Сибирский математический журнал
Июль—август, 2014. Том 55, № 4

УДК 517.9

ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Р. К. Романовский, Е. М. Назарук

Аннотация. Для линейной системы ФДУ запаздывающего типа получен прямым методом Ляпунова критерий экспоненциальной устойчивости в H^1-топологии в терминах операторных неравенств. В автономном случае в качестве следствия получено достаточное условие экспоненциальной устойчивости в терминах матрицы, задающей интеграл Стилтьеса. Приведены иллюстрирующие примеры.

Ключевые слова: сведение к разностному уравнению в пространстве Соболева, матричная реализация операторов в $\mathrm{H}^1(0,1)$, устойчивость в H^1-топологии, функционал Ляпунова.

§ 1. Постановка задачи. Схема решения

Работа является продолжением исследований по прямому методу Ляпунова для систем с распределенными параметрами, выполненных в последние годы группой сотрудников и аспирантов Омского технического университета [1–14]. Рассматривается задача Коши для линейной системы ФДУ запаздывающего типа

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \int\limits_0^1 [d_s T(s,t)]x(t-s) & (t \geq 1), \\ x|_{[0,1]} = \varphi \in E = \mathrm{H}^1((0,1) \to \mathbb{C}^N). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь

$$T : [0,1] \times [1,\infty) \to \mathbb{C}^{N\times N},\ \bigvee_{S=0}^{1}[T] < \infty,\ T \in C \text{ по } t,\ |T| \leq \mathrm{const},\ T(0,t) = 0. \tag{2}$$

Имеет место однозначная разрешимость задачи Коши (1) в классе функций $x : [0,1] \to \mathbb{C}^N$, принадлежащих пространству Соболева H^1 на каждом отрезке полуоси $[0,\infty)$; класс таких функций далее обозначается через $\mathscr{H}^1$. В автономном случае это следует из результатов в [15, гл. 2] (см. также обзор [16]), в случае (1) является следствием выполняемых далее построений (лемма 3). Близкий результат ранее доказан в [17, гл. 1].

В [3] из указанного цикла развит вариант прямого метода Ляпунова для подкласса систем (1) — линейных дифференциально-разностных систем запаздывающего типа. Построен класс функционалов Ляпунова, позволяющий эффективно вычислять производную вдоль траекторий системы. Получен достаточный признак слабой экспоненциальной устойчивости в C-топологии в терминах матричных неравенств (термин «слабая» означает, что скорость экспоненциального убывания зависит от начального возмущения). В случае почти периодических коэффициентов условие на производную функционала Ляпунова вдоль траекторий системы ослаблено. В [4] эти результаты распространены на линейные системы нейтрального типа, в [2, 5] — на нелинейные системы ФДУ обоих типов (в этом случае речь идет об асимптотической устойчивости). В [18, 19] развит подход к анализу устойчивости решений нелинейных неавтономных систем ФДУ нейтрального типа, связанный с применением метода предельных уравнений, предельных функционалов Ляпунова [20]. В [21] построен класс функционалов Ляпунова для автономных систем (1); этот результат получил развитие в [17], где функционалы Ляпунова для таких систем строятся как решения функционального уравнения, представляющего собой аналог матричного уравнения Ляпунова для системы $\dot{x} = Ax$.

Данная работа посвящена анализу устойчивости решений задачи Коши (1) в H^1-топологии. Подход состоит в сведении системы (1) с непрерывным временем к эквивалентной (в указанном выше классе функций $\mathscr{H}^1$) системе с дискретным временем в фазовом пространстве $E = \mathrm{H}^1(0,1)$ и последующем применении варианта метода функционалов Ляпунова. Построения ведутся в базисе, учитывающем специфику пространства E и согласованном с выбранной в E метрикой.

Укажем основные опорные пункты выполняемых построений.

1^0. Функции $\varphi \in E$ *абсолютно непрерывны*, в частности, однозначно определяются данными $\dot{\varphi}(t)$, $\varphi(0)$. Далее $\varphi \in E$ отождествляется с соответствующей парой:

$$\varphi \sim \begin{bmatrix} \widehat{\varphi} \\ \varphi_0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\varphi} = \dot{\varphi} \in \mathrm{H}^0 = L_2((0,1) \to \mathbb{C}^N), \quad \varphi_0 = \varphi(0). \tag{3}$$

Рассматриваемые операторы $E \to E$ представляются в «базисе» (3) операторными матрицами второго порядка. Скалярное произведение в E определяется формулой

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int\limits_0^1 \widehat{\psi}^* \widehat{\varphi}\, dt + \psi_0^* \varphi_0. \tag{4}$$

Проверяется, что ассоциированная с (4) норма

$$\|\varphi\|^2 = \int\limits_0^1 |\widehat{\varphi}|^2\, dt + |\varphi_0|^2 \tag{5}$$

эквивалентна стандартной норме в E. Здесь и далее $|\cdot|$ — эрмитова норма в $\mathbb{C}^N$, так же обозначается согласованная с ней матричная норма; далее $\operatorname{End} E$ — множество линейных непрерывных операторов $E \to E$.

2^0. Показано, что задача Коши (1) с матрицей (2) эквивалентна разностной задаче Коши в E вида

$$z_n = \Lambda_n z_{n-1} \ (n \in \mathbb{Z}^+), \quad z_0 = \varphi \in E, \tag{6}$$

где Λ_n — операторная матрица из $\operatorname{End} E$, φ — вектор (3),

$$z_n = \begin{bmatrix} \dot{x}_n(t) \\ x_n(0) \end{bmatrix}, \quad x_n(t) = x(t+n), \quad t \in [0,1]. \tag{7}$$

3^0. Будем называть решение $x = 0$ уравнения (1) *экспоненциально устойчивым в* H^1*-топологии,* если это свойство имеет место для решения $z_n = 0$

разностного уравнения (6): для решений задачи Коши (6) при любой $\varphi \in E$ имеет место при некоторых $\mu, \nu > 0$ оценка

$$\|z_n\| \le \mu e^{-\nu(n-m)}\|z_m\| \quad (n \ge m \ge 0), \tag{8}$$

где $\|\cdot\|$ — норма (5). Зафиксируем произвольно операторную матрицу-функцию $V_n : \mathbb{Z}^+ \to \operatorname{End} E$ со свойствами

$$V_n^* = V_n, \quad \alpha_1 I_E \le V_n \le \alpha_2 I_E \quad (\alpha_k = \mathrm{const} > 0). \tag{9}$$

Здесь I_E — единица в $\operatorname{End} E$; операция сопряжения и операторные неравенства в $\operatorname{End} E$ здесь и далее понимаются в метрике (4). Поставим в соответствие матрице V_n эрмитову форму

$$\upsilon(\varphi, n) = \langle V_n\varphi, \varphi\rangle, \quad \varphi \in E. \tag{10}$$

Разностная производная $\upsilon(z_n, n) - \upsilon(z_{n-1}, n-1)$ формы (10) вдоль траекторий системы (6) после подстановки $z_n = \Lambda_n z_{n-1}$ и замены $z_{n-1} \sim \varphi$ принимает вид

$$\dot\upsilon(\varphi, n) = \langle W_n\varphi, \varphi\rangle, \quad W_n = \Lambda_n^* V_n \Lambda_n - V_{n-1}. \tag{11}$$

Доказан критерий экспоненциальной устойчивости в H^1-топологии в терминах пары $\{V_n, W_n\}$. В качестве следствия в автономном случае $T = T(s)$ получено достаточное условие экспоненциальной устойчивости в терминах матрицы T. Приведены иллюстрирующие примеры.

4^0. В построениях существенно используются следующие два свойства интеграла Стилтьеса (приводим их для удобства ссылок).

(I) Если $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ имеют ограниченное изменение на $[a,b]$ и $f \in C[a,b]$, то существует интеграл $\int_a^b g\,df$ и при этом $\int_a^b f\,dg = fg\big|_a^b - \int_a^b g\,df$ [22, добавление I, п. XXIV].

(II) Если f абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и существует интеграл $\int_a^b g\,df$, то $\int_a^b g\,df = \int_a^b g f'\,dt$ [23, гл. VI, § 6, п. 2].

Эти утверждения без труда переносятся на векторно-матричный случай.

§ 2. Подготовительные леммы

Лемма 1. *Норма* (5) *в* E *эквивалентна стандартной норме*

$$\|\varphi\|^2_{\text{ст.}} = \int_0^1 (|\varphi|^2 + |\dot\varphi|^2)\,dt.$$

Доказательство. При $t \in [0,1]$ имеем

$$|\varphi(t) - \varphi_0| = \left|\int_0^t \dot\varphi\,d\tau\right| \le \sqrt{\int_0^t |\dot\varphi|^2\,d\tau}\sqrt{\int_0^t d\tau} \le \sqrt{\int_0^1 |\dot\varphi|^2\,d\tau}. \tag{12}$$

Из (5), (12) с учетом неравенства $|\varphi_0|^2 \le (|\varphi(t)| + |\varphi(t) - \varphi_0|)^2 \le 2(|\varphi(t)|^2 + |\varphi(t) - \varphi_0|^2)$ следует, что $\|\varphi\|^2 \le 3\left(|\varphi(t)|^2 + \int_0^1 |\dot\varphi|^2 d\tau\right)$, $t \in [0,1]$. Интегрируя это неравенство по [0,1], получим

$$\|\varphi\| \le \sqrt{3}\|\varphi\|_{\text{ст.}}.$$

Далее,

$$\|\varphi\|_{\text{ст.}} \leq \|\varphi - \varphi_0\|_{\text{ст.}} + \|\varphi_0\|_{\text{ст.}} = \sqrt{\int\limits_0^1 \big(|\varphi - \varphi_0|^2 + |\dot\varphi|^2\big) d\tau} + |\varphi_0|.$$

Отсюда с учетом оценки (12) вытекает, что

$$\|\varphi\|_{\text{ст.}} \leq \sqrt{2\int\limits_0^1 |\dot\varphi|^2 d\tau} + |\varphi_0| \leq 2\|\varphi\|.$$

Лемма доказана.

Подставляя в (1) $x = x(t+n)$, $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{Z}^+$, и представляя интеграл в правой части в виде суммы интегралов по $[0,t]$, $[t,1]$, получим

$$\dot x_n(t) = \int\limits_0^t [d_s T(s,t)] x_n(t-s) + \int\limits_t^1 [d_s T(s,t)] x_{n-1}(1+t-s), \tag{13}$$

где x_n — функция (7). Очевидно, что функция $x : [0,\infty) \to \mathbb{C}^N$ является решением класса $\mathscr{H}^1$ уравнения (1) точно тогда, когда все x_n принадлежат E, удовлетворяют (13) и условию согласования

$$x_n(0) = x_{n-1}(1), \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{14}$$

Запишем систему уравнений (13), (14) для функций $x_n \in E$ в «базисе» (3). Применяя с учетом абсолютной непрерывности x_n к интегралам (13) последовательно векторно-матричные аналоги утверждений (I), (II) в § 1 и выполняя в полученных интегралах замены $s \sim t-s$, $s \sim 1+t-s$, после простых вычислений с использованием соотношений

$$\varphi(t) = -\int\limits_t^1 \dot\varphi(s)\,ds + \varphi(1), \quad \varphi(1) = \int\limits_0^1 \dot\varphi(s)\,ds + \varphi_0 \quad (\varphi \in E)$$

получим, что система (13), (14) в классе $\{x_n \in E\}$ в базисе (3) имеет вид

$$\begin{bmatrix} I - A_n & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} z_n = \begin{bmatrix} \Gamma_n P - B_n & \Gamma_n \\ P & I \end{bmatrix} z_{n-1}, \tag{15}$$

где z_n — вектор (7), I — единица в $\mathbb{C}^N$, операторы $A_n, B_n, P, \Gamma_n : \mathrm{H}^0 \to \mathrm{H}^0$ даются формулами

$$A_n\widehat\varphi = \int\limits_0^t T(t-s,\, t+n)\widehat\varphi(s)\,ds, \quad B_n\widehat\varphi = \int\limits_t^1 [T(1,t+n) - T(1+t-s, t+n)]\widehat\varphi(s)\,ds,$$

$$P\widehat\varphi = \int\limits_0^1 \widehat\varphi(s)\,ds, \quad \Gamma_n\widehat\varphi = T(1,t+n)\widehat\varphi(t). \tag{16}$$

Лемма 2. *Оператор* $I - A_n$ *имеет равномерно по* n *ограниченный обратный* $\mathrm{H}^0 \to \mathrm{H}^0$.

Доказательство. Достаточно доказать оценку

$$\left|A_n^m \psi\right| \le \frac{c^m t^{m-\frac{1}{2}}}{(m-1)!}\|\psi\|_{\mathrm{H}^0} \quad (\psi \in \mathrm{H}^0,\ t \in [0,1],\ m \in \mathbb{Z}^+), \tag{17}$$

где $c = \sup|T|$. При $m = 1$ имеем

$$|A_n \psi| \le \sqrt{\int_0^t |T(t-s, t+n)|^2\, ds}\ \|\psi\|_{\mathrm{H}^0} \le ct^{\frac{1}{2}}\, \|\psi\|_{\mathrm{H}^0}.$$

Предполагая оценку (17) верной с заменой m на $m-1$, получим

$$\left|A_n^m \psi\right| \le c\int_0^t \left|A_n^{m-1}\psi\right| ds \le \frac{c^m}{(m-2)!}\int_0^t s^{m-\frac{3}{2}}\, ds\, \|\psi\|_{\mathrm{H}^0} = \frac{c^m t^{m-\frac{1}{2}}}{(m-2)!(m-\frac{1}{2})}\, \|\psi\|_{\mathrm{H}^0},$$

откуда следует (17). Лемма доказана.

Из леммы 2 и уравнения (15) для функций (7) вытекает

Лемма 3. *Задача Коши* (1) *в классе функций* $x \in \mathscr{H}^1$ *эквивалентна разностной задаче Коши* (6), *где* z_n — *вектор* (7), Λ_n — *матрица*

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} (I - A_n)^{-1}(\Gamma_n P - B_n) & (I - A_n)^{-1}\Gamma_n \\ P & I \end{bmatrix} \tag{18}$$

с операторами (16). *Тем самым, в частности, задача Коши* (1) *однозначно разрешима в классе* $\mathscr{H}^1$.

Отметим, что из леммы 2 и вытекающей из требования $|T| \le \mathrm{const}$ равномерной по n ограниченности операторов (16) следует равномерная по n ограниченность оператора (18) в E. Ввиду этого из (6) получаем оценку

$$\|x_n\| \le c^n \|x_0\|, \quad n \ge 1,\ c = \sup\|\Lambda_n\|,$$

где x_n — последовательность функций (7), $\|\cdot\|$ — норма (5).

Пусть операторная матрица имеет вид

$$\mathscr{F} = \begin{bmatrix} F & F_1 \\ PF_2 & F_0 \end{bmatrix}, \quad F,\, F_1,\, F_2 \in \mathrm{End}\ \mathrm{H}^0,\ F_0 \in \mathbb{C}^{N\times N}. \tag{19}$$

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$\mathscr{F}^* = \begin{bmatrix} F^* & F_2^* \\ PF_1^* & F_0^* \end{bmatrix}.$$

В частности, $\mathscr{F}^* = \mathscr{F} \Leftrightarrow F^* = F,\ F_0^* = F_0,\ F_1^* = F_2$.

Доказательство. В силу определения (4) при $\varphi, \psi \in E$

$$\langle \mathscr{F}\varphi, \psi\rangle = (F\widehat{\varphi} + F_1\varphi_0, \widehat{\psi})_{\mathrm{H}^0} + (PF_2\widehat{\varphi} + F_0\varphi_0, \psi_0)_{\mathbb{C}^N},$$

откуда с учетом очевидных равенств

$$(\varphi_0, F_1^*\widehat{\psi})_{\mathrm{H}^0} = (\varphi_0, PF_1^*\widehat{\psi})_{\mathbb{C}^N}, \quad (PF_2\widehat{\varphi}, \psi_0)_{\mathbb{C}^N} = (F_2\widehat{\varphi}, \psi_0)_{\mathrm{H}^0}$$

следует, что

$$\langle \mathscr{F}\varphi, \psi\rangle = (\widehat{\varphi}, F^*\widehat{\psi} + F_2^*\psi_0)_{\mathrm{H}^0} + (\varphi_0, PF_1^*\widehat{\psi} + F_0^*\psi_0)_{\mathbb{C}^N}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $\mathscr{F}^* = \mathscr{F}$, $F_0 > 0$ *и оператор*

$$\Delta = F - F_1 F_0^{-1} F_1^* \tag{20}$$

равномерно положителен: $\Delta \geq \delta I$ *при некотором* $\delta > 0$. *Тогда оператор* (19) *равномерно положителен: при некотором* $\varepsilon > 0$

$$\mathscr{F} \geq \varepsilon I_E, \quad I_E = \operatorname{diag}(I, I).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что $F_\varepsilon = F_0 - \varepsilon I > 0$. Имеет место равенство

$$\mathscr{F} - \varepsilon I_E = \operatorname{diag}(\Delta_\varepsilon, 0) + Z_\varepsilon \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{I} \\ \mathrm{P} & \mathrm{I} \end{bmatrix} Z_\varepsilon^*, \tag{21}$$

где $\Delta_\varepsilon = F - \varepsilon I - F_1 F_\varepsilon^{-1} F_1^*$, $Z_\varepsilon = \operatorname{diag}\big(F_1 F_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}, F_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\big)$, $F_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ — эрмитово-положительный корень из F_ε. Легко получить, что

$$\Delta_\varepsilon = \Delta - \varepsilon\big[I + F_1 F_0^{-2}\big(I - \varepsilon F_0^{-1}\big)^{-1} F_1^*\big].$$

Отсюда следует, что $\Delta_\varepsilon \geq \Delta - \delta I \geq 0$ при достаточно малом ε. Вычисления с учетом определения (16) оператора P дают, что при $\varphi = (\widehat{\varphi}, \varphi_0)^T \in E$

$$\left\langle \begin{bmatrix} I & I \\ P & I \end{bmatrix} \varphi, \varphi \right\rangle = \int_0^1 (|\widehat{\varphi}|^2 + 2\mathrm{Re}\widehat{\varphi}^* \varphi_0 + |\varphi_0|^2)\, dt \geq \int_0^1 (|\widehat{\varphi}| - |\varphi_0|)^2 dt \geq 0.$$

Тем самым при достаточном малом $\varepsilon > 0$ оба слагаемых в правой части (21) эрмитово-неотрицательны. Лемма доказана.

§ 3. Признаки устойчивости

В силу принятого в § 1 определения экспоненциальная устойчивость решения $x = 0$ уравнения (1) означает с учетом леммы 3 выполнение оценки (8) для решений (7) разностной задачи Коши (6), где Λ_n — матрица (18).

Обозначим через J класс операторных матриц $V_n : \mathbb{Z}^+ \to \operatorname{End} E$, удовлетворяющих требованиям (9).

Теорема 1. *Для того чтобы решение* $x = 0$ *уравнения* (1) *было экспоненциально устойчиво в* H^1*-топологии, необходимо и достаточно существование матрицы* $V_n \in J$ *такой, что матрица* W_n *эрмитовой формы* (11) *равномерно отрицательна:*

$$W_n \leq -\alpha I_E \quad (\alpha = \mathrm{const} > 0). \tag{22}$$

Доказательство. I. Пусть при некоторой $V_n \in J$ имеет место оценка (22). Без ограничения общности можно считать $\alpha < \alpha_2$, где α_2 — константа (9) для матрицы V_n. Обозначим $\upsilon_n = \upsilon(z_n, n)$, где z_n — решение задачи Коши (6), υ — форма (10). Из (22) и правой оценки (9) вытекают неравенства

$$\upsilon_n - \upsilon_{n-1} \leq -\alpha \|z_{n-1}\|^2, \quad \upsilon_{n-1} \leq \alpha_2 \|z_{n-1}\|^2.$$

Следовательно, $\upsilon_n \leq q\upsilon_{n-1}$, $q = 1 - \frac{\alpha}{\alpha_2} \in (0, 1)$. С учетом обеих оценок (9) при $0 \leq m \leq n$ имеем

$$\alpha_1 \|z_n\|^2 \leq \upsilon_n \leq q^{n-m} \upsilon_m \leq \alpha_2 q^{n-m} \|z_m\|^2.$$

Отсюда вытекает оценка (8) при $\mu = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$, $\nu = \frac{1}{2}\ln q^{-1}$.

II. Пусть для решений задачи Коши (6) имеет место оценка (8). При фиксированном $n \in \mathbb{Z}^+$ и любом $k \geq n$

$$z_k = U_{k,n} z_n, \quad U_{k,n} = \begin{cases} \Lambda_k \Lambda_{k-1} \dots \Lambda_{n+1}, & k > n, \\ I_E, & k = n, \end{cases}$$

где Λ_n — матрица (18). Из (8) следует оценка

$$\|U_{k,n}\| \leq \mu e^{-\nu(k-n)}. \tag{23}$$

Построим матрицу

$$V_n = \sum_{k=n}^{\infty} U_{k,n}^* U_{k,n}. \tag{24}$$

Из (23) вытекают равномерная по n сходимость ряда (24) и с учетом $U_{n,n} = I_E$ оценки

$$I_E \leq V_n \leq \mu^2 (1 - e^{-2\nu})^{-1} I_E.$$

Тем самым $V_n \in J$. Имеем

$$\Lambda_n^* V_n \Lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} U_{k,n-1}^* U_{k,n-1} = V_{n-1} - I_E,$$

откуда следует $W_n = \Lambda_n^* V_n \Lambda_n - V_{n-1} = -I_E$. Теорема доказана.

Замечание. Из оценки (8) для решения $x \in \mathscr{H}^1$ задачи Коши (1), в частности, получаем оценку

$$|x(t)| \leq \tilde{\mu} e^{-\nu t} \|\varphi\| \quad (t \geq 1, \ \tilde{\mu} > 0). \tag{25}$$

В самом деле, для функции $x_n(t) = x(t+n)$, $t \in [0;1]$, $n \in \mathbb{Z}^+$, с помощью неравенства (12) для $\varphi \in E$ легко получить, что

$$|x_n(t)|^2 \leq 2\left(\int_0^1 |\dot{x}_n|^2 \, ds + |x_n(0)|^2 \right) = 2\|z_n\|^2,$$

тем самым $|x(t)|^2 \leq 2\|z_{[t]}\|^2$ при $t \geq 1$, где $[t]$ — целая часть t. Отсюда с учетом (8) следует оценка (25) при $\tilde{\mu} = \mu\sqrt{2}e^{\nu}$.

В автономном случае $T = T(s)$ уравнение (6) имеет вид

$$z_n = \Lambda z_{n-1}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} (I-A)^{-1}(T(1)P - B) & (I-A)^{-1}T(1) \\ P & I \end{bmatrix},$$

$$A\widehat{\varphi} = \int_0^t T(t-s)\widehat{\varphi}(s)\, ds, \quad B\widehat{\varphi} = \int_t^1 [T(1) - T(1+t-s)]\widehat{\varphi}(s)\, ds,$$

требование (22) означает существование матрицы V со свойствами (9) такой, что матрица

$$-W = V - \Lambda^* V \Lambda \tag{26}$$

равномерно положительна. Будем дополнительно к (2) предполагать матрицу T эрмитовой: $T^*(s) = T(s)$, $s \in [0,1]$. Определим эрмитов оператор $B_0 : \mathrm{H}^0 \to \mathrm{H}^0$ равенством

$$B_0\widehat{\varphi} = \int_0^1 [T(1) - T(|t-s|)]\widehat{\varphi}(s)\, ds. \tag{27}$$

Теорема 2. *Для того чтобы решение $x = 0$ автономной системы* (1) *с эрмитовой матрицей* T *было экспоненциально устойчивым в* H^1*-топологии, достаточно выполнение неравенств*

$$B_0 \geq 0, \quad T(1) < 0, \quad b_0 = \int\limits_0^1 |T(1) - T(s)|^2 \, ds < 1. \tag{28}$$

Доказательство. Из первых двух соотношений (28) нетрудно получить неравенства

$$A + A^* \leq T(1)P, \quad T(1)P \leq 0, \quad T^2(1) - T(1) > 0, \quad I - T(1) \leq (1 + |T(1)|)I. \tag{29}$$

В (10) положим

$$V = \begin{bmatrix} (I - A^*)(I - A) & -(I - A^*)T(1) \\ -PT(1)(I - A) & T^2(1) - T(1) \end{bmatrix}. \tag{30}$$

В силу леммы 4 $V^* = V$. Проверим выполнение условий леммы 5. В проверке нуждается неравенство (20). С учетом (29) имеем

$$\begin{aligned} \Delta &= (I - A^*)(I - A) - (I - A^*)T(1)[T^2(1) - T(1)]^{-1}T(1)(I - A) \\ &= (I - A^*)[I - T(1)]^{-1}(I - A) \geq \delta[I + A^*A - (A + A^*)] \geq \delta I, \end{aligned}$$

где $\delta = (1 + |T(1)|)^{-1}$. В силу леммы 5 для матрицы (30) имеет место нижняя оценка (9). Верхняя оценка (9) следует из ограниченности V. Тем самым $V \in J$.

Подстановка (30) в (26) дает

$$-W = \begin{bmatrix} (I - A^*)(I - A) - B^*B + T(1)P & A^*T(1) \\ PT(1)A & T^2(1) \end{bmatrix}.$$

Проверка условий леммы 5 здесь также сводится к оценке оператора (20). Имеем

$$\begin{aligned} \Delta &= (I - A^*)(I - A) - B^*B + T(1)P - A^*T(1)T^{-2}(1)T(1)A \\ &= I - (A + A^*) - B^*B + T(1)P. \end{aligned}$$

В силу первого соотношения (29) $T(1)P - (A + A^*) \geq 0$. С учетом последнего требования (28) получим

$$\begin{aligned} \Delta &\geq I - B^*B \geq (1 - |B^*B|)I \geq (1 - |B|^2)I \\ &\geq \left[1 - \int\limits_t^1 |T(1) - T(1 + t - s)|^2 \, ds\right] I = \left[1 - \int\limits_t^1 |T(1) - T(s)|^2 \, ds\right] I \geq \hat{\delta} I, \end{aligned}$$

где $\hat{\delta} = 1 - b_0 > 0$. В силу леммы 5 матрица (26) равномерно положительна, тем самым выполнено требование (22) теоремы 1. Теорема доказана.

§ 4. Примеры

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + b\cos 2\pi t \cdot x(t - 1) \quad (t \geq 1), \\ x|_{[0,1]} = \varphi \in E, \end{cases} \tag{31}$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $E = \mathrm{H}^1((0,1) \to \mathbb{R})$. Уравнение (31) имеет вид (1), где

$$T(s,t) = \begin{cases} 0 & \text{при } s = 0, \\ a & \text{при } 0 < s < 1, \\ a + b\cos 2\pi t & \text{при } s = 1. \end{cases} \tag{32}$$

Функция (32) удовлетворяет требованиям (2). Покажем, что при условиях

$$a < 0, \quad b^2 < \frac{2a^2}{a^2+1} \tag{33}$$

решение $x = 0$ уравнения (37) экспоненциально устойчиво в H^1-топологии. Для удобства записи обозначим $\beta(t) = b\cos 2\pi t$. Для операторов A_n, B_n и матрицы Γ_n в (16) имеют место формулы

$$A_n = A = aS, \quad B_n = B = \beta(t)(P - S), \quad \Gamma_n = \Gamma = a + \beta(t), \quad S = \int_0^t \cdot\, ds.$$

Матрица (18) имеет вид

$$\Lambda = \mathscr{A}^{-1}\Lambda_0, \quad \mathscr{A} = \begin{bmatrix} I - aS & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Lambda_0 = \begin{bmatrix} aP + \beta(t)S & a + \beta(t) \\ P & I \end{bmatrix}. \tag{34}$$

В (10) положим

$$V = \mathscr{A}^* V_0 \mathscr{A}, \quad V_0 = \begin{bmatrix} I & -aI \\ -aP & (a^2 - a)I \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Матрица V_0 с учетом первого условия (33) очевидным образом удовлетворяет требованиям леммы 5, поэтому $V_0 \geq \varepsilon I_E$ при некотором $\varepsilon > 0$. Отсюда с учетом легко проверяемых соотношений $S + S^* = P$, $aP \leq 0$ при $a < 0$ вытекает нижняя оценка (9) для V:

$$V \geq \varepsilon \mathscr{A}^* \mathscr{A} = \varepsilon \cdot \mathrm{diag}(I - aP + a^2 S^* S, I) \geq \varepsilon I_E.$$

Верхняя оценка (9) следует из ограниченности эрмитова оператора V. Тем самым $V \in J$. Подставляя (34), (35) в (26), после вычислений с учетом равенств

$$P\beta = \int_0^1 \beta(t)dt = 0, \quad P\beta^2 = b^2/2$$

получим

$$-W = \mathscr{A}^* V_0 \mathscr{A} - \Lambda_0^* V_0 \Lambda_0 = \begin{bmatrix} I + S^*(a^2 - \beta^2)S & S^*(a^2 - \beta^2) \\ P(a^2 - \beta^2)S & (a^2 - b^2/2)I \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Проверим выполнение условий леммы 5 для матрицы (36). Из (33) легко получить, что $F_0 = (a^2 - b^2/2)I > 0$. Вычисления по формуле (20) с учетом равенства $2\beta^2 - b^2 = b^2 \cos 4\pi t$ дают

$$\Delta = I + S^*(a^2 - \beta^2)S - \frac{S^*(a^2 - \beta^2)^2 S}{a^2 - b^2/2} = I + S^* \omega S,$$

$$\omega(t) = \frac{b^2 \cos 4\pi t}{2}\left(1 - \frac{b^2 \cos 4\pi t}{2a^2 - b^2}\right).$$

Оценивая сверху $|\omega|$ и учитывая неравенство (33) для b^2, получим

$$|\omega| \le \delta = \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{b^2}{2a^2 - b^2}\right) < \frac{2a^4}{a^2+1}\left(2a^2 - \frac{2a^2}{a^2+1}\right)^{-1} = 1.$$

Тем самым с учетом $0 \le S^*S \le I$

$$\Delta \ge I - S^*|\omega|S \ge I - \delta S^*S \ge cI, \quad c = 1 - \delta > 0.$$

В силу леммы 5 матрица W удовлетворяет условию (22) теоремы 1, что и требовалось.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + \int\limits_0^1 x(t-s)\,ds \quad (t \ge 1), \\ x|_{[0,1]} = \varphi \in E, \end{cases} \tag{37}$$

$a \in \mathbb{R}$, $E = \mathrm{H}^1((0,1) \to \mathbb{R})$. Нетрудно видеть, что правая часть уравнения (37) приводится к виду (1), где

$$T(s) = \begin{cases} 0, & s = 0, \\ s + a, & 0 < s \le 1. \end{cases} \tag{38}$$

Здесь также выполнены требования (2). Покажем, что при условии

$$a < -1 \tag{39}$$

решение $x = 0$ уравнения (37) экспоненциально устойчиво в H^1-топологии. Проверим выполнение требований (28) теоремы 2. Имеем

$$T(1) = 1 + a < 0; \quad b_0 = \int\limits_0^1 (1-s)^2 ds = \frac{1}{3} < 1.$$

Первое требование (28) означает неотрицательность формы $(B_0\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi})$ в $\mathrm{H}^0 = L_2(0,1)$ для оператора (27):

$$(B_0\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (1 - |t-s|)\widehat{\varphi}(s)\widehat{\varphi}(t)\,dsdt \ge 0, \quad \widehat{\varphi} \in \mathrm{H}^0. \tag{40}$$

Представим функцию $1 - |s|$ рядом Фурье на $[-1,1]$:

$$1 - |s| = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos k\pi s, \quad c_k = \frac{2[1 - (-1)^k]}{(k\pi)^2} \ge 0. \tag{41}$$

Подстановка в (40) с учетом равномерной сходимости ряда (41) дает

$$(B_0\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\cos k\pi s \cdot \cos k\pi t + \sin k\pi s \cdot \sin k\pi t)\right]\widehat{\varphi}(s)\widehat{\varphi}(t)\,dsdt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^1 \widehat{\varphi}(s)\,ds\right]^2 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\left(\left[\int\limits_0^1 \cos k\pi s \cdot \widehat{\varphi}(s)\,ds\right]^2 + \left[\int\limits_0^1 \sin k\pi s \cdot \widehat{\varphi}(s)\,ds\right]^2\right) \ge 0.$$

Тем самым при условии (39) функция (38) удовлетворяет всем условиям (28). Применение теоремы 2 дает требуемый результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воробьева Е. В., Романовский Р. К.* Об устойчивости решений задачи Коши для гиперболических систем с двумя независимыми переменными // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 6. С. 1290–1292.

2. *Алексеенко Н. В.* Устойчивость решений нелинейных почти периодических систем ФДУ запаздывающего типа // Изв. вузов. Математика. 2000. № 2. С. 3–6.

3. *Алексеенко Н. В., Романовский Р. К.* Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем с почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 2. С. 147–153.

4. *Романовский Р. К., Троценко Г. А.* Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем нейтрального типа с почти периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 444–453.

5. *Троценко Г. А.* Об устойчивости решений почти периодической системы ФДУ нейтрального типа // Изв. вузов. Математика. 2003. № 6. С. 77–81.

6. *Романовский Р. К., Воробьева Е. В., Макарова И. Д.* Об устойчивости решений смешанной задачи для почти линейной гиперболической системы на плоскости // Сиб. журн. индустр. математики. 2003. Т. 6, № 1. С. 118–124.

7. *Добровольский С. М., Рогозин А. В.* Прямой метод Ляпунова для почти периодической разностной системы на компакте // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 1. С. 98–105.

8. *Рогозин А. В.* Об устойчивости решений линейного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве с почти периодическим оператором // Докл. АН ВШ РФ. 2006. Т. 6, № 1. С. 24–32.

9. *Романовский Р. К., Мендзив М. В.* Устойчивость решений смешанной задачи для гиперболической системы на плоскости с периодическими по времени коэффициентами // Докл. АН ВШ РФ. 2006. Т. 6, № 1. С. 78–85.

10. *Романовский Р. К., Мендзив М. В.* Устойчивость решений задачи Коши для гиперболической системы на плоскости с периодическими по времени коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1134–1141.

11. *Мендзив М. В., Романовский Р. К.* Прямой метод Ляпунова для гиперболических систем на плоскости с периодическими по времени коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 2. С. 257–262.

12. *Романовский Р. К., Бельгарт Л. В.* Об экспоненциальной дихотомии решений задачи Коши для гиперболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 8. С. 1125–1134.

13. *Романовский Р. К., Бельгарт Л. В.* Дихотомия решений задачи Коши для почти периодической гиперболической системы на плоскости // Докл. АН ВШ РФ. 2010. Т. 15, № 2. С. 14–24.

14. *Бельгарт Л. В.* Об одном классе индефинитных функционалов Ляпунова // Омск. науч. вестн. Сер. Приборы, машины и технологии. 2010. Т. 93, № 3. С. 11–13.

15. *Власов В. В.* О разрешимости и оценках решений функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1999. Т. 227. С. 109–121.

16. *Власов В. В., Медведев Д. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Современная математика. Фундаментальные направления М.: ВИНИТИ, 2008. Т. 30. С. 3–173. (Итоги науки и техники)

17. *Жабко А. П., Харитонов В. Л.* Методы линейной алгебры в задачах управления. СПб: Изд-во СПбГУ, 1993.

18. *Андреев А. С., Павликов С. В.* К методу функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Мат. заметки. 2000. Т. 68, № 3. С. 323–331.

19. *Павликов С. В.* Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа // Мат. заметки. 2008. Т. 83, № 3. С. 417–427.

20. *Мартынюк А. А., Като Д., Шестаков А. А.* Устойчивость движения: метод предельных уравнений. Киев: Наук. думка, 1990.

21. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.

22. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.

23. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

Статья поступила 17 ноября 2012 г., окончательный вариант — 30 марта 2014 г.

Романовский Рэм Константинович, Назарук Елена Маратовна
Омский гос. технический университет,
пр. Мира, 11, Омск 644050
elmarnaz@mail.ru