \tag{70}$$

$(\operatorname{Dom} \varphi^{-1} = \varphi(\operatorname{Dom}_5 \varphi))$, тогда отображение $\varphi : \operatorname{Dom}_5 \varphi \to \operatorname{Dom} \varphi^{-1}$ взаимно однозначно. Действительно, предположим существование таких $x_1, x_2 \in \operatorname{Dom}_5 \varphi$, что $x_1 \neq x_2$, а $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Найдутся два непересекающихся множества положительной меры V_1, V_2, содержащие x_1, x_2 соответственно. С другой стороны, по определению $\operatorname{Dom}_5 \varphi$ получаем $\varphi(V_1 \cap \operatorname{Dom}_5 \varphi) \cap \varphi(V_2 \cap \operatorname{Dom}_5 \varphi) = \varnothing$. Отсюда следует, что $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. □

В силу леммы 17 можем определить функцию Ψ_Q на открытых подмножествах D (аналогично (64)). При этом будет выполнено обычное свойство аддитивности: $\Psi_Q(A_1 \cup A_2) = \Psi_Q(A_1) + \Psi_Q(A_2)$ для таких открытых множеств $A_1, A_2 \subset D$, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Предложение 8. *Пусть отображение $\varphi : D \to D'$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина и является почти всюду инъективным. Тогда для любой суммируемой функции $f : D' \cap Q \to \mathbb{R}$ верна следующая формула замены переменных:*

$$\int\limits_D f \circ \varphi(x) J_{\varphi,Q}(x)\, dx = \int\limits_{D' \cap Q} f(y)\, dy, \tag{71}$$

где $J_{\varphi,Q}(x) = \Psi'_Q(x)$.

Доказательство. Сначала докажем абсолютную непрерывность функции Ψ_Q (см. ниже соотношение (75)).

Для всех $x \in D \setminus \Sigma_0$, где Σ_0 — множество нулевой меры (на котором производная Ψ'_Q не существует или не конечна), имеем следующее: для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\rho_0(x)$ такое, что для всех $\rho < \rho_0(x)$ выполнены неравенства

$$\Psi'_Q(x) - \varepsilon \leq \frac{\Psi_Q(B(x,\rho))}{|B(x,\rho)|} \leq \Psi'_Q(x) + \varepsilon, \tag{72}$$

$$\Psi'_Q(x) - \varepsilon \leq \frac{1}{|B(x,\rho)|} \int\limits_{B(x,\rho)} \Psi'_Q(y)\, dy \leq \Psi'_Q(x) + \varepsilon. \tag{73}$$

Неравенство (72) следует из определения производной функции множеств (предложение 4), а неравенство (73) получаем из теоремы Лебега (см. теорему 3).

Имеем

$$\Psi_Q(B(x,\rho)) \leq |B(x,\rho)| \Psi'_Q(x) + \varepsilon |B(x,\rho)| \leq \int\limits_{B(x,\rho)} \Psi'_Q(y)\, dy + 2\varepsilon |B(x,\rho)| \tag{74}$$

для всех $x \in D \setminus \Sigma_0$ и для всех $\rho < \rho_0(x)$.

Возьмем открытое множество $U \subset D$ конечной меры. Пусть $\mathscr{B}$ — покрытие Витали множества $U \setminus \Sigma_0$ семейством шаров $\{B(x,\rho) \mid x \in U \setminus \Sigma_0,\ 0 < \rho < \rho_0(x)\}$. Из семейства $\mathscr{B}$ можно выделить последовательность попарно не пересекающихся шаров $\{B_j\}$ так, что $\bigl|U \setminus \bigcup\limits_j B_j\bigr| = 0$. Тогда $|U| = \bigl|\bigcup\limits_j B_j\bigr| = \sum\limits_j |B_j|$.

Применяя $\mathscr{N}$-свойство Лузина отображения φ, получаем $\Psi_Q(U) = \Psi_Q\big(\bigcup\limits_j B_j\big) = \sum\limits_j \Psi_Q(B_j)$.

Для каждого шара из $\{B_j\}$ выполнено неравенство (74). Суммируя неравенство (74) по шарам из $\{B_j\}$, имеем

$$\Psi_Q(U) = \sum_j \Psi_Q(B_j) \le \int\limits_{\bigcup\limits_j B_j} \Psi'_Q(y)\,dy + 2\varepsilon \sum_j |B_j| = \int\limits_U \Psi'_Q(y)\,dy + 2\varepsilon|U|.$$

В силу произвольности ε

$$\Psi_Q(U) \le \int\limits_U \Psi'_Q(y)\,dy. \tag{75}$$

Неравенство (75) и обратное к нему неравенство (66) обеспечивают равенство

$$\Psi_Q(U) = \int\limits_U \Psi'_Q(y)\,dy. \tag{76}$$

Обозначим $J_{\varphi,Q}(x) = \Psi'_Q(x)$. Из равенства (76) следует формула замены переменных для ступенчатой функции s:

$$\int\limits_D s\circ\varphi(x) J_{\varphi,Q}(x)\,dx = \int\limits_{D'\cap Q} s(y)\,dy. \tag{77}$$

Далее стандартной процедурой эта формула распространяется на функции $f \in L_1(D'\cap Q)$. $\square$

Замечание 13. Обозначим $Z = \{x \in D\cap\varphi^{-1}(Q) : J_{\varphi,Q}(x) = 0\}$. В соответствии с формулой замены переменных (71) имеем $|\varphi(Z)| = 0$. Поскольку отображение φ обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина, то и $|Z| = 0$.

Далее рассматриваем семейство горизонтальных кривых Γ. Пусть $\gamma \in \Gamma$ являются интегральными кривыми горизонтального поля V. Обозначим символом f_s поток, соответствующий этому полю. Тогда кривая $\gamma \in \Gamma$ имеет вид $\gamma(s) = f_s(p)$, где p принадлежит поверхности S, трансверсальной векторному полю V, а параметр s принадлежит интервалу $I \subset \mathbb{R}$. Семейство Γ снабжено мерой $d\gamma$, которая удовлетворяет неравенству

$$c_0|B|^{\frac{\nu-1}{\nu}} \le \int\limits_{\gamma\in\Gamma,\gamma\cap B(x,r)\ne\varnothing} d\gamma \le c_1|B|^{\frac{\nu-1}{\nu}}$$

для достаточно малых шаров $B = B(x,r) \subset \mathbb{G}$, где константы c_0 и c_1 не зависят от $B(x,r)$. Для семейства, определяемого векторным полем V, мера $d\gamma$ может быть получена как внутреннее произведение $i(V)$ векторного поля V с биинвариантной формой объема dx. Если $\mathscr{J}_{f_s}$ — якобиан потока f_s, то

$$f_s^* i(V)dx = \mathscr{J}_{f_s} i(V)\,dx$$

или

$$f_s^*(\mathscr{J}_{f_{-s}} i(V)dx) = i(V)\,dx.$$

Касательный вектор к однапараметрическому семейству кривых γ_t, проходящих через точку $p\exp tX$, можно идентифицировать с касательным вектором X в точке p. Поток f_s переносит вектор X в $(f_s)_*X$. Следовательно, форма $\mathscr{J}_{f_{-s}} i(V)\,dx$ определяет меру $d\gamma$ на семействе Γ. В случае, когда V является левоинвариантным горизонтальным векторным полем, поток f_s — правый сдвиг на $\exp sV$. Поскольку dx — биинвариантная форма, имеем $\mathscr{J}_{f_s} = 1$. Используя левую инвариантность и однородность растяжения, находим

$$\int\limits_{\gamma\cap B(x,r)\neq\varnothing} d\gamma = c|B(x,r)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}\|V\|,$$

где $\|V\|$ — длина горизонтального касательного вектора V.

Лемма 18. *На почти всех интегральных кривых горизонтальных векторных полей отображение $\varphi : \bigcup\limits_i \widetilde{T}_i \cap \operatorname{Dom}_5\varphi \to D'$ непрерывно вне некоторого множества нулевой* 1*-меры Хаусдорфа.*

Доказательство. Фиксируем горизонтальное поле X_j. Предположим противное: найдется семейство интегральных кривых Γ поля X_j положительной меры такое, что на каждой кривой $\gamma\in\Gamma$ существует множество $s_\gamma\subset\gamma$ положительной 1-меры, на котором отображение $\varphi : \bigcup\limits_i \widetilde{T}_i \cap \operatorname{Dom}_5\varphi \to D'$ не является непрерывным.

Обозначим $S = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} s_\gamma$. Покажем, что S измеримо. Действительно, $S = D\setminus A$, где множество

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\Big\{x\in\bigcup_i \widetilde{T}_i\cap\operatorname{Dom}_5\varphi \mid \\ d(\varphi(x\exp tX_j),\varphi(x)) < \frac{1}{n} \text{ при } |t|<\frac{1}{m},\ \exp tX_j\in\bigcup_i \widetilde{T}_i\cap\operatorname{Dom}_5\varphi\Big\}$$

измеримо, поскольку любое множество в фигурных скобках измеримо. По теореме Фубини $|S|>0$. Аналогично проверяется, что $S = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} S_m$, где $S_m = \big\{x\in s_\gamma \mid \operatorname{osc}_l\varphi(x) > \frac{1}{m}\big\}$ — измеримое множество. Здесь $\operatorname{osc}_l\varphi(x)$ — колебание отображения $\varphi : \gamma\cap\bigcup\limits_i \widetilde{T}_i\cap\operatorname{Dom}_5\varphi\to D'$ в точке x. Следовательно, можно выбрать номер m такой, что $|S_m|>0$. Также найдется номер j такой, что $|S_m\cap\widetilde{T}_j|>0$. Пусть $x_0\in S_m\cap\widetilde{T}_j$ — точка плотности 1. Тогда любой шар $B(x_0,r)$ будет содержать подмножество положительной меры из $S_m\cap\widetilde{T}_j$ (обозначим это множество P_r). В силу непрерывности отображения φ на $\widetilde{T}_j$ можно подобрать шар $B(x_0,r_m)$ таким образом, чтобы $\varphi(B(x_0,r_m)\cap S_m\cap\widetilde{T}_j)\subset B\big(\varphi(x_0),\frac{1}{4m}\big)$.

Фиксируем функцию $\eta\in C_0^\infty(D')$ такую, что $\eta(y)=1$ при $y\in B\big(\varphi(x_0),\frac{1}{4m}\big)$ и $\eta(y)=0$ при $y\notin B(\varphi(x_0),\frac{1}{2m})$. Композиция $\eta\circ\varphi$ принадлежит $L^1_p(D)$. Следовательно, функцию $\eta\circ\varphi$ можно изменить на множестве нулевой меры так, чтобы она была абсолютно непрерывной на почти всех линиях (т. е. чтобы она принадлежала классу ACL). Заметим, что при такой модификации отображение $\varphi : \bigcup\limits_i \widetilde{T}_i\cap\operatorname{Dom}_5\varphi\to D'$ не изменяется, поэтому всегда $\varphi^*\eta(x) = \eta\circ\eta(x)$ для всех $x\in\widetilde{T}_j$.

На основании вышесказанного на каждой горизонтальной кривой, пересекающей P_{r_m} по множеству положительной 1-меры, имеем $\operatorname{osc}_l \eta\circ\varphi(x)=1$, где $x\in P_{r_m}$. По построению множества P_{r_m} совокупность таких кривых имеет положительную меру. Таким образом, пришли к противоречию с абсолютной непрерывностью функции $\eta\circ\varphi$ на почти всех линиях.

Следовательно, на почти всех горизонтальных кривых отображение $\varphi : \bigcup\limits_i \widetilde{T}_i\cap \operatorname{Dom}_5\varphi\to D'$ непрерывно вне некоторого множества нулевой 1-меры. $\square$

Лемма 19. *Пусть $u\in \operatorname{Lip}_l(D')\cap L^1_p(D')$ и $\|u \mid L^1_p(D')\|\le 1$, $p\le\nu$. Тогда*

$$|\nabla_{\mathscr L}(u\circ\varphi)|(x)\le KJ^{\frac1p}_{\varphi,Q}(x) \tag{78}$$

п. в. на $D\cap\varphi^{-1}(Q)$, где K — некоторая постоянная, не зависящая от Q.

Доказательство. Фиксируем точку $y_0\in D'\cap Q$ и шар $B(y_0,r)$ так, что $B(y_0,r)\subset D'\cap Q$. Рассмотрим функцию $\eta(y)=\xi\big(\delta_r\big(y_0^{-1}y\big)\big)$, где $\xi\in C_0^\infty(\mathbb G)$ — функция такая, что $\xi|_{B(0,1)}=1$ и $\xi|_{\mathbb G\setminus B(0,2)}=0$.

Поскольку φ^* является ограниченным оператором, в частности, верно неравенство

$$\big\|\varphi^*(u-u(y_0)) \mid L^1_p(D)\big\|\le\|\varphi^*\|\big\|(u-u(y_0)) \mid L^1_p(D')\big\|.$$

Тогда

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))}|\nabla_{\mathscr L}(u\circ\varphi)|^p(x)\,dx\le\|\varphi^*\|^p\int\limits_{B(y_0,2r)}|\nabla_{\mathscr L}((u-u(y_0))\eta)|^p\,dy$$
$$\le c_0\|\varphi^*\|^p\int\limits_{B(y_0,2r)}|\nabla_{\mathscr L}u|^p\eta^p(y)\,dy+c_0\|\varphi^*\|^p\int\limits_{B(y_0,2r)}|\nabla_{\mathscr L}\eta|^p|u-u(y_0)|^p\,dy$$
$$\le c_0\|\varphi^*\|^p(|B(y_0,2r)|+(c_1r^{-1}c_2r|B(y_0,2r)|))=C\|\varphi^*\|^p|B(y_0,2r)|. \tag{79}$$

Таким образом, приходим к оценке

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(0,r))}|\nabla_{\mathscr L}(u\circ\varphi)|^p(x)\,dx\le C\|\varphi^*\|^p|B(y_0,2r)|. \tag{80}$$

Используя соотношения (71), (80) и замечание 13, в силу которого $J_{\varphi,Q}(x)\neq 0$ на $\varphi^{-1}(B(y_0,r))\setminus Z$, получаем

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))}|\nabla_{\mathscr L}(u\circ\varphi)|^p(x)\,dx=\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))\setminus Z}\frac{|\nabla_{\mathscr L}(u\circ\varphi)|^p(x)J_{\varphi,Q}(x)}{J_{\varphi,Q}(x)}\,dx$$
$$=\int\limits_{B(y_0,r)\cap Q\setminus\varphi(Z)}\bigg(\frac{|\nabla_{\mathscr L}(u\circ\varphi)|^p(x)}{J_{\varphi,Q}(x)}\bigg)_{\varphi(x)=y}dy\le C\|\varphi^*\|^p|B(y_0,2r)|. \tag{81}$$

Дифференцируя (81) по теореме Лебега 3, выводим

$$\frac{|\nabla_{\mathscr L}(u\circ\varphi)|^p(x)}{J_{\varphi,Q}(x)}\bigg|_{\varphi(x)=y}\le C\|\varphi^*\|^p$$

для п. в. $y\in D'\cap Q$. Отсюда имеем

$$|\nabla_{\mathscr L}(u\circ\varphi)|(x)\le KJ^{\frac1p}_{\varphi,Q}(x)\quad\text{для п. в. } x\in D\cap\varphi^{-1}(Q), \tag{82}$$

так как отображение φ инъективно вне некоторого множества нулевой меры (предложение 7) и обладает $\mathscr N^{-1}$-свойством Лузина. $\square$

Лемма 20. *Пусть* $D, D' \subset \mathbb{G}$, $p \in [1,\infty)$ *и* $p \le \nu$. *Если отображение* $\varphi : D \to D'$ *принадлежит классу* IL^1_p, *то* φ *аппроксимативно дифференцируемо п. в. вдоль горизонтальных кривых.*

Доказательство. Так как результат носит локальный характер, можно считать, что D имеет конечную меру.

Фиксируем $k \in \mathbb{N}$ и выбираем шар $Q \subset \mathbb{G}$ так, чтобы $Q \supset \varphi(T_k \cap \operatorname{Dom}_5 \varphi)$.

Пусть $\{z_j\}$ — счетное всюду плотное множество точек в D'. Зададим счетное семейство функций $d^r_{z_j} : D' \to \mathbb{R}^+$, $d^r_{z_j}(y) = (r - d_{z_j}(y))^+$, где $r \in \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ $(d_{z_j}(y) = d(z_j, y))$. Для каждой такой функции выполняется поточечное равенство $\varphi^* d^r_{z_j}(x) = d^r_{z_j} \circ \varphi(x)$, $r \in \mathbb{Q}^+$, $j \in \mathbb{N}$, для всех точек $x \in \widetilde{T}_k$. (В этом доказательстве $\widetilde{T}_k$ — совокупность точек плотности 1 множества $T_k \cap \operatorname{Dom}_5 \varphi$, см. аналогичное рассуждение в доказательстве теоремы 4.)

Кроме того, каждая такая функция удовлетворяет условиям леммы 19. Поэтому $\left|\nabla_{\mathscr{L}}(d^r_{z_j} \circ \varphi)\right|(x) \le C J^{\frac{1}{p}}_{\varphi,Q}(x)$ для почти всех $x \in \operatorname{Dom}_5 \varphi \cap \varphi^{-1}(Q)$.

Рассмотрим слоение Γ_j области D, порожденное горизонтальным векторным полем X_j, и линию γ из этого слоения. Для почти всех кривых γ из слоения Γ_j выполнены следующие условия:

1) φ непрерывно на γ вне некоторого множества σ_γ нулевой 1-меры (лемма 18);

2) выполняется поточечное неравенство для измеримых функций:

$$\left|\nabla_{\mathscr{L}}\left(\varphi^* d^r_{z_j}\right)\right|(t) \le K J^{\frac{1}{p}}_{\varphi,Q}(t), \quad r \in \mathbb{Q}^+,\ j \in \mathbb{N},\ \text{п. в. на } \gamma,$$

и функция $J_{\varphi,Q}$ интегрируема на γ.

3) существует конечный предел отношения $\frac{1}{d(x_0,x)} \int\limits_{[x_0,x]} J^{\frac{1}{p}}_{\varphi,Q}(t)\, d\sigma$ при $x \to x_0$ по кривой γ для п. в. $x_0 \in \gamma$, равный $J^{\frac{1}{p}}_{\varphi,Q}(x_0)$ (здесь $[x_0, x] \subset \gamma$ — отрезок интегральной линии);

4) $\operatorname{Dom}_5 \varphi \cap \gamma$ является множеством полной (1-мерной) меры на $\gamma \cap D$;

5) неравенство (78) верно для всех функций $\left\{d^r_{z_j}\right\}$ одновременно п. в. на γ;

6) функции $\varphi^* d^r_{z_j}$ абсолютно непрерывны на γ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Q}^+$.

Фиксируем кривую $\gamma \in \Gamma_j$, на которой выполняются все шесть условий.

Пусть $x_0 \in \widetilde{T}_k \cap \gamma$ — точка положительной плотности на кривой γ, точка непрерывности ограничения $\varphi|_\gamma$ и точка, в которой выполняется условие 3. Положим $z = \varphi(x_0)$. Фиксируем подпоследовательность $\{z_{j_l}\}$ точек из $\{z_j\}$, сходящаяся к $z = \varphi(x_0)$ (далее будем обозначать элементы этой подпоследовательности как z_l). Так как отображение φ непрерывно на γ в точке x_0, можно подобрать числа δ, r и L такие, что $\varphi(B(x_0,\delta) \cap \gamma \setminus \sigma_\gamma) \subset Q$ и $d^r_{z_l} \circ \varphi(x) \ne 0$ для всех $l \ge L$ и всех точек $x \in B(x_0,\delta) \cap \gamma \setminus \sigma_\gamma$.

Интегрируя функцию $C J^{\frac{1}{p}}_{\varphi,Q}(x)$ (где C не зависит от r, z) по части кривой γ от x_0 до x, где $x \in \widetilde{T}_k \cap B(x_0,\delta) \cap \gamma \setminus \sigma_\gamma$, выводим

$$\begin{aligned} C \int\limits_{[x_0,x]} J^{\frac{1}{p}}_{\varphi,Q}(t)\, dt &\ge \int\limits_{[x_0,x]} \left|\nabla_{\mathscr{L}}\left(\varphi^* d^r_{z_j}\right)\right|(t)\, dt \\ &\ge \left|d^r_{z_l} \circ \varphi(x_0) - d^r_{z_l} \circ \varphi(x)\right| = |r - d_{z_l}(\varphi(x_0)) - r + d_{z_l}(\varphi(x))| \\ &= |-d_{z_l}(\varphi(x_0)) + d_{z_l}(\varphi(x))| \to d_z(\varphi(x)) = d(\varphi(x_0), \varphi(x)) \quad \text{при } l \to \infty. \end{aligned} \tag{83}$$

Таким образом, получаем

$$d(\varphi(x_0), \varphi(x)) \le C_1 \int\limits_{[x_0,x]} J_{\varphi,Q}^{\frac{1}{p}}(x)\, d\sigma \tag{84}$$

или

$$\frac{d(\varphi(x_0), \varphi(x))}{d(x_0, x)} \le \frac{C}{d(x_0, x)} \int\limits_{[x_0,x]} J_{\varphi,Q}^{\frac{1}{p}}(x)\, d\sigma \tag{85}$$

для всех $x \in \widetilde{T}_k \cap B(x_0, \delta) \cap \gamma \setminus \sigma_\gamma$. Переходя к аппроксимативному пределу в неравенстве (85), имеем

$$\operatorname{ap} \varlimsup_{x \to x_0, x \in \gamma} \frac{d(\varphi(x_0), \varphi(x))}{d(x_0, x)} \le C_1 J_{\varphi,Q}^{\frac{1}{p}}(x_0) < \infty, \tag{86}$$

что означает аппроксимативную дифференцируемость отображения φ в точке x_0 вдоль векторного поля X_j.

В силу произвольности выбора горизонтального поля X_j, интегральной кривой $\gamma \in \Gamma_j$ и точки $z_0 \in \gamma$ отображение φ аппроксимативно дифференцируемо п. в. вдоль горизонтальных кривых. □

Замечание 14. Из аппроксимативной дифференцируемости отображения φ п. в. вдоль интегральных линий горизонтальных векторных полей вытекает полная аппроксимативная дифференцируемость [22, теорема 3.3], а следовательно, условие следующего утверждения.

Предложение 9 [21, теорема 3; 22, теорема 3.3]. *Пусть $D \subset \mathbb{G}$ и*

$$\operatorname{ap} \varlimsup_{x \to a} \frac{d(\varphi(a), \varphi(x))}{d(a, x)} < \infty$$

для всех $a \in D$. Тогда множество D представимо в виде счетного объединения $D = \bigcup\limits_i E_i$ так, что $\varphi \in \operatorname{Lip}(E_i)$.

Замечание 15. Каждое множество E_i из предложения 9 содержится в счетном объединение множеств

$$F_{ki} = \left\{ z : d(\varphi(x), \varphi(z)) \ge \frac{1}{k} d(x, z),\ x \in E_i \cap B\left(z, \frac{1}{k}\right) \right\},$$

т. е. $E_i \subset \bigcup\limits_k F_{ki}$ (см. [21]). Тогда множество D можно представить в виде счетного объединения множеств $D = \bigcup\limits_j D_j$ так, что на каждом D_j отображение φ является билипшицевым. Кроме того, можно считать, что множества D_j состоят из точек плотности 1.

С учетом замечания 15 можно считать, что областью определения отображения φ является множество

$$\operatorname{Dom}_6 \varphi = \bigcup_j E_j \cap \operatorname{Dom}_5 \varphi \tag{87}$$

и отображение φ билипшицево на $E_j \cap \operatorname{Dom}_5 \varphi$.

Обозначим символом $D\varphi$ аппроксимативный дифференциал отображения φ, а символом $D_h\varphi$ — горизонтальную часть этого дифференциала.

Лемма 21. *Пусть отображение φ удовлетворяет условиям теоремы 1, а отображение $\psi = \varphi^{-1}$ из доказательства предложения 7. Тогда верны оценки*

$$|D\varphi|(x) < L, \quad |J(x,\varphi)| > \alpha_1 \quad \text{и} \quad |D\psi|(y) < L', \quad |J(y,\psi)| > \alpha \tag{88}$$

для п. в. $x \in D$ и для п. в. $y \in \varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi)$, где $J(x,\varphi) = \det D\varphi(x)$.

Заметим, что $J(x,\varphi) = J_\varphi(x) = \lim\limits_{r\to 0} \frac{|\varphi(B(x,r))|}{|B(x,r)|}$ п. в. в D.

Доказательство. Покажем, что обратное к φ отображение

$$\psi : \varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi) \to \mathrm{Dom}_6\,\varphi$$

индуцирует по правилу композиции оператор $\varphi^{*-1} : L^1_p(D) \to L^1_p(D')$. Пусть $g \in L^1_p(D)$. Тогда найдется функция $f \in L^1_p(D')$ такая, что $g = \varphi^* f$ (лемма 10). С другой стороны, $f \circ \varphi = \varphi^* f$ (на $\mathrm{Dom}_6\,\varphi$) в силу леммы 9. Поэтому $(\psi^* \circ \varphi^*) f_n(y) = f_n \circ \varphi \circ \psi(y) = f_n(y)$ п. в. на D', т. е. $\psi^*(\varphi^* f) = f$ и $\psi^* = \varphi^{*-1}$.

Для липшицевой функции $f \in L^1_p(D')$ имеем $\nabla_{\mathscr L} \varphi^* f = \nabla_{\mathscr L}(f \circ \varphi) = D_h\varphi^T \nabla_{\mathscr L} f$. Подставляя в неравенство (82) липшицевы функции η такие, что $|\nabla_{\mathscr L}\eta|(y) = 1$, и учитывая соотношение

$$K J^{\frac{1}{p}}(x,\varphi) \geq |\nabla_{\mathscr L}(\eta\circ\varphi)|(x) = \big|D_h\varphi^T \nabla_{\mathscr L}\eta\big|(x),$$

получаем оценку нормы оператора

$$|D_h\varphi|^p(x) \leq K_1 J(x,\varphi) \quad \text{п. в. на } D. \tag{89}$$

Аналогично

$$|D_h\psi|^p(y) \leq K_2 J(y,\psi) \quad \text{п. в. на } \varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi). \tag{90}$$

Из неравенства (90) выводим, что

$$CK_2^p \geq \frac{|D_h\psi|^p}{|J(y,\psi)|} = \left(\frac{|D_h\psi|^\nu}{|J(y,\psi)|}\right)^{\frac{p}{\nu}} \frac{1}{|J(y,\psi)|^{1-\frac{p}{\nu}}} \geq \frac{1}{|J(y,\psi)|^{1-\frac{p}{\nu}}}. \tag{91}$$

Следовательно, $|J(y,\psi)| > \alpha$, так что $|J(x,\varphi)| < \beta$. Проводя аналогичные рассуждения, из неравенства (89) получаем $|J(x,\varphi)| > \alpha_1$ и $|J(y,\psi)| < \beta_1$. В итоге

$$|D\varphi|(x) < L, \quad |J(x,\varphi)| > \alpha_1 \quad \text{и} \quad |D\psi|(y) < L', \quad |J(y,\psi)| > \alpha$$

для п. в. $x \in D$ и для п. в. $y \in \varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi)$. $\square$

Лемма 22. *Пусть $p < \nu$, а отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу IL^1_p. Тогда отображение φ совпадает с квазиизометрическим гомеоморфизмом п. в.*

Доказательство. Фиксируем $q > \nu$. Для липшицевой функции f с компактным носителем в D' имеем $f\circ\varphi \in L^1_p(D)$ и $|\nabla_{\mathscr L}(f\circ\varphi)|(x) \leq |\nabla_{\mathscr L} f||D_h\varphi|(x)$. Отсюда с учетом (88) и формулы замены переменных (71) получим следующую цепочку неравенств:

$$\int\limits_D |\nabla_{\mathscr L} f\circ\varphi|^q(x)\,dx \leq C\int\limits_D |\nabla_{\mathscr L} f|^q(\varphi(x))|D\varphi|^q(x)\,dx \leq CL^q \int\limits_D |\nabla_{\mathscr L} f|^q(\varphi(x))\,dx$$
$$\leq \frac{L^qC}{\alpha}\int\limits_D |\nabla_{\mathscr L} f|^q(\varphi(x))|J(x,\varphi)|\,dx = \widetilde{C}\int\limits_{\varphi(D)} |\nabla_{\mathscr L} f|^q(y)\,dy. \tag{92}$$

Таким образом, $\|f \circ \varphi \mid L^1_q(D)\| \le C\|f \mid L^1_q(D')\|$ для $q > \nu$. Следовательно, выполнено условие (2) леммы 13.

Пусть g — липшицева функция в D с компактным носителем. По лемме 10 найдется $f \in L^1_p(D')$ такая, что $g = f \circ \varphi$. Далее,

$$\nabla_{\mathscr{L}} g(x) = D_h\varphi^T(x)\nabla_{\mathscr{L}} f(\varphi(x)),$$

следовательно,

$$\nabla_{\mathscr{L}} f(\varphi(x)) = (D_h\varphi^T)^{-1}(x)\nabla_{\mathscr{L}} g(x).$$

Поскольку $|(D_h\varphi^T)^{-1}| = |(D_h\varphi)^{-1}| < L$, то $f \in L^1_q(D')$ и

$$\|f \mid L^1_q(D')\| \le C'\|f \circ \varphi \mid L^1_q(D)\|.$$

В силу последних неравенств выполнено условие $(2')$ из леммы 13 (в котором вместо p надо рассматривать $q > \nu$).

Кроме того, выполнено условие (1) леммы 13, где в качестве множества T выбираем T_k.

Из лемм 13 и 11 выводим, что отображение φ совпадает с квазиизометрическим гомеоморфизмом п. в. $\square$

5.3. Доказательство теоремы 1. Приведем доказательство основного результата данной работы.

Доказательство теоремы 1. Достаточность. Можно считать, что отображение $\varphi : D \to D'$ обладает $\mathscr{N}$-свойством и $\mathscr{N}^{-1}$- свойством Лузина и является локально билипшицевым отображением.

Для произвольной функции $f \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$ композиция $f \circ \varphi$ абсолютно непрерывна на почти всех интегральных линиях горизонтальных векторных полей в силу того, что $f \circ \varphi$ — локально липшицева функция. Более того, $\nabla_{\mathscr{L}}(f \circ \varphi) = D_h\varphi^T(x)\nabla_{\mathscr{L}} f(\varphi(x))$ [36, с. 263], где $D_h\varphi(x) = \{X_i\varphi_j(x)\}$, $i, j = 1, \dots, n_1$, — горизонтальная часть $\mathscr{P}$-дифференциала. Отсюда

$$\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}}(f \circ \varphi)|^p\,dx = \int\limits_D |D_h\varphi^T(x)\nabla_{\mathscr{L}} f(\varphi(x))|^p\,dx$$
$$\le \int\limits_D |D_h\varphi^T(x)|^p|\nabla_{\mathscr{L}} f(\varphi(x))|^p\,dx \le M^p \int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}} f|^p(\varphi(x))\,dx$$
$$= M^p \int\limits_{D'} \frac{|\nabla_{\mathscr{L}} f|^p(y)}{J(\varphi^{-1}(y), \varphi)}\,dy \le \frac{M^p}{\alpha}\int\limits_{D'} |\nabla_{\mathscr{L}} f|^p(y)\,dy,$$

где во втором и третьем неравенствах использовано свойство квазиизометрии (41), а во втором равенстве применена формула замены переменных (71). В силу леммы 6 полученное неравенство выполняется для всех функций $f \in L^1_p(D')$, т. е.

$$\|\varphi^*(f) \mid L^1_p(D)\| \le K_1\|f \mid L^1_p(D')\|. \tag{93}$$

Отображение $\psi = \varphi^{-1}$ также является квазиизометрией. Тогда для $g \in L^1_p(D)$

$$\|\psi^*(g) \mid L^1_p(D')\| \le K_2\|g \mid L^1_p(D)\|. \tag{94}$$

Заметим, что для $f \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$ верно $\psi^*(f \circ \varphi) = f$. Следовательно, неравенство (94) принимает вид $K_2^{-1}\|f \mid L^1_p(D')\| \le \|\varphi^*(f) \mid L^1_p(D)\|$. Таким образом,

$$K^{-1}\|f \mid L^1_p(D')\| \le \|\varphi^*(f) \mid L^1_p(D)\| \le K\|f \mid L^1_p(D')\|,$$

где постоянная K зависит только от свойств отображения φ.

Покажем, что образ $\varphi^*\big(L^1_p(D')\cap C^\infty(D')\big)$ всюду плотен в $L^1_p(D)$. Пусть $g\in L^1_p(D)$. Найдется последовательность $g_n\in L^1_p(D)\cap C^\infty(D)$ такая, что $\big\|g-g_n\mid L^1_p(D)\big\|\to 0$. С другой стороны, в силу двусторонней оценки $g_n\circ\varphi^{-1}\in L^1_p(D')$. Следовательно, найдется последовательность $f_{nk}\in L^1_p(D')\cap C^\infty(D')$ такая, что $\big\|g_n\circ\varphi^{-1}-f_{nk}\mid L^1_p(D')\big\|\to 0$ при $k\to\infty$. Тогда для некоторой последовательности натуральных чисел l_n имеем $\varphi^*f_{nl_n}\in\varphi^*\big(L^1_p(D')\cap C^\infty(D')\big)$ и $\big\|g-\varphi^*f_{nl_n}\mid L^1_p(D)\big\|\to 0$ при $n\to\infty$.

Необходимость. Существование квазиизометрии Φ доказано в теореме 4 (для случая $p>\nu$) и в лемме 22 (для случая $p<\nu$). На основании доказанного выше оператор композиции $\Phi^*: L^1_p(\Phi(D))\to L^1_p(D)$ изоморфен. Отсюда имеем изоморфизм $\varphi^{*-1}\circ\Phi^*: L^1_p(\Phi(D))\to L^1_p(D')$ такой, что $\varphi^{*-1}\circ\Phi^*(f)(x)=f(x)$ для всех точек $x\in\Phi(D))\cap D'$, где $f\in L^1_p(\Phi(D))$ — произвольная функция. Аналогично доказанному в [19, теорема 3.1; 20, предложение 6.10] можно получить следующие свойства:

1) $|\Phi(D)\Delta D'|=0$;

2) для любого шара $B\subset D'$ множество $B\setminus\Phi(D)\Delta D'$ связное.

Докажем, что в этих условиях оператор ограничения $r: L^1_p(D')\to L^1_p(\Phi(D)\cap D')$ — изоморфизм. Если это не так, то существует ненулевая функция $f\in L^1_p(D')$ такая, что $f\equiv 0$ на $\Phi(D)\cap D'$. В силу свойств 1 и 2 эта функция — тождественный нуль на D', поскольку $\nabla_{\mathscr{L}}f=0$ п. в. в D', а дополнение $D'\setminus\Phi(D)\Delta D'$ — локально связное множество. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* О некоторых группах преобразований n-мерного пространства // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32, № 6. С. 380–382.
2. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 10. С. 3–32.
3. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Структурные изоморфизмы пространств W^1_n и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 224–246.
4. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
5. *Nakai M.* Algebraic criterion on quasiconformal equivalence of Riemann surfaces // Nagoya Math. J. 1960. V. 16. P. 157–184.
6. *Lewis L. G.* Quasiconformal mappings and Royden algebras in space // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 158, N 2. P. 481–492.
7. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Функциональные характеристики квазиизометрических отображений // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 4. С. 768–773.
8. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Новый функциональный инвариант для квазиконформных отображений // Некоторые вопросы современной теории функций: Мат. конф. Новосибирск, 1976. С. 18–20.
9. *Водопьянов С. К.* Отображения однородных групп и вложения функциональных пространств // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 25–41.
10. *Гольдштейн В. М., Романов А. С.* Об отображениях, сохраняющих пространства Соболева // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 3. С. 55–61.
11. *Романов А. С.* О замене переменной в пространствах потенциалов Бесселя и Рисса // Функциональный анализ и математическая физика. Новосибирск: Ин-т математики, 1985. С. 117–133.
12. *Водопьянов С. К.* L_p-теория потенциала и квазиконформные отображения на однородных группах // Современные проблемы геометрии и анализа. Новосибирск: Наука, 1989. С. 45–89.
13. *Vodop'yanov S. K.* Composition operators on Sobolev spaces // Contemp. Math. 2005. V. 382. P. 327–342.

14. *Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.* Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986.
15. *Bourdaud G., Sickel G.* Changes of variable in Besov spaces // Math. Nachr. 1999. V. 198. P. 19–39.
16. *Koch H., Koskela P., Saksman E., Soto T.* Bounded compositions on scaling invariant Besov spaces // J. Funct. Anal. 2014. V. 266, N 5. P. 2765–2788.
17. *Koskela P., Yang D., Zhou Y.* Pointwise characterizations of Besov and Triebel–Lizorkin spaces and quasiconformal mappings // Adv. Math. 2011. V. 226, N 4. P. 3579–3621.
18. *Евсеев Н. А., Водопьянов С. К.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и метрические свойства отображений // Докл. АН. 2014. (в печати).
19. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Критерий устранимости множеств для пространств L^1_p квазиконформных и квазиизометрических отображений // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 1. С. 48–68.
20. *Водопьянов С. К., Черников В. М.* Пространства Соболева и гипоэллиптические уравнения // Тр. Ин-та математики РАН. Новосибирск: СО РАН, 1995. Т. 29. С. 3–64.
21. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Аппроксимативно дифференцируемые преобразования и замена переменных на нильпотентных группах // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 1. С. 70–89.
22. *Vodopyanov S. K.* $\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Тр. по анализу и геометрии под ред. С. К. Водопьянова. 2000. P. 603–670.
23. *Водопьянов С. К.* О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 6. С. 67–86.
24. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Операторы суперпозиции в пространствах Соболева // Изв. вузов. 2002. № 10. С. 11–33.
25. *Vodop'yanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev Spaces. I // Sib. Adv. Math. 2004. V. 14, N 4. P. 78–125.
26. *Евсеев Н. А., Водопьянов С. К.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиконформные отображения // Изв. вузов. Математика. 2014. (в печати).
27. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous group. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
28. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
29. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symmétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 129. P. 1–60.
30. *Folland G. B.* Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups // Ark. Math. 1975. V. 13, N 2. P. 161–207.
31. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
32. *Dairbekov N. S.* Mappings with bounded distortion of two-step Carnot groups // Proc. Anal. Geom. Novosibirsk: Sobolev Inst. Math., 2000. P. 122–155.
33. *Jerison D.* The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition // Duke Math. J. 1986. V. 53, N 2. P. 503–523.
34. *Isangulova D. V., Vodopyanov S. K.* Coercive estimates and integral representation formulas on Carnot groups // Eurasian Math. J. 2010. V. 1, N 3. P. 58–96.
35. *Isangulova D. V., Vodopyanov S. K.* Sharp geometric rigidity of isometries on Heisenberg groups // Math. Ann. 2012. V. 355, N 4. P. 1301–1329.
36. *Vodopyanov S. K.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry: Contemp. Math. 2007. V. 424. P. 249–301.

Статья поступила 20 декабря 2013 г.

Водопьянов Сергей Константинович, Евсеев Никита Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`vodopis@math.nsc.ru`, `nikita@phys.nsu.ru`