Сибирский математический журнал
Июль—август, 2014. Том 55, № 4

УДК 514.76

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ РАССЛОЕННЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

Р. В. Разумовский

Аннотация. Представлены два бесконечных класса зацеплений и доказана их расслоенность. Для комбинаторного описания использованы прямоугольные диаграммы. Первый класс обобщает лоренцевы зацепления и характеризуется тем, что каждая вторая вершина диаграммы любого представителя семейства лежит на координатной диагонали прямоугольной диаграммы. Дополнения узлов из второго класса допускают свободное действие $\mathbb{Z}_n$.

Ключевые слова: расслоенные зацепления, прямоугольные диаграммы, гомологии Хегора — Флоера, диагональные зацепления, (n, p, q)-периодические узлы.

Введение

Классическая теория узлов является подразделом трехмерной топологии и изучает гладкие вложения семейств окружностей в трехмерную сферу с точностью до объемлющей изотопии. Элементарное введение в классическую теорию узлов можно найти в [1, 2]. Существуют обобщения, исследующие вложения в другие трехмерные многообразия, а также обобщения, связанные с поднятием размерности как объемлющих пространств, так и вкладываемых сфер.

Одной из задач теории узлов является выделение классов с интересными свойствами. Важным примером являются расслоенные зацепления.

Определение 1. Ориентированное зацепление L называется *расслоенным*, если его дополнение расслаивается над окружностью на связные ориентированные поверхности, имеющие L своим краем.

Расслоенные зацепления естественным образом возникают при исследовании особенностей плоских алгебраических кривых [3]. Как показано в [4], замыкания строго положительных кос являются расслоенными зацеплениями. В частности, сюда относятся торические зацепления, итерированные торические (а потому и все алгебраические зацепления) и скрученные зацепления (или, равносильно, лоренцевы [5]). Узлы, получающиеся конструкцией Кампо, также расслоены [6].

Для описания вводимых в статье зацеплений используются прямоугольные диаграммы.

Определение 2. Планарная диаграмма зацепления называется *прямоугольной*, если она кусочно линейна и содержит только вертикальные и горизонтальные ребра; ребра находятся в общем положении, т. е. каждая вертикальная или горизонтальная прямая содержит не более одного ребра; число вертикальных ребер называется *сложностью диаграммы*; в каждом самопересечении диаграммы вертикальное ребро проходит над горизонтальным.

Каждое зацепление обладает прямоугольной диаграммой [7]. В случае ориентированных зацеплений вершины раскрашиваются в черный и белый цвета таким образом, чтобы вертикальные ребра были ориентированы от черных вершин к белым. Можно считать, что у прямоугольной диаграммы сложности n координаты всех вершин принимают целочисленные значения от 1 до n. Поэтому такие диаграммы удобно представлять в виде квадратных матриц порядка n, в которых непустыми являются $2n$ элементов, соответствующих n черным и n белым вершинам. Циклические перестановки строк матрицы соответствуют изотопиям зацепления, переносящим самое верхнее ребро в нижний ряд над остальными ребрами. Аналогично циклические перестановки столбцов матрицы соответствуют изотопиям зацепления, проносящим самое левое ребро в правый столбец под остальными ребрами. Можно представлять себе прямоугольные диаграммы нарисованными на торе T^2, канонически вложенном в S^3, за исключением пересечений диаграммы, где нам потребуются небольшие утолщения поверхности. Можно считать, что координаты вершин принимают значения в $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Будем использовать $\bar{n} \in \mathbb{Z}_n$ вместо $\bar{0} \in \mathbb{Z}_n$. Применив нужное количество циклических перестановок ребер, можно предполагать, что точка $(1,1)$ принадлежит множеству черных вершин диаграммы.

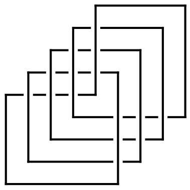

Рис. 1. Узел $T(4,5)$.

Простейшим классом расслоенных зацеплений является семейство торических зацеплений. Все они могут быть представлены прямоугольными диаграммами специального вида: зацепление $T(p,q)$ задается диаграммой сложности $p+q$, все черные вершины которой лежат на диагонали $y = x$, а белые — на сдвинутой диагонали $y = x+p$. Например, на рис. 1 представлен узел $T(4,5)$.

Такие диаграммы естественно обобщать двумя способами: возмущая точки вне диагонали $y = x$ (так получим диагональные зацепления) или сохраняя $\mathbb{Z}_n$-инвариантность множеств черных и белых вершин.

Как покажем ниже, оба класса состоят из расслоенных зацеплений. В первом случае явно построим поверхность Зейферта, являющуюся слоем расслоения. Во втором случае для доказательства используем результаты из теории гомологий Хегора — Флоера.

1. Диагональные зацепления

Обобщим понятие диагональных зацеплений, введенное в [8], на более широкий класс перестановок.

Определение 3. Пусть $\sigma \in S_n$ — перестановка без неподвижных элементов. *Зацеплением типа* $\operatorname{diag}(\sigma)$ называется зацепление, обладающее прямоугольной диаграммой сложности n со следующим набором вершин: множество черных вершин $\{(i,i) \mid i = 1,\dots,n\}$, множество белых вершин $\{(i,\sigma(i)) \mid i = 1,\dots,n\}$.

Будем также обозначать $\sigma \in S_n$ вектором $(\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(n))$.

Пример 1. На рис. 2 изображен узел $\operatorname{diag}(3,8,7,1,14,9,15,10,2,5,13,6,4,11,12)$.

Количество связных компонент зацепления $\operatorname{diag}(\sigma)$, очевидно, равно числу циклов перестановки σ. Вертикальные и горизонтальные ребра, находящиеся выше диагонали, ориентированы вверх и вправо соответственно, а вертикальные и горизонтальные ребра, находящиеся ниже диагонали, ориентированы

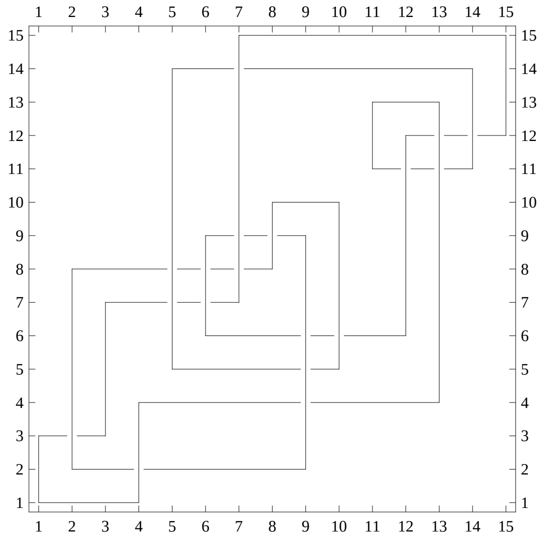

Рис. 2.

вниз и влево соответственно. Поэтому все перекрестки на диаграмме $\mathrm{diag}(\sigma)$ отрицательны. Если σ является перетасовкой, то $\mathrm{diag}(\sigma)$ есть лоренцево зацепление [8]. Подробности о лоренцевых зацеплениях можно найти в [4, 5].

Если заменить перестановку σ на $t^k\sigma t^{-k}$, где $t = (2, 3, \dots, n-1, n, 1)$, то получим изотопное зацепление: изотопия задается циклическим сдвигом по тору вдоль диагонали. При замене σ на $\Sigma\sigma\Sigma^{-1}$, где $\Sigma = (n, \dots, 1)$, также получаем изотопное зацепление — достаточно повернуть диаграмму вокруг центра на 180^0. Зацепления $\mathrm{diag}(\sigma)$ и $\mathrm{diag}(\sigma^{-1})$ изотопны друг другу с точностью до обращения ориентации: диаграмму нужно отразить относительно диагонали $y = x$, изменить знаки всех перекрестков и обратить ориентацию каждой компоненты.

Рассмотрим случай, когда зацепление $L = \mathrm{diag}(\sigma)$ состоит хотя бы из двух компонент. Хотим понять, разводимо ли оно. Поскольку все перекрестки на диаграмме отрицательны, наличие пересечений у двух компонент дает строго отрицательный коэффициент зацепления, что означает зацепленность. В противном случае жорданова кривая соответствует проекции разделяющей сферы. Построим граф, в котором вершины соответствуют компонентам зацепления, а ребра — наличию ненулевого коэффициента зацепления между соответствующими компонентами. Связные компоненты графа далее уже неразводимы, но несложно показать, что связная компонента отделяется от своего дополнения некоторой сферой. Следовательно, связные компоненты дают максимальные неразводимые подзацепления.

Определение 4. Назовем перестановку $\sigma \in S_n$ *нераспадающейся*, если у нее нет собственных инвариантных отрезков, т. е. не существует пары (i, j) со свойствами $i < j$, $(i, j) \neq (1, n)$, $\sigma(\{i, \dots, j\}) = \{i, \dots, j\}$.

Теорема 1. *Зацепление* $L = \mathrm{diag}(\sigma)$ *расслоено тогда и только тогда, когда* σ *— нераспадающаяся перестановка.*

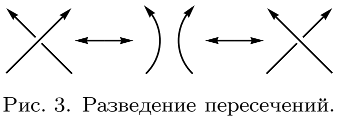

Рис. 3. Разведение пересечений.

Доказательство Применим алгоритм Зейферта, т. е. разведем все пересечения (рис. 3), получим диски Зейферта и соединим их короткими скрученными на пол-оборота ленточками, соответствующими пересечениям диаграммы. Полученная поверхность S с $\partial S = L$, как покажем ниже, будет слоем расслоения.

Пример 2. На рис. 4 представлено строение поверхности, соответствующей узлу из примера 1. Здесь присутствуют четыре уровня вложенности дисков, где более темный оттенок отвечает более высокому уровню. Диски на соседних уровнях соединены скрученными на пол-оборота ленточками в общих точках проекций граничных окружностей дисков.

Оснастим поверхность S полем из векторов, дополняющих базисы в касательных плоскостях поверхности до отрицательных базисов пространства. Отображение сталкивания $f : S \to S^3 \setminus S$ вдоль построенного поля индуцирует гомоморфизм $f_* : \pi_1(S) \to \pi_1(S^3 \setminus S)$. Если f_* является эпиморфизмом, то зацепление L расслоено [9]. Опишем достаточные для дальнейшего доказательства свойства поверхности.

• Поверхность должна быть связной.

• Все окружности Зейферта должны быть ориентированы в одном общем направлении.

• Для каждого диска P самопересечения граничного зацепления, соответствующие лентам, соединяющим его с объемлющим диском, имеют один общий знак, определяемый P. При этом глобально самопересечения могут иметь разные знаки.

Будем называть поверхности, обладающие указанными свойствами, *хорошими.*

Если σ — распадающаяся перестановка, то зацепление разводимо и потому не может быть расслоенным [10]. Если же σ — нераспадающаяся перестановка, то поверхность будет связной. Действительно, если поверхность оказалась несвязной, то имеются следующие две возможности.

(1) Имеется более одной внешней окружности Зейферта — выберем одну из них. Тогда набор диагональных вершин, содержащихся в соответствующем ей диске, представляет собой отрезок и инвариантен относительно отображения σ. Следовательно, перестановка распадается.

(2) Имеется вложенная окружность Зейферта, не соединенная ленточками с содержащей ее окружностью. Аналогично набор диагональных вершин, содержащихся в соответствующем ей диске, представляет собой отрезок и инвариантен относительно отображения σ.

Два других достаточных свойства отметили сразу после определения диагональных зацеплений. Утверждение теоремы вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Пусть S — хорошая поверхность. Тогда зацепление ∂S расслоено.*

Доказательство. Для доказательства сюръективности отображения f_* используем конструкцию из [4]. Пусть S_p — хорошая поверхность, составленная из p дисков Зейферта. Используем индукцию по p. Если $p = 1$, то $\pi_1 S_1 \cong \pi_1(S^3 \setminus S_1) \cong \{1\}$. Предположим, что утверждение доказано для всех $p \le k$, и докажем его для $p = k+1$. Рассмотрим поверхность S_k, полученную из S_{k+1} удалением диска D, не содержащего других дисков на проекции диаграммы. Пусть диск D был связан с содержащим его диском r лентами. Тогда

$$\pi_1(S_{k+1}) \cong \pi_1(S_k) * F_r, \quad \pi_1(S^3 \setminus S_{k+1}) \cong \pi_1(S^3 \setminus S_k) * F_r.$$

Здесь F_r — свободная группа ранга r. Пусть a — простой базисный цикл $\pi_1(S_{k+1})$, проходящий через две соседние ленты рассматриваемых r лент. На

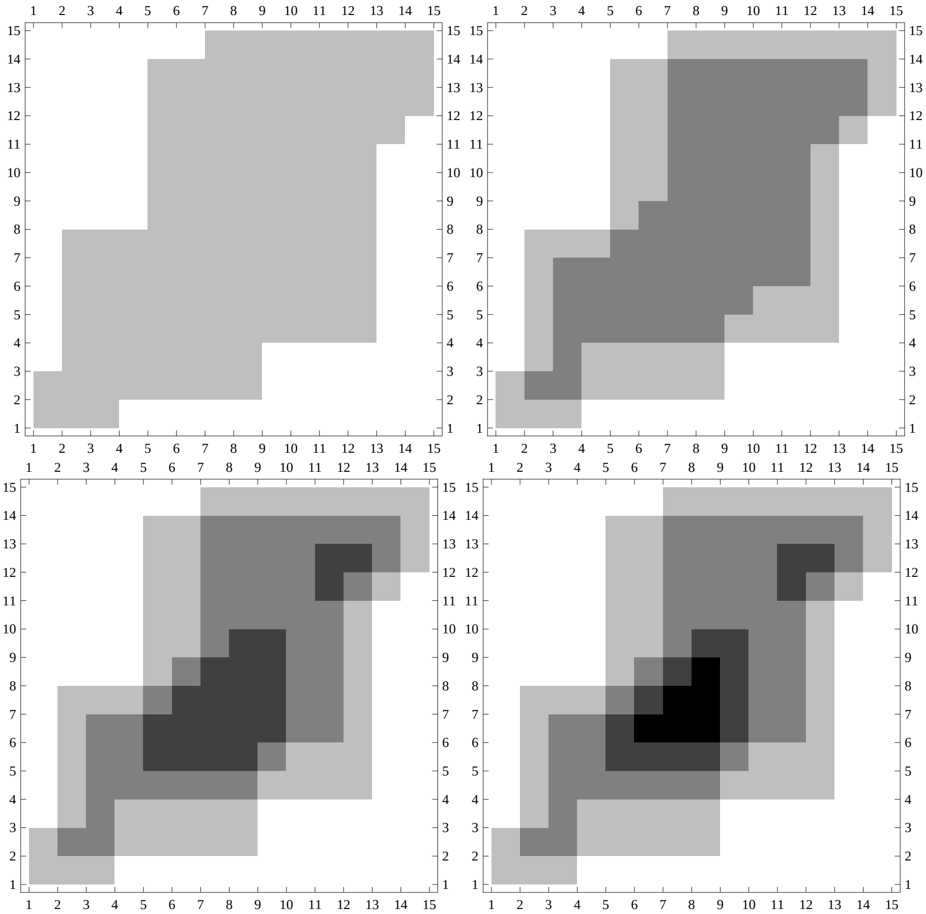

Рис. 4. Конструкция поверхности с четырьмя уровнями вложенности дисков.

рис. 5 показано, что f_*a является базисным циклом $\pi_1(S^3 \setminus S_{k+1})$, обхватывающим одну из двух лент. Это обстоятельство гарантировано тем, что самопересечения зацепления имеют один общий знак. Значит, $f_*(F_r) \cong F_r$, где в левой части F_r соответствует подгруппе $\pi_1(S_{k+1})$, порожденной базисными циклами, проходящими через соседние ленты рассматриваемых r лент, а в правой части F_r соответствует подгруппе $\pi_1(S^3 \setminus S_{k+1})$, порожденной базисными циклами, обхватывающими рассматриваемые r лент. По предположению индукции,$f_*\pi_1(S_k) \cong \pi_1(S^3 \setminus S_k)$. Следовательно,

$$f_*\pi_1(S_{k+1}) \cong f_*\pi_1(S_k) * f_*F_r \cong \pi_1(S^3 \setminus S_k) * F_r \cong \pi_1(S^3 \setminus S_{k+1}).$$

Лемма и теорема доказаны.

Следствие из леммы. *Пусть b — строго положительная коса, т. е. представимая словом $w \in B_n$, включающим все образующие $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ и не включающим обратные к ним. Рассмотрим произвольный набор $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1})$, состоящий из ± 1. Обозначим через $\epsilon(w) \in B_n$ слово, получающееся из w заменой каждого σ_i на $\sigma_i^{\epsilon_i}$. Тогда замыкание $\epsilon(w)$ является расслоенным зацеплением.*

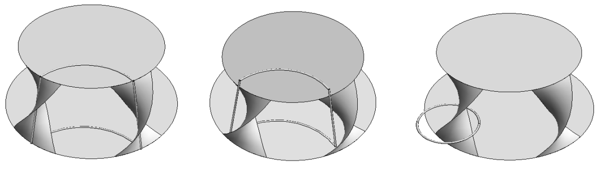

Рис. 5. Сталкивание петель.

Доказательство. Поверхность, полученная применением алгоритма Зейферта к замыканию косы $\epsilon(w)$, обладает следующими свойствами: состоит из n дисков Зейферта, граничные окружности дисков ориентированы в одном направлении; связна ввиду строгой положительности w; самопересечения зацепления, соединяющие i- и $(i+1)$-ю окружности Зейферта ($i = 1, \ldots, n-1$), имеют один общий знак ϵ_i. Следовательно, поверхность хорошая, и зацепление расслоено. $\square$

2. (n, p, q)-Периодические узлы

Определение 5. Пусть n, p, q — тройка натуральных чисел с условиями $(n, p) = (n, q) = 1, 1 \leq p, q \leq n-1$. (n, p, q)-*Периодическим узлом* называется узел, обладающий прямоугольной диаграммой сложности n со следующим набором вершин: множество черных вершин $\{(1 + iq, 1 + ip) \mid i = 0, \ldots, n-1\}$; множество белых вершин $\{(1 + iq, 1 + (i+1)p) \mid i = 0, \ldots, n-1\}$.

Пример 3. На рис. 6 изображена прямоугольная диаграмма $(13, 7, 3)$-периодического узла.

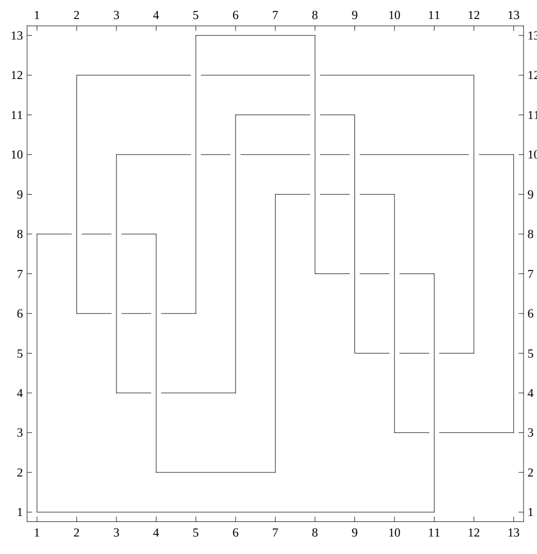

Рис. 6.

Каждый торический узел $T(p, q)$ изотопен $(p+q, p, p)$-периодическому узлу. Некоторые итерированные торические узлы тоже оказываются (n, p, q)-периодическими.

У прямоугольной диаграммы (n, p, q)-периодического узла из n вертикальных ребер p направлены вниз и $n - p$ вверх, а из n горизонтальных ребер q

направлены влево и $n-q$ — вправо. Действительно, вертикальное ребро имеет длину p и ориентировано вверх, когда начальная точка имеет вертикальную координату, не превосходящую $n-p$; в остальных p случаях вертикальное ребро имеет длину $n-p$ и ориентировано вниз; ситуация с горизонтальными ребрами аналогична. Поэтому (n,p,q)-периодический узел может быть представлен в виде замыкания кос на $p, q, n-p$ или $n-q$ нитях. Это общий способ получения замыкания кос прямоугольных диаграмм, состоящий в размыкании ребер определенного направления и ориентации и соединения их через бесконечность [7]. При $\min(p,q,n-p,n-q)=1$ получаем тривиальный узел, поскольку группа кос на одной нити тривиальна. При $1<p<n-1$ каждый $(n,p,2)$-периодический узел изотопен торическому узлу $T(k,2)$ при некотором k, так как замыкания кос на двух нитях дают такие зацепления.

Множества черных и белых вершин (n,p,q)-периодических узлов инвариантны относительно сдвига на вектор (q,p), и отображение сдвига имеет порядок n. Данное обстоятельство будет использовано при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2. *(n,p,q)-Периодические узлы расслоены. Трехмерный род (n,p,q)-периодического узла не превосходит* $(\min(p(n-p),q(n-q))-n+1)/2$.

Доказательство. Для доказательства расслоенности используем результаты теории гомологий Хегора — Флоера. В [11] построен инвариант ориентированных узлов — конечномерное биградуированное векторное пространство

$$\widehat{\mathrm{HFK}}(K)=\bigoplus_{m,s}\widehat{\mathrm{HFK}}_m(K,s)$$

над Z_2. Здесь K — ориентированный узел, m и s — значения градуировок Маслова и Александера соответственно. Инвариант $\widehat{\mathrm{HFK}}(K)$ связан с симметризованным полиномом Александера соотношением

$$\Delta_K(t)=\sum_{m,s}(-1)^m\operatorname{rank}\widehat{\mathrm{HFK}}_m(K,s)\cdot t^s.$$

Потребуются следующие утверждения.

Согласно [12] трехмерный род узла Зейферта K равен максимальному значению градуировки Александера, в которой присутствуют нетривиальные гомологии $\widehat{\mathrm{HFK}}(K)$:

$$g(K)=\max\{s\in\mathbb{Z}\mid\widehat{\mathrm{HFK}}_*(K,s)\neq 0\}.$$

В [13] доказано, что узел K расслоен в том и только в том случае, когда гомологии $\widehat{\mathrm{HFK}}(K)$ в старшей градуировке Александера одномерны:

$$\dim\widehat{\mathrm{HFK}}_*(K,g(K))=1.$$

Дифференциал ∂ в комплексе цепей, определяющем $\widehat{\mathrm{HFK}}(K)$, сохраняет градуировку Александера. Следовательно, в частном случае, когда имеется только одна образующая w максимальной градуировки Александера, можно доказать расслоенность узла. Действительно, $\partial w=0$, и в градуировке $A(w)$ больше ничего нет, поэтому $\dim\widehat{\mathrm{HFK}}_*(K,A(x))=1$ и дополнение K расслоено на поверхности рода $g(K)=A(w)$.

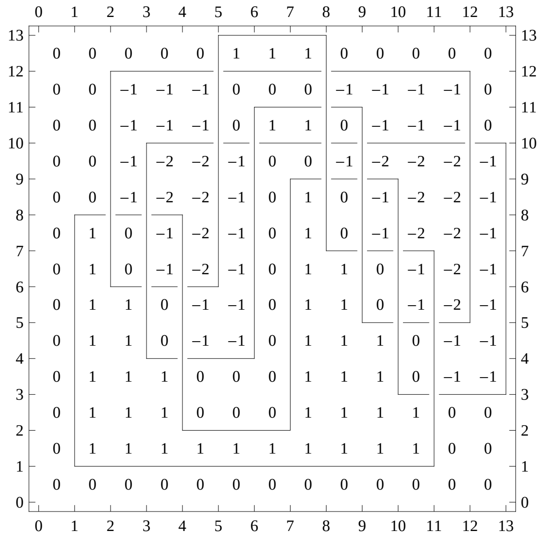

Рис. 7. Матрица a для диаграммы из примера 3.

В [14] описана следующая конструкция комплекса цепей, задающего $\widehat{\mathrm{HFK}}(K)$. Пусть Γ — прямоугольная диаграмма сложности n для узла K. Сопоставим ей цепной комплекс $(C(\Gamma), \partial)$. Образующими модуля $C(\Gamma)$ над $\mathbb{Z}_2$ являются n-точечные множества $X = \{(i, \sigma(i)) \mid i = 1 \dots n, \sigma \in S_n\}$ в количестве $n! = |S_n|$. Для задания градуировки Александера $A : X \to \mathbb{Z}$ ассоциируем с диаграммой Γ квадратную матрицу a порядка n: a_{ij} равно взятому со знаком минус числу оборотов проекции узла вокруг точки $(i-1/2, j-1/2)$. Тогда для каждой образующей x с точностью до общего аддитивного слагаемого $A(x) = \sum\limits_{p \in x} a_p$.

Пример 4. На рис. 7 представлена диаграмма Γ из примера 3 с ассоциированной матрицей a.

В [14] далее определяются градуировка Маслова $M : X \to \mathbb{Z}$ и дифференциал $\partial : C(\Gamma) \to C(\Gamma)$, сохраняющий градуировку Александера (сами определения нам не потребуются). Пусть V — биградуированное двумерное векторное пространство с образующими градуировок $(-1, -1)$ и $(0, 0)$. Тогда гомологии $H_*(C, \partial)$ описанного комплекса изоморфны биградуированной группе $\widehat{\mathrm{HFK}}(K) \otimes V^{\otimes(n-1)}$.

Определим семейство матриц (включающее a), задающих градуировку Александера с точностью до аддитивного слагаемого. Пусть

$$U = \{u \in M_n(\mathbb{R}) \mid u_{i,j} + u_{i+1,j+1} = u_{i,j+1} + u_{i+1,j},\ i = 1, \dots, n-1,\ j = 1, \dots, n-1\}.$$

Легко проверить, что $u_{i,j} = u_{i,1} + u_{1,j} - u_{1,1}$, поэтому $\dim U = 2n - 1$ и можно взять набор $\{u_{i,j} \mid \min(i, j) = 1\}$ в качестве системы независимых параметров в U. Пусть $L_a = a + U$ — $(2n-1)$-мерная аффинная плоскость в $M_n(\mathbb{R})$. Для каждого $z \in L_a$ можно определить градуировку $Z : X \to \mathbb{R}$ по формуле $Z(x) = \sum\limits_{p \in x} z_p$. Так как для любых двух таких градуировок Z_1, Z_2 и $x \in X$ имеем

$$Z_1(x) - Z_2(x) = \sum_{i=2,\dots,n-1} (z_1 - z_2)_{i,1}$$

$$+\sum_{j=2,\dots,n-1}(z_1-z_2)_{1,j}+(2-n)(z_1-z_2)_{1,1}=\mathrm{const}(z_1,z_2)$$

(т. е. разница не зависит от x) и $A(x)=\sum\limits_{p\in x}a_p$ с точностью до аддитивного слагаемого, достаточно доказать наше утверждение для любой Z-градуировки. Для каждого $z\in L_a$

$$z_{i,j}+z_{i+1,j+1}-z_{i,j+1}-z_{i+1,j}=\begin{cases}0, & \text{если } (i,j) \text{ не вершина диаграммы},\\ 1, & \text{если } (i,j) \text{ — черная вершина},\\ -1, & \text{если } (i,j) \text{ — белая вершина}.\end{cases}$$

Действительно, указанные равенства выполнены для $a\in L_a$, а добавление $u\in U$ ничего не меняет. С другой стороны, данные условия полностью характеризуют L_a.

Используем $\mathbb{Z}_n$-инвариантность диаграмм (n,p,q)-периодических узлов. Множества белых и черных вершин выдерживают сдвиг на вектор (q,p), такое преобразование имеет порядок n. Сдвиг индуцирует преобразование матрицы a, состоящее в q-кратной циклической перестановке столбцов и p-кратной циклической перестановке строк. В результате одного сдвига получается матрица $\phi a\in L_a$. Пусть $\bar a=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\phi^k a$, т. е. $\bar a$ есть усреднение a по действию ϕ. Так как L_a — аффинная плоскость, $\bar a\in L_a$ (сумма весов равна 1). Обозначим через $\overline{A}$ градуировку, определяемую функцией $\bar a$.

Пример 5. На рис. 8 представлен пример $\bar a$. Образующая, содержащая все элементы $\frac{10}{13}$, имеет максимальную градуировку $\overline{A}$, и других образующих с такой градуировкой нет.

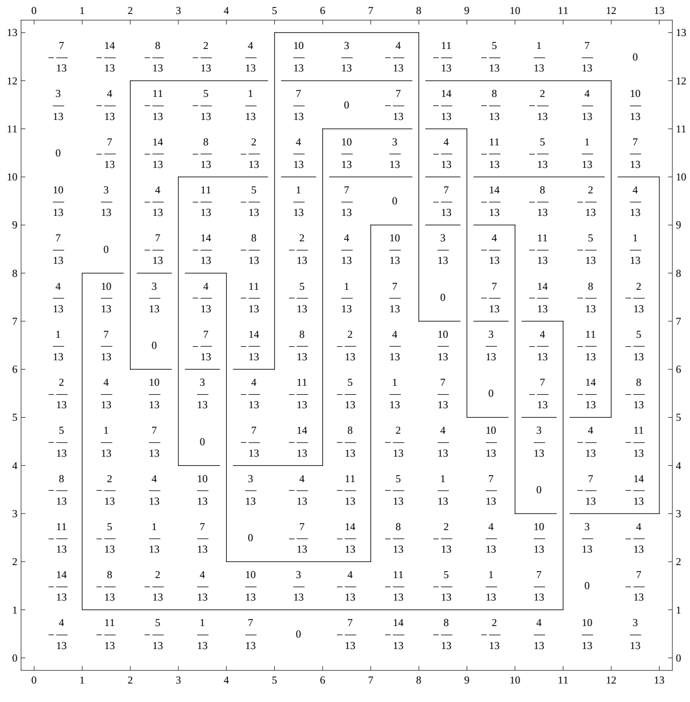

Рис. 8. Усреднение $\bar a$ матрицы a по действию $\mathbb{Z}_n$.

Пусть $r = pq^{-1} \in \mathbb{Z}_n$ ($q^{-1} \in \mathbb{Z}_n^*$). Тогда для каждого i $(i+1)$-й столбец матрицы $\bar{a}$ получается из i-го r-кратной циклической перестановкой элементов. Так как $(n,r) = 1$, для доказательства существования $w \in X$ с максимальной градуировкой $\overline{A}$ достаточно доказать, что в первом столбце матрицы $\bar{a}$ имеется единственный максимум (в этом случае все максимумы по столбцам будут расположены в разных строках). Пусть $s_i = \bar{a}_{i+1,1} - \bar{a}_{i,1}$, $i = 1,\ldots,n$. Тогда

$$\begin{aligned} s_{i-r} - s_i &= \bar{a}_{i-r+1,1} - \bar{a}_{i-r,1} - \bar{a}_{i+1,1} + \bar{a}_{i,1} \\ &= \bar{a}_{i+1,2} - \bar{a}_{i,2} - \bar{a}_{i+1,1} + \bar{a}_{i,1} = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ -1, & i = p+1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Последний переход объясняется тем, что $\bar{a} \in L_a$ и случаи $i = 1$ и $i = p+1$ соответствуют черной и белой вершинам. Следовательно, для некоторого d при условии $1 - kr \equiv 1 + p \pmod n$ имеем

$$(s_1, s_{1-r}, s_{1-2r}, \ldots, s_{1-kr}, s_{1-(k+1)r}, \ldots, s_{1-nr}) = (d, d+1, d+1, \ldots, d+1, d, \ldots, d).$$

Отсюда $k = n - q$. Равенство $0 = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i = nd + k$ влечет $d = \frac{q-n}{n}$, $d + 1 = \frac{q}{n}$.

Легко показать, что в последовательности $(\bar{a}_{1,1}, \bar{a}_{1-r,1}, \ldots, \bar{a}_{1-(n-1)r,1})$ имеется единственный максимальный элемент. Действительно, если это не так, то два максимума соединены u значениями $\frac{q-n}{n}$ и v значениями $\frac{q}{n}$ с условием $0 < u+v < n$. Имеем $0 = u\frac{q-n}{n} + v\frac{q}{n} = \frac{(u+v)q-un}{n}$. Числитель дроби делится на n и $(q,v) = 1$, поэтому $u+v$ делится на n. Полученное противоречие доказывает расслоенность.

Осталось доказать ограничение на род. Согласно указанному ранее изоморфизму

$$H_*(C,\partial) \cong \widehat{\mathrm{HFK}}(K) \otimes V^{\otimes(n-1)}$$

и соотношению

$$\Delta_K(t) = \sum_{m,s} (-1)^m \operatorname{rank} \widehat{\mathrm{HFK}}_m(K,s) \cdot t^s$$

имеем для некоторого полуцелого w зависимость

$$\Delta_K(t) = \frac{\det(t^{\bar{a}_{i,j}}) * t^w}{(t-1)^{n-1}}.$$

Оценим сверху разность максимальной и минимальной степеней полинома $\det(t^{\bar{a}_{i,j}})$. В наборе $\{s_i\}$ есть $n-q$ значений $\frac{q}{n} > 0$ и q значений $\frac{q-n}{n} < 0$. Значит, разность между максимумом и минимумом в каждом столбце матрицы $\bar{a}$ не превосходит $\frac{q(n-q)}{n}$. Следовательно, разница крайних степеней $\det(t^{\bar{a}_{i,j}})$ не больше $q(n-q)$. Поэтому разность крайних степеней $\Delta_K(t)$ не превосходит $q(n-q)-n+1$. Поскольку род расслоенного узла равен старшей степени симметризованного полинома Александера, получаем ограничение сверху $(q(n-q)-n+1)/2$. Аналогичное рассуждение для строк дает оценку $(p(n-p)-n+1)/2$. Взяв минимум из двух оценок, получаем утверждение теоремы. □

Замечание. Можно было бы применить технику доказательства теоремы 2 в случае диагональных узлов. Единственная образующая со старшей градуировкой Александера задается элементами, лежащими на диагонали. Вместо этого мы использовали более прозрачный геометрический аргумент, предъявив поверхность Зейферта, являющуюся слоем расслоения.

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору И. А. Дынникову за постановку задачи, многочисленные обсуждения и неоценимую помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1.. *Rolfsen D.* Knots and links. Berkeley: Amer. Math. Soc. Chelsea Publ., 1976.
2. *Kauffman L. H.* On knots. Princeton: Princeton Univ. Press, 1987.
3. *Rudolph L.* Some knot theory of complex plane curves // L'Enseign. Math. 1983. V. 29. P. 185–208.
4. *Birman J., Williams R.* Knotted periodic orbits in dynamical systems. I. Lorenz′s equations // Topology. 1983. V. 22, N 1. P. 47–82.
5. *Birman J., Kofman I.* A new twist on Lorenz links // J. Topology. 2009. V. 2, N 2. P. 227–248.
6. *A′Campo N.* Planar trees, slalom curves and hyperbolic knots // Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. 1999. V. 88, N 1. P. 171–180.
7. *Dynnikov I.* Arc-presentations of links. Monotonic simplification // Fund. Math. 2006. V. 190. P. 29–76.
8. *Razumovsky R.* Grid diagrams of Lorenz links // J. Knot Theory Ramifications. 2010. V. 19, N 6. P. 843–847.
9. *Stallings J.* On fibering certain 3-manifolds // Topology of 3-manifolds. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1962. P. 95–100.
10. *Thurston W.* Three-dimensional geometry and topology. Princeton: Princeton Univ. Press, 1977.
11. *Ozsvath P., Szabo Z.* Holomorphic disks and knot invariants // Adv. Math. 2004. V. 186, N 1. P. 58–116.
12. *Ozsvath P., Szabo Z.* Holomorphic disks and genus bounds // Geom. Topol. 2004. V. 8. P. 311–334.
13. *Yi Ni.* Knot Floer homology detects fibered knots // Invent. Math. 2009. V. 177, N 1. P. 235–238.
14. *Manolescu C., Ozsvath P., Sarkar S.* A combinatorial description of knot Floer homology // Ann. Math. 2009. V. 169, N 2. P. 633–660.

Статья поступила 29 января 2013 г., окончательный вариант — 27 января 2014 г.

Разумовский Роман Валентинович
Московский гос. университет,
механико-математический факультет,
кафедра высшей геометрии и топологии,
Ленинские горы, МГУ, Москва 119991 ГСП-1
razumovskymail@mail.ru