Сибирский математический журнал
Июль—август, 2014. Том 55, № 4

УДК 517.977

ВАРИАЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

Н. И. Погодаев, А. А. Толстоногов

Аннотация. Исследуется вариационная устойчивость задачи оптимального управления для нелинейного функционально-операторного уравнения типа Вольтерра. Это означает, что для заданной задачи оптимального управления (P_ε), зависящей от параметра ε, изучается зависимость значения задачи $\min(P_\varepsilon)$ и множества ее оптимальных решений $\operatorname{argmin}(P_\varepsilon)$ от ε. Приведены примеры использования теоремы о вариационной устойчивости для ряда конкретных задач.

Ключевые слова: Г-сходимость, вариационная устойчивость, оптимальное управление, уравнения в частных производных.

§ 1. Введение

Пусть заданы топологическое пространство X, метрическое пространство M и семейство функций $F_\varepsilon : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\varepsilon \in M$. Для каждого ε рассмотрим задачу минимизации

$$F_\varepsilon(x) \to \min, \quad x \in X. \tag{P_ε}$$

Будем считать, что все задачи из данного семейства имеют решения.

Определение 1.1. Будем говорить, что задача (P_ε) *вариационно устойчива* в точке ε_0, если для любой последовательности $\varepsilon_h \to \varepsilon_0$

(i) $\min_X F_{\varepsilon_h} \to \min_X F_{\varepsilon_0}$,

(ii) если x — точка сгущения последовательности $x_h \in \operatorname{argmin}_X F_{\varepsilon_h}$, то $x \in \operatorname{argmin}_X F_{\varepsilon_0}$.

Говоря неформально, малое изменение параметра ε_0 должно приводить к малому изменению значения задачи $\min_X F_{\varepsilon_0}$ и «малому» изменению множества минимизирующих элементов $\operatorname{argmin}_X F_{\varepsilon_0}$. Из определения видно, что доказательство вариационной устойчивости сводится к проверке свойств (i) и (ii) для последовательности $\{F_{\varepsilon_h}\}$. Естественным образом возникает вопрос, при каком определении понятия сходимости функционалов равенство $F_{\varepsilon_0} = \lim F_{\varepsilon_h}$ влечет выполнение условий (i) и (ii). Этим свойством обладает так называемая Г-сходимость функционалов [1]. Тем самым доказательство вариационной устойчивости задачи (P_ε) в точке ε_0 сводится к проверке равенства $F_{\varepsilon_0} = \Gamma\text{-}\lim\limits_{h\to\infty} F_{\varepsilon_h}$ при $\varepsilon_0 = \lim\limits_{h\to\infty} \varepsilon_h$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13–01–00287–а) и федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (соглашение № 8211 от 06.08.2012).

Понятие вариационной устойчивости очевидным образом переносится на задачи оптимального управления, зависящие от параметра. Действительно, любая такая задача может быть представлена в виде (P_ε). Для этого достаточно положить

$$F_\varepsilon(u,z) = J_\varepsilon(u,z) + \chi_{\mathscr{R}_\varepsilon}(u,z),$$

где $J_\varepsilon : \mathscr{U} \times \mathscr{Z} \to \mathbb{R}$ — целевой функционал, $\mathscr{U}$ — множество управлений, $\mathscr{Z}$ — пространство состояний, $\mathscr{R}_\varepsilon$ — множество допустимых пар $(u,z) \in \mathscr{U} \times \mathscr{Z}$ (решений управляемой системы, зависящей от параметра ε),

$$\chi_{\mathscr{R}_\varepsilon}(u,z) = \begin{cases} 0, & (u,z) \in \mathscr{R}_\varepsilon, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В данной статье рассмотрим задачи оптимального управления, в которых управляемая система описывается уравнением типа Вольтерра. В общем случае такое уравнение (не управляемое) имеет вид

$$z(t) = g(t, A[z](t)), \quad t \in \Omega, \tag{1}$$

где Ω — измеримое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$, $g : \Omega \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ — заданная функция, $A : L^q(\Omega;\mathbb{R}^m) \to L^p(\Omega;\mathbb{R}^l)$ — линейный ограниченный оператор. При этом предполагается, что оператор A обладает рядом дополнительных свойств, которые кратко обсудим в § 2. Отметим, что к виду (1) сводятся задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а также целый ряд начально-краевых задач для уравнений в частных производных. Подробное обсуждение уравнений типа Вольтерра можно найти в [2, 3].

Подход, предполагающий доказательство вариационной устойчивости методами теории Γ-сходимости функционалов, разработан в [4] и в дальнейшем применялся многими авторами при исследовании задач оптимального управления для различных классов распределенных систем [5–7]; именно он используется в данной статье. Другой метод, в целом схожий, но основанный на прямом использовании понятия сходимости множеств по Куратовскому [8], применялся в [9–11].

Статья организована следующим образом. В § 2 дается постановка задачи и приводятся основные предположения. В § 3 доказывается существование решений в задаче оптимального управления. В § 4 приводится сводка результатов из теории Γ-сходимости, необходимых для доказательства теоремы о вариационной устойчивости. Самому доказательству посвящен § 5. В § 6 приведены некоторые примеры использования полученных теорем.

§ 2. Постановка задачи

Пусть заданы измеримое ограниченное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и линейный ограниченный оператор $A : L^p(\Omega;\mathbb{R}^m) \to L^p(\Omega;\mathbb{R}^l)$, где $p \in [2,+\infty)$. Рассмотрим семейство задач оптимального управления, зависящее от параметра $h \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,

$$J_h(u,z) = \int\limits_\Omega f_h(t, A[z](t), u(t))\,dt \to \min, \tag{2}$$

$$z(t) = a_h(t, A[z](t)) + b_h(t, A[z](t))u(t), \quad t \in \Omega, \ u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^s), \tag{3}$$

где $f_h : \Omega \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, $a_h : \Omega \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$, $b_h : \Omega \times \mathbb{R}^l \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^s;\mathbb{R}^m)$, $h \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, — заданные функции. Здесь под $\mathscr{L}(\mathbb{R}^s;\mathbb{R}^m)$ понимается пространство всех линейных операторов (матриц) из $\mathbb{R}^s$ в $\mathbb{R}^m$. В дальнейшем для краткости будем использовать следующие обозначения:

$$\mathscr{X} = L^p(\Omega;\mathbb{R}^m), \quad \mathscr{U} = L^p(\Omega;\mathbb{R}^s), \quad \mathscr{V} = L^p(\Omega;\mathbb{R}^l), \quad \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}\cup\{\infty\}.$$

Решением управляемой системы (3) (при фиксированном h) назовем такую пару $(u,z)\in\mathscr{U}\times\mathscr{X}$, для которой (3) выполняется при п. в. $t\in\Omega$. Множество всех решений (при фиксированном h) обозначим через $\mathscr{R}_h$, а задачу (2), (3) назовем *задачей* (P_h).

Пусть $(X,\|\cdot\|_X)$ — банахово пространство. Пространство X, снабженное слабой топологией, обозначим через X_w. Такое же обозначение сохраним для подмножеств из X_w. Если последовательность $\{g_k\}\subset X$ слабо сходится к $g\in X$, будем писать $g_k\rightharpoonup g$. Символ $|\cdot|$ означает норму в конечномерном пространстве, μ_n — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $\Sigma(\Omega)$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств из $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, p^* — число, сопряженное к p, т. е. $1/p+1/p^*=1$.

Пусть $B: L^q(\Omega;\mathbb{R})\to L^p(\Omega;\mathbb{R})$ — линейный ограниченный оператор. Семейство всех измеримых по Лебегу множеств $H\subset\Omega$ такое, что для любого $y\in L^q(\Omega;\mathbb{R})$ сужение $B[y]|_H$ не зависит от значений $y(t)$ при $t\in\Omega\setminus H$, называют *системой вольтерровских множеств оператора* B. Систему множеств $\{H_i\}_{i=0}^k$ из этого семейства, для которой $\varnothing = H_0\subset H_1\subset\dots\subset H_k=\Omega$, называют *вольтерровской цепочкой оператора* B. Говорят, что вольтерровская цепочка является *δ-малой по мере*, если $\mu_n(H_i\setminus H_{i-1})<\delta$ для всех $i=1,\dots,k$. Наконец, оператор B назовем *вольтерровским*, если для каждого $\delta>0$ он обладает вольтерровской δ-малой по мере цепочкой множеств. Например, для оператора $B: L^1([0,T];\mathbb{R})\to L^2([0,T];\mathbb{R})$, определенного равенством $B[y](t)=\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau$, вольтерровской δ-малой по мере цепочкой множеств будет любая цепочка $\varnothing\subset [0,t_1]\subset[0,t_2]\subset\dots\subset[0,t_k]=[0,T]$, для которой $0<t_1<\delta$, $0<t_i-t_{i-1}<\delta$, $i=2,\dots,k$; тем самым этот оператор является вольтерровским.

Важное свойство вольтерровских операторов заключено в приведенной ниже лемме, доказательство которой можно найти в [3].

Лемма 2.1. *Пусть $B: L^q(\Omega;\mathbb{R})\to L^p(\Omega;\mathbb{R})$ — вольтерровский оператор и $p\ge q$. Тогда для каждого $y\in L^\sigma(\Omega;\mathbb{R})$, где $\sigma=\frac{pq}{p-q}$, оператор $B_{(y)}: L^q(\Omega;\mathbb{R})\to L^q(\Omega;\mathbb{R})$, определенный равенством $B_{(y)}[z]=yB[z]$, является квазинильпотентным, т. е. имеет нулевой спектральный радиус.*

В свою очередь, квазинильпотентные операторы обладают следующим замечательным свойством, которое является своеобразным аналогом классической леммы Гронуолла — Беллмана (см. [12, теорема 9.3]).

Лемма 2.2. *Пусть $B: L^q(\Omega;\mathbb{R})\to L^q(\Omega;\mathbb{R})$ — положительный квазинильпотентный оператор, $g\in L^q(\Omega;\mathbb{R})$. Тогда если функция $x\in L^q(\Omega;\mathbb{R})$ подчиняется неравенству $x\le Bx+g$, то она также подчиняется оценке $x\le y$, в которой y — единственное решение уравнения $y=By+g$, т. е. $y=(I-B)^{-1}g$, где I — тождественный оператор.*

Всюду в дальнейшем считаем, что имеют место следующие предположения.

$\mathscr{A}(a)$: существуют такие $\alpha>0$ и $C_a>0$, что для всех $v,v'\in\mathbb{R}^l$ и $h\in\overline{\mathbb{N}}$

(i) отображение $t\mapsto a_h(t,v)$ измеримо и

$$|a_h(t,v)-a_h(t,v')|\le\alpha|v-v'| \quad \text{для п. в. } t\in\Omega;$$

(ii) $|a_h(t,v)|\le C_a(1+|v|)$ для п. в. $t\in\Omega$;

(iii) $a_h(\cdot, v) \rightharpoonup a_\infty(\cdot, v)$ в $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ при $h \to \infty$.

$\mathscr{A}(b)$: существуют такие $\beta > 0$ и $C_b > 0$, что для всех $v, v' \in \mathbb{R}^l$ и $h \in \overline{\mathbb{N}}$

(i) отображение $t \mapsto b_h(t, v)$ измеримо и

$$\|b_h(t,v) - b_h(t,v')\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^s;\mathbb{R}^m)} \le \beta |v - v'| \quad \text{для п. в. } t \in \Omega;$$

(ii) $\|b_h(t,v)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^s;\mathbb{R}^m)} \le C_b$ для п. в. $t \in \Omega$;

(iii) $b_h(\cdot, v) \to b_\infty(\cdot, v)$ в $L^1(\Omega; \mathscr{L}(\mathbb{R}^s; \mathbb{R}^m))$ при $h \to \infty$.

$\mathscr{A}(A)$: линейный ограниченный оператор A удовлетворяет свойствам:

(i) существует положительный вольтерровский оператор

$$\widetilde{B} : L^{p/2}(\Omega; \mathbb{R}) \to L^p(\Omega; \mathbb{R})$$

такой, что его сужение B на $L^p(\Omega; \mathbb{R})$ мажорирует оператор A:

$$|A[z](t)| \le B[|z|](t), \quad t \in \Omega, \ z \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^m);$$

(ii) A — компактный оператор.

$\mathscr{A}(f)$: существуют число $\xi > 1$ и неубывающая функция $\rho \in C([0,1); \mathbb{R})$, удовлетворяющая равенству $\rho(0) = 0$, такие, что для всех $v, v' \in \mathbb{R}^l$, $u \in \mathbb{R}^s$ и $h \in \overline{\mathbb{N}}$

(i) отображение $t \mapsto f_h(t, v, u)$ измеримо;

(ii) $|u|^p \le f_h(t, v, u) \le \xi(1 + |v|^p + |u|^p)$ для п. в. $t \in \Omega$;

(iii) $|f_h(t,v,u) - f_h(t,v',u)| \le \rho(|v - v'|)(1 + |v|^p + |v'|^p + |u|^p)$ для п. в. $t \in \Omega$ при условии, что $|v - v'| < 1$;

(iv) для п. в. $t \in \Omega$ отображение $u \mapsto f_h(t, v, u)$ выпукло;

(v) $f_h^*(\cdot, v, u) \rightharpoonup f_\infty^*(\cdot, v, u)$ в $L^1(\Omega; \mathbb{R})$ при $h \to \infty$, где f_h^* обозначает функцию, сопряженную к f_h по последней переменной.

Целью данной статьи является доказательство следующих теорем.

Теорема 2.1. *Пусть имеют место предположения $\mathscr{A}(a)$, $\mathscr{A}(b)$, $\mathscr{A}(f)$, $\mathscr{A}(A)$. Тогда для любого $h \in \overline{\mathbb{N}}$ задача (P_h) имеет решение (u_h, z_h).*

Теорема 2.2. *Пусть имеют место предположения $\mathscr{A}(a)$, $\mathscr{A}(b)$, $\mathscr{A}(f)$, $\mathscr{A}(A)$. Тогда $\min(P_h) \to \min(P_\infty)$ при $h \to \infty$. Кроме того, если (u_h, z_h) — решение задачи (P_h) при $h \in \mathbb{N}$, то последовательность $\{(u_h, z_h)\}_{h\in\mathbb{N}}$ относительно секвенциально компактна в пространстве $\mathscr{U}_w \times \mathscr{Z}_w$ и любая ее точка сгущения (u_∞, z_∞) является решением задачи (P_∞).*

§ 3. Существование оптимального решения

Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма 3.1. *Для каждого $h \in \overline{\mathbb{N}}$ оператор*

$$\mathscr{G}_h(u,z)(t) = a_h(t, A[z](t)) + b_h(t, A[z](t))u(t), \quad t \in \Omega,$$

секвенциально непрерывен из $\mathscr{U}_w \times \mathscr{Z}_w$ в $\mathscr{Z}_w$.

Доказательство. Пусть $u_k \rightharpoonup u$, $z_k \rightharpoonup z$ и $g \in \mathscr{Z}^*$. Достаточно проверить равенства

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \langle g(t), a_h(t, A[z_k](t)) - a_h(t, A[z](t))\rangle \, dt = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Omega}\langle g(t), b_h(t, A[z_k](t))u_k(t) - b_h(t, A[z](t))u(t)\rangle\, dt = 0. \tag{5}$$

Докажем (5). Заметим, что

$$\int\limits_{\Omega}\langle g(t), b_h(t, A[z_k](t))u_h(t)\rangle\, dt = \int\limits_{\Omega}\langle b_h^*(t, A[z_k](t))g(t), u_h(t)\rangle\, dt.$$

Поскольку $u_k \rightharpoonup u$ в $\mathscr{U}$, достаточно показать, что

$$b_h^*(\cdot, A[z_k](\cdot))g(\cdot) \to b_h^*(\cdot, A[z](\cdot))g(\cdot) \quad \text{в } \mathscr{U}^*. \tag{6}$$

Положим $v_k = A[z_k]$ и $v = A[z]$. В силу компактности оператора A получим, что $v_k \to v$ в $\mathscr{V}$. Поэтому существует подпоследовательность $\{v_{k_j}\}$, сходящаяся к v почти всюду. Согласно $\mathscr{A}(b)$(i)

$$b_h^*(t, v_{k_j}(t))g(t) \to b_h^*(t, v(t))g(t) \quad \text{п. в. на } \Omega \text{ при } j \to \infty.$$

Учитывая $\mathscr{A}(b)$(i), имеем

$$|b_h^*(t, v_{k_j}(t))g(t)| \le C_b|g(t)|, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Поэтому по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$b_h^*(\cdot, v_{k_j}(\cdot))g(\cdot) \to b_h^*(\cdot, v(\cdot))g(\cdot) \quad \text{в } \mathscr{U}^*.$$

Применяя предыдущие рассуждения не к $\{v_k\}$, а к любой ее подпоследовательности $\{v_{k_j}\}$, заключаем, что из каждой подпоследовательности $\{b_h^*(\cdot, v_{k_j}(\cdot))g(\cdot)\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $b_h^*(\cdot, v(\cdot))g(\cdot)$ в $\mathscr{U}^*$. Отсюда следует, что также сама последовательность $\{b_h^*(\cdot, v_k(\cdot))g(\cdot)\}$ сходится к $b_h^*(\cdot, v(\cdot))g(\cdot)$ в $\mathscr{U}^*$, а значит, справедливы утверждение (6) и, как следствие, равенство (5).

Справедливость равенства (4) устанавливается аналогично. $\square$

Докажем существование решения в системе (3).

Теорема 3.1. *Пусть имеют место предположения $\mathscr{A}(a)$, $\mathscr{A}(b)$, $\mathscr{A}(A)$. Тогда при фиксированном $h \in \overline{\mathbb{N}}$ каждому управлению $u \in \mathscr{U}$ отвечает единственное решение z_h системы* (3).

Доказательство. Зафиксируем $h \in \overline{\mathbb{N}}$ и $u \in \mathscr{U}$. Предположим, что соответствующее решение z системы (3) существует. Тогда

$$z(t) = a_h(t, A[z](t)) + b_h(t, A[z](t))u(t) \quad \text{п. в. на } \Omega.$$

Поэтому в силу $\mathscr{A}(a)$(ii), $\mathscr{A}(b)$(ii) и $\mathscr{A}(A)$

$$\begin{aligned}|z(t)| \le C_a(1 + |A[z](t)|) + C_b|u(t)| &\le (C_a + C_b|u(t)|) + C_aB[|z|](t)\\ &= (C_a + C_b|u(t)|) + B_{(C_a)}[|z|](t) \quad \text{п. в. на } \Omega.\end{aligned}$$

Поскольку оператор $\widetilde{B}$ вольтерровский, вольтерровским будет также его сужение B. Поэтому согласно лемме 2.1 оператор $B_{(C_a)} : L^p(\Omega;\mathbb{R}) \to L^p(\Omega;\mathbb{R})$ квазинильпотентный. Применяя лемму 2.2, получим, что существует $y \in L^p(\Omega;\mathbb{R})$ такой, что

$$y = (C_a + C_b|u(t)|) + B_{(C_a)}[y](t) \quad \text{и} \quad |z(t)| \le y(t) \text{ п. в. на } \Omega.$$

Положим

$$G_h[z] = \mathscr{G}_h(z,u),\ z \in \mathscr{Z}, \quad K = \{z \in \mathscr{Z} : |z(t)| \le y(t) \text{ п. в. на } \Omega\}. \tag{7}$$

Множество K выпуклое и слабо компактное в $\mathscr{Z}$. Ввиду неравенств

$$|G_h[z](t)| \le (C_a + C_b|u(t)|) + B_{(C_a)}[|z|](t) \le (C_a + C_b|u(t)|) + B_{(C_a)}[y](t) = y(t)$$

и леммы 3.1 оператор G_h непрерывно отображает K_w в себя. Следовательно, в силу теоремы Шаудера G_h имеет неподвижную точку $\hat{z}$. По построению $\hat{z}$ является решением системы (3), соответствующим управлению u.

Пусть $\check{z} \in \mathscr{Z}$ — другое решение, соответствующее управлению u. Тогда

$$\begin{aligned}|\hat{z}(t) - \check{z}(t)| &\le \alpha|A[\hat{z}](t) - A[\check{z}](t)| + \beta|u(t)| \cdot |A[\hat{z}](t) - A[\check{z}](t)| \\ &\le (\alpha + \beta|u(t)|)B[|\hat{z} - \check{z}|](t) = (\alpha + \beta|u(t)|)\widetilde{B}[|\hat{z} - \check{z}|](t) \\ &= \widetilde{B}_{(\alpha+\beta|u|)}[|\hat{z} - \check{z}|](t) \quad \text{п. в. на } \Omega.\end{aligned}$$

Согласно предположению $\mathscr{A}(A)$ и лемме 2.1 оператор $\widetilde{B}_{(\alpha+\beta|u|)} : L^{p/2}(\Omega;\mathbb{R}) \to L^{p/2}(\Omega;\mathbb{R})$ квазинильпотентный. Применяя лемму 2.2, получим, что $|\hat{z}(t) - \check{z}(t)| \le 0$ п. в. на Ω. Тем самым $\hat{z} = \check{z}$, и теорема доказана. □

Замечание 3.1. Отметим, что если функция $y(\cdot)$, соответствующая оператору B, окажется ограниченной, то требование липшицевости для функций a и b можно будет ослабить до локальной липшицевости.

Доказательство теоремы 2.1. Зафиксируем $h \in \overline{\mathbb{N}}$. Пусть $\{(u_k, z_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{R}_h$ — минимизирующая последовательность в задаче (P_h). В силу $\mathscr{A}(f)$(ii) последовательность $\{u_k\}$ ограничена в $\mathscr{U}$. При доказательстве теоремы 3.1 показано, что

$$|z_k(t)| \le y_k(t) \quad \text{п. в. на } \Omega, \quad \text{где } y_k = (I - B_{(C_a)})^{-1}(C_a + C_b|u_k|). \tag{8}$$

Следовательно, из ограниченности последовательности $\{u_k\}$ вытекает ограниченность последовательности $\{z_k\}$ в $\mathscr{Z}$. Таким образом, (u_k, z_k) ограничена в $\mathscr{U} \times \mathscr{Z}$. Поэтому найдется подпоследовательность $\{(u_{k_j}, z_{k_j})\}$, сходящаяся в $\mathscr{U}_w \times \mathscr{Z}_w$ к некоторой точке (u, z). Согласно лемме 3.1 $(u, z) \in \mathscr{R}_h$.

С другой стороны, из $\mathscr{A}(f)$, компактности оператора A и [13, теорема 2.1] вытекает, что для каждого $h \in \overline{\mathbb{N}}$ функционал J_h секвенциально полунепрерывен снизу в пространстве $\mathscr{U}_w \times \mathscr{Z}_w$. Поэтому

$$J_h(u, z) \le \liminf_{j\to\infty} J_h(u_{h_j}, z_{h_j}) = \inf(P_h).$$

Теорема доказана. □

§ 4. Γ-сходимость

Пусть X — топологическое пространство, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\{F_h\}$ — последовательность функций из X в $\overline{\mathbb{R}}$. Функции, определенные равенствами

$$\Gamma_{\mathrm{seq}}(X^-) \liminf_{h\to\infty} F_h(x) = \inf_{x_h \to x} \liminf_{h\to\infty} F_h(x_h),$$

$$\Gamma_{\mathrm{seq}}(X^-) \limsup_{h\to\infty} F_h(x) = \inf_{x_h \to x} \limsup_{h\to\infty} F_h(x_h),$$

назовем соответственно *нижним и верхним секвенциальными* Γ-*пределами последовательности* $\{F_h\}$. Если

$$\Gamma_{\mathrm{seq}}(X^-)\liminf_{h\to\infty} F_h = \Gamma_{\mathrm{seq}}(X^-)\limsup_{h\to\infty} F_h = F,$$

то будем писать $F = \Gamma_{\mathrm{seq}}(X^-)\lim\limits_{h\to\infty} F_h$ и говорить, что F является *секвенциальным* Γ-*пределом последовательности* $\{F_h\}$.

Следующее утверждение обосновывает использование понятия Γ-сходимости для изучения вопросов вариационной устойчивости.

Утверждение 4.1. *Пусть X — топологическое пространство, $\{F_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ — последовательность функций из X в $\overline{\mathbb{R}}$, $F = \Gamma_{\mathrm{seq}}(X^-)\lim\limits_{h\to\infty} F_h$. Предположим, что для каждого $h \in \mathbb{N}$ функция F_h достигает минимума на множестве X в некоторой точке x_h и, кроме того, получившаяся при этом последовательность $\{x_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ относительно секвенциально компактна. Тогда для каждой точки сгущения x последовательности $\{x_h\}$ имеет место равенство*

$$F(x) = \min_X F = \lim_{h\to\infty} F_h(x_h).$$

Доказательство. Выберем из $\{x_h\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_{h_k}\}$ и обозначим через x ее предел. Положим

$$y_h = \begin{cases} x_{h_k}, & \text{если } h = h_k, \\ x & \text{иначе.} \end{cases}$$

По построению $y_h \to x$. Поэтому ввиду определения секвенциального Γ-предела

$$F(x) \le \liminf_{h\to\infty} F_h(y_h).$$

Очевидно, что

$$\liminf_{h\to\infty} F_h(y_h) \le \liminf_{k\to\infty} F_{h_k}(x_{h_k}) \le \limsup_{k\to\infty} F_{h_k}(x_{h_k}) \le \limsup_{h\to\infty} F_h(x_h).$$

Наконец, согласно [4, утверждение 2.1]

$$\limsup_{h\to\infty} F_h(x_h) \le \inf_X F.$$

Объединяя полученные выше неравенства, заключаем, что $F(x) \le \inf\limits_X F$ и, кроме того, $F(x) = \lim\limits_{k\to\infty} F_{h_k}(x_{h_k})$. Тем самым доказано, что $F(x) = \min_X F$.

С другой стороны, в силу относительной компактности множества $\{x_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ и предыдущих рассуждений из любой подпоследовательности последовательности $\{F_h(x_h)\}_{h\in\mathbb{N}}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к числу $\min_X F$. Следовательно, $\lim\limits_{h\to\infty} F_h(x_h) = \min_X F$. $\square$

По аналогии с секвенциальными Γ-пределами функций одной переменной можно определить повторные секвенциальные Γ-пределы функций двух переменных. А именно, пусть X, Y — топологические пространства, $\{F_h\}$ — последовательность функций из $X \times Y$ в $\overline{\mathbb{R}}$. Положим

$$\Gamma_{\mathrm{seq}}(X^{\varepsilon_1}, Y^{\varepsilon_2})\liminf_{h\to\infty} F_h(x,y) = \underset{x_h\to x}{Z(\varepsilon_1)}\,\underset{y_h\to y}{Z(\varepsilon_2)}\liminf_{h\to\infty} F_h(x_h, y_h),$$

$$\Gamma_{\rm seq}(X^{\varepsilon_1}, Y^{\varepsilon_2}) \limsup_{h\to\infty} F_h(x,y) = Z(\varepsilon_1) Z(\varepsilon_2) \limsup_{\substack{x_h\to x \\ y_h \to y \\ h\to\infty}} F_h(x_h, y_h).$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-,+\}$, при этом $Z(-)$ означает inf, а $Z(+)$ — sup. Например,

$$\Gamma_{\rm seq}(X^{+}, Y^{-}) \liminf_{h\to\infty} F_h(x,y) = \sup_{x_h\to x} \inf_{y_h\to y} \liminf_{h\to\infty} F_h(x_h, y_h).$$

Как и прежде, если

$$\Gamma_{\rm seq}(X^{\varepsilon_1}, Y^{\varepsilon_2}) \liminf_{h\to\infty} F_h = \Gamma_{\rm seq}(X^{\varepsilon_1}, Y^{\varepsilon_2}) \limsup_{h\to\infty} F_h,$$

то пишем $\Gamma_{\rm seq}(X^{\varepsilon_1}, Y^{\varepsilon_2}) \lim\limits_{h\to\infty} F_h$. Кроме того, если Γ-предел не зависит от знака, с которым в него входит топологическое пространство, опускаем этот знак. Например, в случае

$$\Gamma_{\rm seq}(X^{-}, Y^{-}) \liminf_{h\to\infty} F_h = \Gamma_{\rm seq}(X^{+}, Y^{-}) \liminf_{h\to\infty} F_h$$

пишем $\Gamma_{\rm seq}(X, Y^{-}) \liminf\limits_{h\to\infty} F_h$.

Утверждение 4.2. *Пусть X, Y — топологические пространства, $\{F_h\}$, $\{G_h\}$ — последовательности функций из $X\times Y$ в $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда*

(i) $\Gamma_{\rm seq}(X^{-}, Y^{-}) \lim\limits_{h\to\infty} F_h = \Gamma_{\rm seq}((X\times Y)^{-}) \lim\limits_{h\to\infty} F_h$;

(ii) *если $\{F_h\}$ и $\{G_h\}$ такие, что $\Gamma_{\rm seq}(X^{-}, Y) \lim\limits_{h\to\infty} F_h$ и $\Gamma_{\rm seq}(X, Y^{-}) \lim\limits_{h\to\infty} G_h$ существуют, то*

$$\Gamma_{\rm seq}(X^{-}, Y^{-}) \lim_{h\to\infty} (F_h + G_h) = \Gamma_{\rm seq}(X^{-}, Y) \lim_{h\to\infty} F_h + \Gamma_{\rm seq}(X, Y^{-}) \lim_{h\to\infty} G_h.$$

Доказательство см. в [4].

§ 5. Вариационная устойчивость

Для того чтобы воспользоваться результатами § 4, положим

$$F_h = J_h + \chi_{\mathscr{R}_h}, \quad h \in \overline{\mathbb{N}},$$

где через $\chi_{\mathscr{R}_h}$ обозначена индикаторная функция множества $\mathscr{R}_h$, т. е.

$$\chi_{\mathscr{R}_h}(u,z) = \begin{cases} 0, & \text{если } (u,z) \in \mathscr{R}_h, \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 2.2 будет следствием утверждения 4.1, если доказать, что

$$\Gamma_{\rm seq}((\mathscr{U}_w \times \mathscr{Z}_w)^{-}) \lim_{h\to\infty} F_h = F_\infty. \tag{9}$$

В силу утверждения 4.2 для этого достаточно проверить равенства

$$\Gamma_{\rm seq}(\mathscr{U}_w^{-}, \mathscr{Z}_w) \lim_{h\to\infty} J_h = J_\infty, \tag{10}$$

$$\Gamma_{\rm seq}(\mathscr{U}_w, \mathscr{Z}_w^{-}) \lim_{h\to\infty} \chi_{\mathscr{R}_h} = \chi_{\mathscr{R}_\infty}. \tag{11}$$

5.1. Целевой функционал. Докажем (10). Положим

$$I_h(u,v,Q) = \int\limits_Q f_h(t, v(t), u(t))\, dt,$$

где $u \in \mathscr{U}$, $v \in \mathscr{V}$, $Q \in \Sigma(\Omega)$, $h \in \overline{\mathbb{N}}$.

Лемма 5.1. *Пусть $h \in \overline{\mathbb{N}}$, $Q \in \Sigma(\Omega)$. Тогда*
(i) *для каждого $u \in \mathscr{U}$ отображение $v \mapsto I_h(u, v, Q)$ непрерывно из $\mathscr{V}$ в $\mathbb{R}$,*
(ii) *для каждого $v \in \mathscr{V}$ отображение $u \mapsto I_h(u, v, Q)$ непрерывно из $\mathscr{U}$ в $\mathbb{R}$.*

Доказательство. 1. Предположим, что $v_k \to v$ в $\mathscr{V}$. Тогда последовательность v_k сходится к v по мере, т. е. для любого $0 < \eta < 1$

$$\lim_{k\to\infty} \mu_n(E_{k,\eta}) = 0, \quad \text{где } E_{k,\eta} = \{t \in Q : |v_k(t) - v(t)| \geq \eta\}.$$

В силу $\mathscr{A}(f)$(ii) и $\mathscr{A}(f)$(iii)

$$|I_h(u, v_k, Q) - I_h(u, v, Q)| \leq \rho(\eta) \int\limits_{Q\setminus E_{k,\eta}} (1 + |v(t)|^p + |v_k(t)|^p + |u(t)|^p)\, dt + \xi \int\limits_{E_{k,\eta}} (2 + |v(t)|^p + |v_k(t)|^p + |2u(t)|^p)\, dt.$$

Поскольку последовательность $\{v_k\}$ сходится в $\mathscr{V}$, последовательность $\{|v_k|^p\}$ сходится в $L^1(\Omega; \mathbb{R})$ и тем самым является равномерно интегрируемой. Поэтому, переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\limsup_{k\to\infty} |I_h(u, v_k, Q) - I_h(u, v, Q)| \leq \rho(\eta) \int\limits_Q (1 + |2v(t)|^p + |u(t)|^p)\, dt.$$

Из этого неравенства и произвольности η следует, что

$$\lim_{k\to\infty} |I_h(u, v_k, Q) - I_h(u, v, Q)| = 0.$$

Тем самым (i) доказано.

2. Из $\mathscr{A}(f)$(ii) и $\mathscr{A}(f)$(iv) вытекает, что функции $u \mapsto I_h(u, v, Q)$, $h \in \overline{\mathbb{N}}$, выпуклы и ограничены на любом замкнутом шаре из $\mathscr{U}$. Поэтому в соответствии с [1, утверждение 5.11] они локально липшицевы. $\square$

Таким образом, функции $u \mapsto I_h(u, v, Q)$ выпуклы и непрерывны, что позволяет определить сопряженные функции $u^* \mapsto I_h^*(u^*, v, Q)$, для которых согласно [14, гл. IV, утверждение 1.2] имеет место равенство

$$I_h^*(u^*, v, Q) = \int\limits_Q f_h^*(t, v(t), u^*(t))\, dt.$$

При этом из $\mathscr{A}(f)$(ii) получим оценку

$$\xi^{-\frac{p^*}{p}} \cdot \frac{p}{p^*} \cdot \left[\frac{|w|}{p}\right]^{p^*} - \xi(1 + |v|^p) \leq f_h^*(t, v, w) \leq \frac{p}{p^*} \cdot \left[\frac{|w|}{p}\right]^{p^*} \quad \text{п. в. на } \Omega, \tag{12}$$

где $p^* = p/(p-1)$.

Обозначим через $\mathscr{U}_s^*$ и $\mathscr{V}_s$ совокупности всех простых функций из $\mathscr{U}^*$ и $\mathscr{V}$.

Лемма 5.2. *Для любых $u^* \in \mathscr{U}^*$, $v \in \mathscr{V}_s$ и $Q \in \Sigma(\Omega)$ имеет место равенство*

$$I_\infty^*(u^*, v, Q) = \lim_{h\to\infty} I_h^*(u^*, v, Q). \tag{13}$$

Доказательство. В силу предположения $\mathscr{A}(f)$(v) равенство (13) справедливо для всех $u^* \in \mathscr{U}_s^*$ и $v \in \mathscr{V}_s$. Воспользовавшись оценкой (12) и утверждением 5.11 в [1], заключаем, что семейство функций $u^* \mapsto I_h^*(u^*, v, Q)$, $h \in \overline{\mathbb{N}}$, равностепенно непрерывно на $\mathscr{U}^*$. Поскольку на каждом равностепенно непрерывном семействе функций топология поточечной сходимости на плотном подмножестве пространства (а в данном случае $\mathscr{U}^*_s$ плотно в $\mathscr{U}^*$) совпадает с топологией поточечной сходимости на всем пространстве [15, с. 198], лемма доказана. $\square$

Лемма 5.3. *Для любого* $Q \in \Sigma(\Omega)$ *и любого* $u \in \mathscr{U}$ *имеет место равенство*

$$\inf_{u_h \rightharpoonup u} \liminf_{h\to\infty} \int\limits_Q |u_h(t)|^p\,dt = \inf_{u_h \rightharpoonup u} \limsup_{h\to\infty} \int\limits_Q |u_h(t)|^p\,dt = \int\limits_Q |u(t)|^p\,dt.$$

Доказательство. Поскольку $u_h \rightharpoonup u$, то $\|u\|_{\mathscr{U}} \le \liminf \|u_h\|_{\mathscr{U}}$, поэтому

$$\int\limits_Q |u(t)|^p\,dt \le \liminf_{h\to\infty} \int\limits_Q |u_h(t)|^p\,dt.$$

С другой стороны, выбрав $u_h \to u$, получим

$$\limsup_{h\to\infty} \int\limits_Q |u_h(t)|^p\,dt = \int\limits_Q |u(t)|^p\,dt,$$

что завершает доказательство леммы. $\square$

Пусть $v \in \mathscr{V}$ и $Q \in \Sigma(\Omega)$ фиксированы. Введем следующие обозначения:

$$I^-(\cdot, v, Q) = \Gamma_{\rm seq}(\mathscr{U}_w^-) \liminf_{h\to\infty} I_h(\cdot, v, Q),$$

$$I^+(\cdot, v, Q) = \Gamma_{\rm seq}(\mathscr{U}_w^-) \limsup_{h\to\infty} I_h(\cdot, v, Q).$$

Лемма 5.4. *Пусть* $Q = Q_1 \cup Q_2$, *где* $Q_1, Q_2 \in \Sigma(\Omega)$ *и* $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$. *Тогда для любых* $u \in \mathscr{U}$ *и* $v \in \mathscr{V}$ *справедливо неравенство*

$$I^+(u, v, Q) \le I^+(u, v, Q_1) + I^+(u, v, Q_2).$$

Доказательство. Зафиксируем $u \in \mathscr{U}$ и $v \in \mathscr{V}$. Для каждого $i = 1, 2$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $\{u_h^i\} \subset \mathscr{U}$ такая, что $u_h^i \rightharpoonup u$ и

$$\limsup_{h\to\infty} I_h\bigl(u_h^i, v, Q_i\bigr) < I^+(u, v, Q_i) + \varepsilon. \tag{14}$$

Определим последовательность $\{u_h\} \subset \mathscr{U}$ следующим образом:

$$u_h(t) = u_h^i(t),\ t \in Q_i,\ i = 1, 2, \quad u_h(t) = u(t),\ t \in \Omega \setminus Q.$$

Поскольку $u_h^i|_{Q_i} \rightharpoonup u|_{Q_i}$ в $L^p(Q_i; \mathbb{R}^s)$, то $u_h \rightharpoonup u$ в $\mathscr{U}$. Кроме того, по построению

$$I_h(u_h, v, Q) = I_h(u_h, v, Q_1) + I_h(u_h, v, Q_2).$$

Поэтому согласно (14)

$$\begin{aligned} I^+(u, v, Q) \le \limsup_{h\to\infty} I_h(u_h, v, Q) \le \limsup_{h\to\infty} I_h(u_h, v, Q_1) + \limsup_{h\to\infty} I_h(u_h, v, Q_2) \\ < I^+(u, v, Q_1) + I^+(u, v, Q_2) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает утверждение леммы. $\square$

Лемма 5.5. *Для любых* $v \in \mathscr{V}$ *и* $Q \in \Sigma(\Omega)$ *имеет место равенство*

$$I_\infty(\cdot, v, Q) = \Gamma_{\rm seq}(\mathscr{U}_w^-) \lim_{h\to\infty} I_h(\cdot, v, Q). \tag{15}$$

Доказательство. 1. Из $\mathscr{A}(f)$(ii), леммы 5.2 и [16, следствие 3.13] вытекает, что равенство (15) справедливо для любого $v \in \mathscr{V}_s$.

2. Пусть Q компактно и сужение v на Q непрерывно. Выберем последовательность $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$, сходящуюся к нулю при $k \to \infty$. Тогда существует последовательность функций $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{V}_s$ такая, что $|v_k(t) - v(t)| \le \eta_k$, $t \in Q$. Согласно $\mathscr{A}(f)$(iii)

$$I_h(u_h, v, Q) \le I_h(u_h, v_k, Q) + \rho(\eta_k) \int\limits_Q (1 + |v(t)|^p + |v_k(t)|^p + |u_h(t)|^p)\, dt, \tag{16}$$

$$I_h(u_h, v_k, Q) \le I_h(u_h, v, Q) + \rho(\eta_k) \int\limits_Q (1 + |v(t)|^p + |v_k(t)|^p + |u_h(t)|^p)\, dt. \tag{17}$$

Переходя к верхнему пределу в (16) при $h \to \infty$, а затем вычисляя inf по всем последовательностям $\{u_h\}$, слабо сходящимся к u, с учетом равенства (15), установленного для $v \in \mathscr{V}_s$, и леммы 5.3 получим

$$I^+(u, v, Q) \le I_\infty(u, v_k, Q) + \rho(\eta_k) \int\limits_Q (1 + |v(t)|^p + |v_k(t)|^p + |u(t)|^p)\, dt.$$

Аналогично, переходя в (17) к нижнему пределу при $h \to \infty$, имеем

$$I_\infty(u, v_k, Q) \le I^-(u, v, Q) + \rho(\eta_k) \int\limits_Q (1 + |v(t)|^p + |v_k(t)|^p + |u(t)|^p)\, dt.$$

Устремляя в последних двух неравенствах k в бесконечность и применяя лемму 5.1(i), получаем $I^+(u, v, Q) \le I_\infty(u, v, Q) \le I^-(u, v, Q)$, что и требовалось.

3. Перейдем к общему случаю: $v \in \mathscr{V}$. Пусть $\varepsilon_k \to 0$. Согласно теореме Лузина существует возрастающая по включению последовательность компактных множеств $Q_k \subset Q$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_n(Q_k) = \mu_n(Q)$ и сужение v на Q_k является непрерывной функцией. Согласно результатам п. 2

$$I^+(u, v, Q_k) = I_\infty(u, v, Q_k) = I^-(u, v, Q_k).$$

Поэтому с учетом леммы 5.4 и $\mathscr{A}(f)$(ii)

$$\begin{aligned} I^+(u, v, Q) &\le I^+(u, v, Q_k) + \xi \int\limits_{Q\setminus Q_k} (1 + |v(t)|^p + |u(t)|^p)\, dt \\ &= I_\infty(u, v, Q_k) + \xi \int\limits_{Q\setminus Q_k} (1 + |v(t)|^p + |u(t)|^p)\, dt \\ &= I^-(u, v, Q_k) + \xi \int\limits_{Q\setminus Q_k} (1 + |v(t)|^p + |u(t)|^p)\, dt \\ &\le I^-(u, v, Q) + \xi \int\limits_{Q\setminus Q_k} (1 + |v(t)|^p + |u(t)|^p)\, dt. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$I^+(u, v, Q) \le I_\infty(u, v, Q) \le I^-(u, v, Q).$$

Лемма доказана. □

Теорема 5.1. *При выполнении предположений* $\mathscr{A}(f)$

$$\Gamma_{\mathrm{seq}}(\mathscr{U}_w^-, \mathscr{V}) \lim_{h\to\infty} I_h(\cdot,\cdot,\Omega) = I_\infty(\cdot,\cdot,\Omega).$$

Доказательство. 1. Зафиксируем $u \in \mathscr{U}$ и $v \in \mathscr{V}$. Достаточно показать, что

$$\inf_{u_h \rightharpoonup u} \sup_{v_h \to v} \limsup_{h\to\infty} I_h(u_h, v_h, \Omega) \le I_\infty(u, v, \Omega) \le \inf_{u_h \rightharpoonup u} \inf_{v_h \to v} \liminf_{h\to\infty} I_h(u_h, v_h, \Omega). \tag{18}$$

2. Пусть $u_h \rightharpoonup u$ и $v_h \to v$. Согласно теореме Егорова существует возрастающая последовательность компактов Q_k из Ω такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_n(Q_k) = \mu_n(\Omega)$ и на каждом Q_k последовательность v_h сходится к v равномерно. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и возьмем произвольное $0 < \delta < 1$. Из $\mathscr{A}(f)$(ii) и $\mathscr{A}(f)$(iii) вытекает, что при достаточно больших h

$$I_h(u_h, v, Q_k) \le (1 + \rho(\delta)) I_h(u_h, v_h, \Omega) + \rho(\delta) \int\limits_\Omega (1 + |v_h(t)|^p + |v(t)|^p)\, dt. \tag{19}$$

Из этого неравенства и леммы 5.5 получаем

$$I_\infty(u, v, Q_k) \le (1 + \rho(\delta)) \liminf_{h\to\infty} I_h(u_h, v_h, \Omega) + \rho(\delta) \int\limits_\Omega (1 + 2|v(t)|^p)\, dt.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \to \infty$ и учитывая произвольность δ, приходим к неравенству $I_\infty(u, v, \Omega) \le \liminf\limits_{h\to\infty} I_h(u_h, v_h, \Omega)$. Поскольку последовательности $v_h \to v$ и $u_h \rightharpoonup u$ были выбраны произвольно,

$$I_\infty(u, v, \Omega) \le \inf_{u_h \rightharpoonup u} \inf_{v_h \to v} \liminf_{h\to\infty} I_h(u_h, v_h, \Omega).$$

Тем самым правая часть неравенства (18) доказана.

3. Пусть $v_h \to v$. Согласно лемме 5.5 и [1, утверждение 8.10] существует последовательность $u_h \rightharpoonup u$ такая, что

$$I_\infty(u, v, \Omega) = \lim_{h\to\infty} I_h(u_h, v, \Omega) \tag{20}$$

и, кроме того,

$$I_\infty(u, v, Q_k) \le \liminf_{h\to\infty} I_h(u_h, v, Q_k).$$

Следовательно, в силу леммы 5.4

$$\begin{aligned} \limsup_{h\to\infty} I_h(u_h, v, \Omega \setminus Q_k) &\le \limsup_{h\to\infty} I_h(u_h, v, \Omega) - \liminf_{h\to\infty} I_h(u_h, v, Q_k) \\ &\le I_\infty(u, v, \Omega) - I_\infty(u, v, Q_k) = I_\infty(u, v, \Omega \setminus Q_k). \end{aligned} \tag{21}$$

Зафиксируем $0 < \delta < 1$. По аналогии с (19) получим, что при достаточно больших h

$$I_h(u_h, v_h, Q_k) \le (1 + \rho(\delta)) I_h(u_h, v, \Omega) + \rho(\delta) \int\limits_\Omega (1 + |v_h(t)|^p + |v(t)|^p)\, dt.$$

Из этого неравенства и $\mathscr{A}(f)$(ii) вытекает, что при достаточно больших h

$$\begin{aligned}I_h(u_h, v_h, \Omega) &= I_h(u_h, v_h, Q_k) + I_h(u_h, v_h, \Omega \setminus Q_k) \\ &\le (1+\rho(\delta))I_h(u_h, v, \Omega) + \rho(\delta)\int\limits_\Omega (1 + |v_h(t)|^p + |v(t)|^p)\,dt \\ &\quad + \xi I_h(u_h, v, \Omega \setminus Q_k) + \xi \int\limits_{\Omega\setminus Q_k} (1 + |v_h(t)|^p)\,dt.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом (20) и (21) получим

$$\begin{aligned}\limsup_{h\to\infty} I_h(u_h, v_h, \Omega) &\le (1+\rho(\delta))I_\infty(u, v, \Omega) + \rho(\delta)\int\limits_\Omega (1 + 2|v(t)|^p)\,dt \\ &\quad + \xi I_\infty(u, v, \Omega \setminus Q_k) + \xi \limsup_{h\to\infty} \int\limits_{\Omega\setminus Q_k} (1 + |v_h(t)|^p)\,dt.\end{aligned}$$

Поскольку последовательность $|v_h|^p$ сходится в пространстве $L^1(\Omega;\mathbb{R})$, она равномерно интегрируема. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_n(\Omega \setminus Q_k) = 0$, переходя к пределу в последнем неравенстве при $k \to \infty$ и учитывая произвольность $0 < \delta < 1$, получим

$$\limsup_{h\to\infty} I_h(u_h, v_h, \Omega) \le I_\infty(u, v, \Omega).$$

Тем самым доказана левая часть неравенства (18). $\square$

Замечание 5.1. Утверждение теоремы 5.1 составляет содержание леммы 3.1 в [4]. Однако доказательство, приведенное нами, отличается от доказательства леммы 3.1, в котором, с нашей точки зрения, существуют пробелы.

Пусть $u_h \rightharpoonup u$ в $\mathscr{U}$ и $z_h \rightharpoonup z$ в $\mathscr{Z}$. Тогда в силу компактности оператора A последовательность $A[z_h]$ сходится к $A[z] = v$ в $\mathscr{V}$. Значит, множество всех последовательностей $\{v_h\}$, сходящихся к v, содержит в себе множество последовательностей вида $\{A[z_h]\}$ таких, что $z_h \rightharpoonup z$. Поэтому

$$\inf_{u_h\rightharpoonup u}\ \sup_{z_h\rightharpoonup z}\ \limsup_{h\to\infty} J_h(u_h, z_h) \le \inf_{u_h\rightharpoonup u}\ \sup_{v_h\to v}\ \limsup_{h\to\infty} I_h(u_h, v_h, \Omega),$$

$$\inf_{u_h\rightharpoonup u}\ \inf_{v_h\to v}\ \liminf_{h\to\infty} I_h(u_h, v_h, \Omega) \le \inf_{u_h\rightharpoonup u}\ \inf_{z_h\rightharpoonup z}\ \liminf_{h\to\infty} J_h(u_h, z_h).$$

Отсюда и из теоремы 5.1 вытекает равенство (10).

5.2. Управляемая система. Для доказательства равенства (11) нам потребуется следующая

Лемма 5.6. *Для любых последовательностей $\{v_h\} \subset \mathscr{V}$ и $\{u_h\} \subset \mathscr{U}$ таких, что $v_h \to v_\infty$ в $\mathscr{V}$ и $u_h \rightharpoonup u_\infty$ в $\mathscr{U}$,*

(1) *$a_h(\cdot, v_h(\cdot)) \to a_\infty(\cdot, v_\infty(\cdot))$ слабо в $\mathscr{Z}$;*

(2) *$b_h(\cdot, v_h(\cdot))u_h(\cdot) \to b_\infty(\cdot, v_\infty(\cdot))u_\infty(\cdot)$ слабо в $\mathscr{Z}$.*

Доказательство. 1. Докажем утверждение (2). Пусть $g \in \mathscr{Z}^*$. Заметим, что

$$\int\limits_\Omega \langle g(t), b_h(t, v_h(t))u_h(t)\rangle\,dt = \int\limits_\Omega \langle b_h^*(t, v_h(t))g(t), u_h(t)\rangle\,dt.$$

Поскольку $u_h \rightharpoonup u_\infty$ в $\mathscr{U}$, достаточно показать, что

$$b_h^*(\cdot, v_h(\cdot))g(\cdot) \to b_\infty^*(\cdot, v_\infty(\cdot))g(\cdot) \quad \text{в } \mathscr{U}^*. \tag{22}$$

2. Прежде всего докажем, что

$$\lim_{h\to\infty} \|b_h^*(\cdot, v(\cdot))g(\cdot) - b_\infty^*(\cdot, v(\cdot))g(\cdot)\|_{\mathscr{U}^*} = 0, \quad v \in \mathscr{V}. \tag{23}$$

Предположим, что $v \in \mathscr{V}_s$. Тогда ввиду $\mathscr{A}(b)$(iii) из последовательности $\{b_h^*(\cdot, v(\cdot))\}$ можно выделить подпоследовательность $\{b_{h_j}^*(\cdot, v(\cdot))\}$, сходящуюся к $b_\infty^*(\cdot, v(\cdot))$ п. в. на Ω. Отсюда следует, что для любого $g \in \mathscr{Z}^*$

$$b_{h_j}^*(t, v(t))g(t) \to b_\infty^*(t, v(t))g(t) \quad \text{п. в. на } \Omega \text{ при } j \to \infty.$$

Кроме того, в силу $\mathscr{A}(b)$(ii)

$$|b_h^*(t, v(t))g(t)| \le C_b|g(t)|, \quad h \in \overline{\mathbb{N}}. \tag{24}$$

Поэтому по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$b_{h_j}^*(\cdot, v(\cdot))g(\cdot) \to b_\infty^*(\cdot, v(\cdot))g(\cdot) \quad \text{в } \mathscr{U}^*.$$

Применяя предыдущие рассуждения не к $\{b_h^*(\cdot, v(\cdot))\}$, а к любой ее подпоследовательности $\{b_{h_j}^*(\cdot, v(\cdot))\}$, заключаем, что из каждой подпоследовательности $\{b_{h_j}^*(\cdot, v(\cdot))g(\cdot)\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $\{b_\infty^*(\cdot, v(\cdot))g(\cdot)\}$ в $\mathscr{U}^*$. Отсюда вытекает, что (23) выполняется для любой $v \in \mathscr{V}_s$.

3. Пусть $v \in \mathscr{V}$. Выберем последовательность простых функций $\{v_k\} \subset \mathscr{V}_s$, сходящуюся к v в $\mathscr{V}$. Ясно, что

$$\begin{aligned}\|b_h^*(\cdot, v(\cdot))g(\cdot) - b_\infty^*(\cdot, v(\cdot))g(\cdot)\|_{\mathscr{U}^*} &\le \|b_h^*(\cdot, v(\cdot))g(\cdot) - b_h^*(\cdot, v_k(\cdot))g(\cdot)\|_{\mathscr{U}^*} \\ &+ \|b_h^*(\cdot, v_k(\cdot))g(\cdot) - b_\infty^*(\cdot, v_k(\cdot))g(\cdot)\|_{\mathscr{U}^*} + \|b_\infty^*(\cdot, v_k(\cdot))g(\cdot) - b_\infty^*(\cdot, v(\cdot))g(\cdot)\|_{\mathscr{U}^*}.\end{aligned}$$

Согласно теореме Лузина существует возрастающая по включению последовательность компактов $\Omega_\nu \subset \Omega$ такая, что функция g непрерывна на каждом Ω_ν и $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mu_n(\Omega_\nu) = \mu_n(\Omega)$. В силу (24) и $\mathscr{A}(b)$(i) для всех $h \in \overline{\mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega |b_h^*(t, v(t))g(t) - b_h^*(t, v_k(t))g(t)|^{p^*}\, dt &\le \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\nu} (2C_b)^{p^*}|g(t)|^{p^*}\, dt \\ &+ \int\limits_{\Omega_\nu} \|b_h^*(t, v(t)) - b_h^*(t, v_k(t))\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^s;\mathbb{R}^m)} \cdot (2C_b)^{p^*-1} \cdot |g(t)|^{p^*}\, dt \\ &\le (2C_b)^{p^*-1} \cdot \max_{t\in\Omega_\nu} |g(t)|^{p^*} \cdot \beta\|v - v_k\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^l)} + \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\nu} (2C_b)^{p^*}|g(t)|^{p^*}\, dt.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|b_h^*(\cdot, v(\cdot))g(\cdot) - b_\infty^*(\cdot, v(\cdot))g(\cdot)\|_{\mathscr{U}^*} &\le \|b_h^*(\cdot, v_k(\cdot))g(\cdot) - b_\infty^*(\cdot, v_k(\cdot))g(\cdot)\|_{\mathscr{U}^*} \\ &+ 2\left[(2C_b)^{p^*-1} \cdot \max_{t\in\Omega_\nu} |g(t)|^{p^*} \cdot \beta\|v - v_k\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^l)} + \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\nu} (2C_b)^{p^*}|g(t)|^{p^*}\, dt\right]^{1/p^*}.\end{aligned}$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу последовательно при $h \to \infty$, $k \to \infty$ и $\nu \to \infty$, заключаем, что (23) справедливо для всех $v \in \mathscr{V}$.

4. Перейдем непосредственно к доказательству утверждения (22). Имеем

$$\|b_h^*(\cdot, v_h(\cdot))g(\cdot) - b_\infty^*(\cdot, v_\infty(\cdot))g(\cdot)\|_{\mathscr{U}^*} \le \|b_h^*(\cdot, v_h(\cdot))g(\cdot) - b_h^*(\cdot, v_\infty(\cdot))g(\cdot)\|_{\mathscr{U}^*} + \|b_h^*(\cdot, v_\infty(\cdot))g(\cdot) - b_\infty^*(\cdot, v_\infty(\cdot))g(\cdot)\|_{\mathscr{U}^*}.$$

Поэтому, рассуждая так же, как на шаге 3 доказательства, получим оценку

$$\|b_h^*(\cdot, v_h(\cdot))g(\cdot) - b_\infty^*(\cdot, v_\infty(\cdot))g(\cdot)\|_{\mathscr{U}^*} \le \|b_h^*(\cdot, v_\infty(\cdot))g(\cdot) - b_\infty^*(\cdot, v_\infty(\cdot))g(\cdot)\|_{\mathscr{U}^*}$$
$$+ \left[(2C_b)^{p^*-1} \cdot \max_{t\in\Omega_\nu} |g(t)|^{p^*} \cdot \beta\|v_h - v_\infty\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^l)} + \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\nu} (2C_b)^{p^*} |g(t)|^{p^*}\, dt.\right]^{1/p^*}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу последовательно при $h \to \infty$ и $\nu \to \infty$, докажем (22) и тем самым утверждение (2).

Утверждение (1) леммы доказывается аналогично. $\square$

Теорема 5.2. *При выполнении предположений $\mathscr{A}(a)$, $\mathscr{A}(b)$ и $\mathscr{A}(A)$*

$$\Gamma_{\mathrm{seq}}(\mathscr{U}_w, \mathscr{Z}_w^-) \lim_{h\to\infty} \chi_{\mathscr{R}_h} = \chi_{\mathscr{R}_\infty}.$$

Доказательство. 1. Нужно показать, что для любых $u \in \mathscr{U}$ и $z \in \mathscr{Z}$

$$\sup_{u_h \rightharpoonup u} \inf_{z_h \rightharpoonup z} \limsup_{h\to\infty} \chi_{\mathscr{R}_h}(u_h, z_h) \le \chi_{\mathscr{R}_\infty}(u, z) \le \inf_{u_h \rightharpoonup u} \inf_{z_h \rightharpoonup z} \liminf_{h\to\infty} \chi_{\mathscr{R}_h}(u_h, z_h). \quad (25)$$

Если $\chi_{\mathscr{R}_\infty}(u, z) = +\infty$, то левая часть неравенства (25) выполняется автоматически. Если $\inf\limits_{u_h \rightharpoonup u} \inf\limits_{z_h \rightharpoonup z} \liminf\limits_{h\to\infty} \chi_{\mathscr{R}_h}(u_h, z_h) = +\infty$, то автоматически выполняется правая часть этого неравенства. Поэтому для доказательства неравенства (25) достаточно установить справедливость двух утверждений:

(a) если $(u, z) \in \mathscr{R}_\infty$ и $u_h \rightharpoonup u$, то существует $z_h \rightharpoonup z$ такое, что $(u_h, z_h) \in \mathscr{R}_h$ для всех достаточно больших h;

(b) если $u_h \rightharpoonup u$, $z_h \rightharpoonup z$ и множество таких h, для которых имеет место включение $(u_h, z_h) \in \mathscr{R}_h$, бесконечно, то $(u, z) \in \mathscr{R}_\infty$.

2. Докажем (a). Пусть $(u, z) \in \mathscr{R}_\infty$ и $u_h \rightharpoonup u$. Для каждого $h \in \mathbb{N}$ обозначим через z_h решение системы (3), соответствующее управлению u_h. Таким образом, при почти всех $t \in \Omega$ справедливы равенства

$$z(t) = a_\infty(t, A[z](t)) + b_\infty(t, A[z](t))u(t),$$

$$z_h(t) = a_h(t, A[z_h](t)) + b_h(t, A[z_h](t))u_h(t).$$

Поскольку последовательность $\{u_h\}$ слабо сходящаяся, она ограниченная в $\mathscr{U}$. Поэтому, используя те же аргументы, что и при доказательстве теоремы 2.1, можно показать, что последовательность $\{z_h\}$ ограничена в $\mathscr{Z}$. Следовательно, существует подпоследовательность $\{z_{h_k}\}$, слабо сходящаяся к некоторому $\bar{z} \in \mathscr{Z}$. В силу компактности оператора A получаем, что $A[z_{h_k}] \to A[\bar{z}]$ в $\mathscr{V}$. Кроме того, $u_{h_k} \rightharpoonup u$ в $\mathscr{U}$ и при почти всех $t \in \Omega$

$$z_{h_k}(t) = a_{h_k}(t, A[z_{h_k}](t)) + b_{h_k}(t, A[z_{h_k}](t))u_{h_k}(t).$$

Отсюда согласно лемме 5.6 вытекает, что

$$\bar{z}(t) = a_\infty(t, A[\bar{z}](t)) + b_\infty(t, A[\bar{z}](t))u(t),$$

т. е. $\bar{z}$ является решением системы (3) при $h = \infty$, соответствующим управлению u. Теперь согласно теореме 3.1 $\bar{z} = z$. Таким образом, любая слабо сходящаяся подпоследовательность $\{z_{h_k}\}$ последовательности $\{z_h\}$ слабо сходится к z, а потому сама $\{z_h\}$ слабо сходится к z, что и требовалось доказать.

3. Докажем (b). Пусть $z_h \rightharpoonup z$, $u_h \rightharpoonup u$ и множество $\mathscr{J}$, состоящее из h, для которых имеет место включение $(u_h, z_h) \in \mathscr{R}_h$, бесконечно. Обозначим через $\bar{z}$ решение задачи (3) при $h = \infty$, соответствующее управлению u. Повторяя рассуждения, используемые при доказательстве утверждения (a), применительно к последовательности $\{(u_{h_k}, z_{h_k})\}_{h_k \in \mathscr{J}}$, получим $z = \bar{z}$. Следовательно, $(u, z) \in \mathscr{R}_\infty$. $\square$

5.3. Доказательство теоремы 2.2. В силу теоремы 2.1 для каждого $h \in \mathbb{N}$ существует оптимальное решение (u_h, z_h) задачи (P_h). Благодаря теоремам 5.1 и 5.2, а также утверждению 4.1 имеет место равенство (9). Поэтому согласно [4, утверждение 2.1]

$$\min(P_\infty) \geq \limsup_{h \to \infty} (\min(P_h)),$$

откуда вытекает, что последовательность $\{\min(P_h)\}$ ограничена. С другой стороны, в силу предположения $\mathscr{A}(f)$(ii) имеем $\min(P_h) \geq \|u_h\|^2_{\mathscr{U}}$. Значит, последовательность $\{u_h\}$ ограничена в $\mathscr{U}$. Тогда согласно неравенству (8) последовательность $\{z_h\}$ ограничена в $\mathscr{Z}$. Отсюда получаем, что последовательность $\{(u_h, z_h)\}$ относительно секвенциально компактна в $\mathscr{U}_w \times \mathscr{Z}_w$. Для завершения доказательства теоремы 2.2 достаточно применить утверждение 4.1.

§ 6. Примеры

Покажем, как, имея в своем распоряжении функции a_∞, b_∞, f_∞, можно построить функции a_h, b_h, f_h, $h \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие условиям $\mathscr{A}(a)$, $\mathscr{A}(b)$, $\mathscr{A}(f)$.

Пусть $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ — неотрицательная функция, равная нулю вне отрезка $[-1, 1]$ и такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^l} \eta(|x|)\, dx = \int_{|x| \leq 1} \eta(|x|)\, dx = 1.$$

Функцию $\eta_h(x) = h^l \eta(h|x|)$, $h \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^l$, называют *ядром усреднения*. Ясно, что a) $\eta_h \in C^\infty(\mathbb{R}^l; \mathbb{R})$ и $\eta_h \geq 0$; b) $\eta_h(x) \equiv 0$ при $|x| \geq 1/h$; c) $\int_{\mathbb{R}^l} \eta_h(x)\, dx = 1$. Для любой функции $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^l; \mathbb{R}^m)$ свертку

$$g_h(x) = (\eta_h * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^l} \eta_h(x - y) g(y)\, dy = \int_{|y| \leq \frac{1}{h}} \eta_h(y) g(x - y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^l,$$

называют *усреднением функции* g. Ниже нам потребуются два свойства усреднения: $g_h \in C^\infty(\mathbb{R}^l; \mathbb{R}^m)$ и $g_h \to g$ поточечно, если g непрерывна [17, теорема 6, дополнение C].

Утверждение 6.1. *Пусть $p = 2k$, где $k \in \mathbb{N}$, и для функций a_∞, b_∞, f_∞ выполняются условия $\mathscr{A}(a)$(i)(ii), $\mathscr{A}(b)$(i)(ii), $\mathscr{A}(f)$(i)(iv). Положим*

$$a_h(t, \cdot) = \eta_h * a_\infty(t, \cdot), \quad b_h(t, \cdot) = \eta_h * b_\infty(t, \cdot), \quad f_h(t, \cdot, u) = \eta_h * f_\infty(t, \cdot, u)$$

для всех $h \in \mathbb{N}$, $t \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}^s$. *Тогда функции* a_h, b_h, f_h, $h \in \overline{\mathbb{N}}$, *удовлетворяют предположениям* $\mathscr{A}(a)$, $\mathscr{A}(b)$, $\mathscr{A}(f)$.

Доказательство. Из свойств ядра усреднения вытекает, что a_h, b_h, f_h, $h \in \mathbb{N}$, удовлетворяют предположениям $\mathscr{A}(a)$(i), $\mathscr{A}(b)$(i),(ii), $\mathscr{A}(f)$(i),(iv) соответственно. Заметим, что

$$\eta_h * |v| = \int\limits_{|\zeta|\le\frac{1}{h}} \eta_h(\zeta)|v-\zeta|\,d\zeta \le |v| + \int\limits_{|\zeta|\le\frac{1}{h}} \eta_h(\zeta)|\zeta|\,d\zeta \le |v| + 1/h \le |v| + 1.$$

Поэтому для всех $h \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{R}^l$

$$|a_h(t,v)| \le 2C_a(1+|v|) \quad \text{п. в. на } \Omega. \tag{26}$$

Пусть C_k^j — биномиальные коэффициенты. Тогда

$$|v-\zeta|^p = (|v|^2 + |\zeta|^2 - 2\langle v,\zeta\rangle)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j(|v|^2+|\zeta|^2)^{k-j}\cdot(-2\langle v,\zeta\rangle)^j.$$

Обозначим через E_k множество всех четных неотрицательных чисел, не превосходящих k. Пользуясь тем, что $\eta_h(\zeta)$ зависит только от $|\zeta|$, получим

$$\eta_h * |v|^p = \int\limits_{|\zeta|\le\frac{1}{h}} \eta_h(\zeta) \sum_{j\in E_k} C_k^j(|v|^2+|\zeta|^2)^{k-j}\cdot(2\langle v,\zeta\rangle)^j\,d\zeta.$$

Отсюда следует, что $|v|^p \le \eta_h * |v|^p$. Кроме того, для всех $|v| \ge 1/h$

$$\eta_h * |v|^p \le \sum_{j\in E_k} C_k^j(2|v|^2)^{k-j}\cdot(2|v|^2)^j = 2^{p-1}|v|^p.$$

С другой стороны, для всех $|v| < 1/h$

$$\eta_h * |v|^p \le \sum_{j\in E_k} C_k^j(2h^{-2})^{k-j}\cdot(2h^{-2})^j = 2^{p-1}h^{-p} \le 2^{p-1}.$$

Следовательно, для всех $h \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}^s$, $v \in \mathbb{R}^l$

$$|v|^p \le f_h(t,v,u) \le 2^p\xi(1+|v|^p+|u|^p) \quad \text{п. в. на } \Omega. \tag{27}$$

Кроме того, для любых $h \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}^s$ и $v, v' \in \mathbb{R}^l$ таких, что $|v-v'| < 1$, имеем

$$\begin{aligned}|f_h(t,v,u) - f_h(t,v',u)| &\le \int\limits_{|\zeta|\le\frac{1}{h}} \eta_h(\zeta)|f(t,v-\zeta,u) - f(t,v'-\zeta,u)|\,d\zeta \\ &\le \rho(|v-v'|)(1+|u|^p+\eta_h*|v|^p+\eta_h*|v'|^p) \\ &\le 2^{p+1}\rho(|v-v'|)(1+|u|^p+|v|^p+|v'|^p) \quad \text{п. в. на } \Omega.\end{aligned} \tag{28}$$

Очевидно, что неравенства (26)–(28) справедливы и при $h = \infty$. Следовательно, имеют место предположения $\mathscr{A}(a)$(ii) и $\mathscr{A}(f)$(ii),(iii).

Поскольку отображения $v \mapsto a_\infty(t,v)$ и $v \mapsto b_\infty(t,v)$ непрерывны при п. в. $t \in \Omega$, из свойств усреднения вытекает, что при п. в. $t \in \Omega$

$$a_h(t,v) \to a_\infty(t,v), \quad b_h(t,v) \to b_\infty(t,v), \quad v \in \mathbb{R}^l.$$

С учетом уже доказанных условий $\mathscr{A}(a)$(ii) и $\mathscr{A}(b)$(ii), а также теоремы Лебега об ограниченной сходимости получим, что для каждого фиксированного $v \in \mathbb{R}^l$

$$a_h(\cdot, v) \to a_\infty(\cdot, v) \ \text{ в } L^p(\Omega; \mathbb{R}^m), \quad b_h(\cdot, v) \to b_\infty(\cdot, v) \ \text{ в } L^1(\Omega; \mathscr{L}(\mathbb{R}^s; \mathbb{R}^m)).$$

Таким образом, справедливы $\mathscr{A}(a)$(iii) и $\mathscr{A}(b)$(iii).

Аналогично предыдущему можно показать, что при п. в. $t \in \Omega$

$$f_h(t, v, u) \to f_\infty(t, v, u), \quad v \in \mathbb{R}^l, \ u \in \mathbb{R}^s.$$

Отсюда, из $\mathscr{A}(f)$(ii),(iv) и [1, утверждение 5.12] вытекает, что

$$f_\infty(t, v, \cdot) = \Gamma_{\mathrm{seq}}((\mathbb{R}^s)^-) \lim_{h\to\infty} f_h(t, v, \cdot), \quad v \in \mathbb{R}^s, \ \text{п. в. } t \in \Omega.$$

Поэтому согласно [16, следствие 3.13] для п. в. $t \in \Omega$

$$f_h^*(t, v, u^*) \to f_\infty^*(t, v, u^*), \quad v \in \mathbb{R}^l, \ u^* \in \mathbb{R}^s.$$

Используя $\mathscr{A}(f)$(ii) и теорему Лебега об ограниченной сходимости, получим, что для всех $v \in \mathbb{R}^l$, $u^* \in \mathbb{R}^s$

$$f_h^*(\cdot, v, u^*) \to f_\infty^*(\cdot, v, u^*) \quad \text{в } L^1(\Omega; \mathbb{R}).$$

Тем самым установлена справедливость условия $\mathscr{A}(f)$(v) и завершено доказательство утверждения. $\square$

6.1. Система Гурса — Дарбу. Пусть $\Omega = [0, T_1] \times [0, T_2]$, $\mathscr{X} = \mathscr{V} = L^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $\mathscr{U} = L^2(\Omega; \mathbb{R}^s)$. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\widetilde{J}(u, x) = \int\limits_\Omega \tilde{f}(t, x(t), u(t))\, dt \to \min, \tag{29}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t_1 \partial t_2} = \tilde{a}(t, x) + \tilde{b}(t, x) u(t), & t \in \Omega, \\ x(t_1, 0) = \varphi_1(t_1), & t_1 \in [0, T_1], \quad u \in \mathscr{U}, \\ x(0, t_2) = \varphi_2(t_2), & t_2 \in [0, T_2], \end{cases} \tag{30}$$

где $\tilde{a} : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{b} : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^s; \mathbb{R}^m)$ — ограниченные функции, измеримые по первой переменной и такие, что для любых $x, x' \in \mathbb{R}^m$

$$|\tilde{a}(t, x) - \tilde{a}(t, x')| \le \alpha |x - x'|, \quad \|\tilde{b}(t, x) - \tilde{b}(t, x')\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^s; \mathbb{R}^m)} \le \beta |x - x'| \quad \text{п. в. на } \Omega;$$

$\varphi_i : [0, T_i] \to \mathbb{R}^m$ $(i = 1, 2)$ — абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие равенству $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$; $\tilde{f} : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ — функция, измеримая по первой переменной, выпуклая по последней и, кроме того, для любых $x, x' \in \mathbb{R}^m$ таких, что $|x - x'| < 1$, и любых $u \in \mathbb{R}^s$

$$|\tilde{f}(t, x, u) - \tilde{f}(t, x', u)| \le \rho(|x - x'|)(1 + |x|^2 + |x'|^2 + |u|^2),$$

$$|u|^2 \le |\tilde{f}(t, x, u)| \le \xi(1 + |x|^2 + |u|^2) \ \text{ п. в. на } \Omega,$$

где $\xi > 1$, $\rho : [0, 1) \to \mathbb{R}$ — непрерывная неубывающая функция, $\rho(0) = 0$.

Пару (x, u), $x \in C(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $u \in \mathscr{U}$, назовем *решением системы* (30), если для всех $t = (t_1, t_2) \in \Omega$

$$x(t_1, t_2) = \varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2) - \varphi_1(0) + \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^{t_2} [\tilde{a}(\tau_1, \tau_2, x(\tau_1, \tau_2)) + \tilde{b}(\tau_1, \tau_2, x(\tau_1, \tau_2)) u(\tau_1, \tau_2)]\, d\tau_1\, d\tau_2.$$

Для всех $t = (t_1, t_2) \in \Omega$, $v \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathscr{Z}$ положим

$$A[z](t_1,t_2) = \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} z(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2,$$

$$a_\infty(t,v) = \tilde{a}(t,\varphi_1(t_1)+\varphi_2(t_2)-\varphi_1(0)+v),$$
$$b_\infty(t,v) = \tilde{b}(t,\varphi_1(t_1)+\varphi_2(t_2)-\varphi_1(0)+v),$$
$$f_\infty(t,v,u) = \tilde{f}(t,\varphi_1(t_1)+\varphi_2(t_2)-\varphi_1(0)+v,u).$$

Исходя из определения решения системы (30) задача оптимального управления (29), (30) может быть записана в виде (2), (3) для $h = \infty$. При этом выполнение условий $\mathscr{A}(a)$(i),(ii), $\mathscr{A}(b)$(i),(ii), $\mathscr{A}(f)$(i)–(iv) для функций a_∞, b_∞, f_∞ очевидно.

Поскольку $\mathscr{Z}$ рефлексивно и оператор A отображает слабо сходящиеся последовательности из $\mathscr{Z}$ в сильно сходящиеся последовательности из $C(\Omega;\mathbb{R}^m)$ (см. [18]), имеет место $\mathscr{A}(A)$(ii). В качестве $\widetilde{B}$ возьмем оператор

$$\widetilde{B}[v](t_1,t_2) = \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} v(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2, \quad v \in L^1(\Omega;\mathbb{R}).$$

Доказательство условия $\mathscr{A}(A)$(i) можно найти в [3].

С помощью утверждения 6.1 построим функции a_h, b_h, f_h, $h \in \mathbb{N}$. Тем самым получим последовательность возмущенных задач оптимального управления вида (2), (3), для которой имеют место теоремы 2.1 и 2.2. Нетрудно видеть, что в исходных обозначениях возмущенные задачи записываются в виде (29), (30), где вместо функций $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{f}$ стоят свертки

$$\tilde{a}_h(t,\cdot) = \eta_h * \tilde{a}(t,\cdot), \quad \tilde{b}_h(t,\cdot) = \eta_h * \tilde{b}(t,\cdot), \quad \tilde{f}_h(t,\cdot,u) = \eta_h * \tilde{f}(t,\cdot,u).$$

В рамках сделанных предположений авторам неизвестны необходимые условия оптимальности для исходной задачи. В то же время для возмущенной задачи такие условия приведены, например, в [19]. Для выполнения этих условий необходима дифференцируемость функции $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{f}$ по x. Мы же предполагаем, что они всего лишь липшицевы.

Отсюда вытекает следующая схема решения задачи (29), (30). Прежде всего переходим к возмущенной задаче, в которой функции $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{f}$ заменены на $\tilde{a}_h$, $\tilde{b}_h$, $\tilde{f}_h$. Затем с помощью известных необходимых условий оптимальности ищем решение (u_h, x_h) возмущенной задачи. Если найти его удалось, то управление u_h окажется «почти оптимальным» в (29), (30), т. е. значение целевого функционала $\widetilde{J}_\infty$, соответствующее управлению u_h, будет стремиться к минимальному значению задачи (29), (30) при $h \to \infty$.

Приведем схему доказательства последнего утверждения. Для каждого $h \in \mathbb{N}$ выберем оптимальное решение (u_h, x_h) соответствующей возмущенной задачи. В силу теоремы 2.2 и компактности оператора A из последовательности $\{(u_h, x_h)\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{(u_{h_k}, x_{h_k})\}$, сходящуюся в пространстве $\mathscr{U}_w \times C(\Omega;\mathbb{R}^m)$ к некоторой точке (u_∞, x_∞). При этом (u_∞, x_∞) является оптимальным решением исходной задачи и

$$\widetilde{J}_{h_k}(u_{h_k}, x_{h_k}) \to \widetilde{J}_\infty(u_\infty, x_\infty).$$

Обозначим через y_h решение невозмущенного уравнения (30), соответствующее управлению u_h. Из $u_{h_k} \rightharpoonup u_\infty$ в $\mathscr{U}$ вытекает, что $y_{h_k} \to x_\infty$ в $C(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Следовательно, при достаточно больших k справедливо неравенство

$$|x_{h_k}(t) - y_{h_k}(t) - \zeta| < 1, \quad t \in \Omega,\ |\zeta| \le 1/h_k.$$

Поэтому

$$|\widetilde{J}_{h_k}(u_{h_k}, x_{h_k}) - \widetilde{J}_\infty(u_{h_k}, y_{h_k})| \\ \le \int\limits_\Omega \int\limits_{|\zeta|\le\frac{1}{h}} \eta_h(\zeta)\rho(|y_h(t) - x_h(t) - \zeta|)(1 + |u_h(t)|^2 + |x_h(t) - \zeta|^2 + |y_h(t)|^2)\, d\zeta dt \\ \le M(\eta_{h_k} * \rho)(\|y_{h_k} - x_{h_k}\|_{C(\Omega;\mathbb{R}^m)}),$$

где M — некоторая константа. Отсюда $|\widetilde{J}_{h_k}(u_{h_k}, x_{h_k}) - \widetilde{J}_\infty(u_{h_k}, y_{h_k})| \to 0$ при $k \to \infty$. Тем самым из неравенства

$$|\widetilde{J}_\infty(u_{h_k}, y_{h_k}) - \widetilde{J}_\infty(u_\infty, x_\infty)| \le |\widetilde{J}_\infty(u_{h_k}, y_{h_k}) - \widetilde{J}_{h_k}(u_{h_k}, x_{h_k})| \\ + |\widetilde{J}_{h_k}(u_{h_k}, x_{h_k}) - \widetilde{J}_\infty(u_\infty, x_\infty)|$$

вытекает, что $\widetilde{J}_\infty(u_{h_k}, y_{h_k}) \to \widetilde{J}_\infty(u_\infty, x_\infty) = \min \widetilde{J}_\infty$ при $k \to \infty$.

Пусть $\{(u_{h_k}, x_{h_k})\}$ — произвольная, не обязательно сходящаяся, подпоследовательность последовательности $\{(u_h, x_h)\}$. Применяя аналогичные рассуждения, можно показать, что существует подпоследовательность последовательности $\{J_\infty(u_{h_k}, y_{h_k})\}$, сходящаяся к $\min \widetilde{J}_\infty$. Значит, $\widetilde{J}_\infty(u_h, y_h) \to \min \widetilde{J}_\infty$.

6.2. Смешанная задача для волнового уравнения. Предположим, что $\Omega = (0, T_1) \times (0, T_2)$, $\mathscr{X} = \mathscr{V} = L^4(\Omega;\mathbb{R}) = L^4(\Omega)$, $\mathscr{U} = L^4(\Omega;\mathbb{R}^s)$ и $c > 0$. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\widetilde{J}_\varepsilon(u, x) = \int\limits_\Omega \tilde{f}_\varepsilon(t, x(t), u(t))\, dt \to \min, \tag{31}$$

$$\begin{cases} x_{t_1t_1} - c^2 x_{t_2t_2} = \tilde{a}_\varepsilon(t, x) + \tilde{b}_\varepsilon(t, x)u(t), & t \in \Omega, \\ x(0, t_2) = \varphi^1(t_2), \quad x_{t_1}(0, t_2) = \varphi^2(t_2), & t_2 \in (0, T_2), \quad u \in \mathscr{U}, \\ x(t_1, 0) = x(t_1, T_2) = 0, & t_1 \in (0, T_1), \end{cases} \tag{32}$$

в описание которой входит некоторая малая величина $\varepsilon > 0$. Предположим, что для любой последовательности $\varepsilon_h \to \varepsilon_\infty = 0$ функции $\tilde{a}_{\varepsilon_h} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{b}_{\varepsilon_h} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^s;\mathbb{R})$ и $\tilde{f}_{\varepsilon_h} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям $\mathscr{A}(a)$, $\mathscr{A}(b)$, $\mathscr{A}(f)$ соответственно; $\varphi^1 \in H_0^1(0, T_1)$, $\varphi^2 \in L^2(0, T_2)$.

Прежде чем ввести понятие обобщенного решения для управляемой системы (32), рассмотрим для $z \in \mathscr{X}$ вспомогательную задачу

$$\begin{cases} x_{t_1t_1} - c^2 x_{t_2t_2} = z, & t \in \Omega, \\ x(0, t_2) = \varphi^1(t_2), \quad x_{t_1}(0, t_2) = \varphi^2(t_2), & t_2 \in (0, T_2), \\ x(t_1, 0) = x(t_1, T_2) = 0, & t_1 \in (0, T_1). \end{cases} \tag{33}$$

Обозначим через $D_1(\Omega)$ совокупность всех непрерывно дифференцируемых функций, определенных на Ω и равных нулю вне $(0, T_1) \times [\delta, T_2 - \delta]$, $\delta > 0$ (для каждой функции число δ, вообще говоря, свое). Через $D_2(\Omega)$ обозначим те функции из $D_1(\Omega)$, которые обращаются в нуль при $t_1 > T_1 - \delta_1$ для некоторого

$\delta_1 > 0$, не превосходящего T_1 (для каждой функции δ_1 свое). Замыкания $D_1(\Omega)$ и $D_2(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$ обозначим соответственно через $\overset{\circ}{D}_1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{D}_2(\Omega)$.

Обобщенным решением задачи (33) назовем функцию $x \in \overset{\circ}{D}_1(\Omega)$, которая принимает начальное значение, равное φ^1, в смысле равенства

$$\lim_{\Delta t_1 \to 0} \int_0^{T_2} |x(\Delta t_1, t_2) - \varphi^1(t_2)|^2 \, dt_2 = 0$$

и для каждой функции $y \in \overset{\circ}{D}_2(\Omega)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint_\Omega [x_{t_1} y_{t_1} - c^2 x_{t_2} y_{t_2} + zy] \, dt + \int_0^{T_2} \varphi^2(t_2) y(0, t_2) \, dt_2 = 0.$$

Согласно [20, теорема 3.2.5] для любых $z \in L^2(\Omega)$, $\varphi^1 \in H_0^1(0, T_1)$, $\varphi^2 \in L^2(0, T_2)$ задача (33) имеет единственное обобщенное решение $x \in \overset{\circ}{D}_1(\Omega)$. Для этого решения имеет место энергетическое неравенство

$$\|x\|_{H^1(\Omega)} \leq C \cdot (\|\varphi^1\|_{H^1(0,T_1)} + \|\varphi^2\|_{L^2(0,T_2)} + \|z\|_{L^2(\Omega)}).$$

Пусть $\Phi : H_0^1(0, T_1) \times L^2(0, T_2) \times \mathscr{X} \to \overset{\circ}{D}_1(\Omega)$ — оператор, который ставит в соответствие каждой тройке функций $(\varphi^1, \varphi^2, z)$ единственное решение x задачи (33). Из определения решения вытекает, что оператор Φ линейный, а из энергетического неравенства — что ограниченный. Пусть

$$\Theta[\varphi^1, \varphi^2] = \Phi[\varphi^1, \varphi^2, 0], \quad A[z] = \Phi[0, 0, z].$$

В силу линейности Φ справедливо равенство $\Phi[\varphi^1, \varphi^2, z] = \Theta[\varphi^1, \varphi^2] + A[z]$.

Пару (x, u), $x \in \overset{\circ}{D}_1(\Omega)$, $u \in \mathscr{U}$, назовем *обобщенным решением управляемой системы* (32), если найдется такое $z \in L^2(\Omega)$, что x является обобщенным решением задачи (33) и для п. в. $t \in \Omega$

$$z(t) = \tilde{a}_\varepsilon(t, x(t)) + \tilde{b}_\varepsilon(t, x(t))u(t).$$

Положим для всех $t \in \Omega$, $v \in \mathbb{R}$ и $u \in \mathbb{R}^s$

$$a_h(t, v) = \tilde{a}_{\varepsilon_h}(t, \Theta[\varphi^1, \varphi^2] + v), \quad b_h(t, v) = \tilde{b}_{\varepsilon_h}(t, \Theta[\varphi^1, \varphi^2] + v),$$
$$f_h(t, v, u) = \tilde{f}_{\varepsilon_h}(t, \Theta[\varphi^1, \varphi^2] + v, u).$$

Тогда в новых обозначениях задача (31), (32) примет вид (2), (3).

Нетрудно видеть, что функции a_h, b_h, f_h удовлетворяют условиям $\mathscr{A}(a)$, $\mathscr{A}(b)$, $\mathscr{A}(f)$ соответственно. В силу энергетического неравенства оператор A переводит ограниченные подмножества пространства $L^4(\Omega)$ в ограниченные подмножества пространства $H^1(\Omega)$. Поскольку согласно [21, теорема 5.7.7] $H^1(\Omega)$ компактно вложено в $L^4(\Omega)$, оператор A компактный и, следовательно, выполнено $\mathscr{A}(A)$(ii). Мажорирующий оператор $\widetilde{B}$ определяется так же, как был определен оператор A, только с тем отличием, что вместо пространства $\mathscr{X} = L^4(\Omega)$ берется пространство $L^2(\Omega)$. Доказательство вольтерровости оператора $\widetilde{B}$ приведено в [3].

Теоремы 2.1 и 2.2 позволяют перейти от задачи (31), (32) к «усредненной» и, как правило, более простой задаче, которая соответствует $\varepsilon = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dal Maso G.* An introduction to Γ-convergence. Boston: Birkhäuser, 1993.
2. *Сумин В. И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1992. Ч. I.
3. *Чернов А. В.* Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107.
4. *Buttazzo G., Dal Maso G.* Γ-convergence and optimal control problems // J. Optim. Theory Appl. 1982. V. 38. P. 385–407.
5. *Denkowski Z., Migorski S.* Control problems for parabolic and hyperbolic equation via the theory of G- and Γ-convergence // Ann. Math. Pura Appl., Ser. 4. 1987. V. 149. P. 23–39.
6. *Migorski S.* On asymptotic limits of control problems with parabolic and hyperbolic equations // Rivista Mat. Pura Appl. 1993. V. 12. P. 33–50.
7. *Migorski S.* Convergence of optimal solutions in control problems for hyperbolic equations // Ann. Pol. Math. 1995. V. 62, N 2. P. 111–121.
8. *Куратовский К.* Топология.. М.: Мир, 1966. Т. I.
9. *Idczak D., Majewski M., Walczak S.* Stability analysis of solutions to an optimal control problem associated with a Goursat–Darboux problem // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2003. V. 13, N 1. P. 29–44.
10. *Majewski M.* Stability analysis of an optimal control problem for a hyperbolic equation // J. Optim. Theory Appl. 2009. V. 141. P. 127–146.
11. *Толстоногов А. А.* Вариационная устойчивость задач оптимального управления с субдифференциальными операторами // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 4. С. 123–160.
12. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
13. *Balder E.* Necessary and sufficient conditions for L_1-strong-weak lower semicontinuity of integral functionals // Nonlinear Anal. Theory, Methods, Appl. 1987. V. 11, N 12. P. 1399–1404.
14. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
15. *Бурбаки Н.* Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь. М.: Наука, 1975.
16. *Attouch H.* Variational convergence for functions and operators. Applicable Mathematics Series. Boston: Pitman (Adv. Publ. Program), 1984.
17. *Evans L. C.* Partial differential equations. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997.
18. *Погодаев Н. И.* О решениях включения типа Гурса — Дарбу со смешанными ограничениями на граничные и распределенные управления // Сиб. журн. индустр. математики. 2008. Т. 11, № 1. С. 96–110.
19. *Бокмельдер Е. П.* Вариационный принцип максимума в управляемых гиперболических системах с фазовыми и функциональными ограничениями: Дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.09. Иркутск, 1987.
20. *Ладыженская О. А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: Гостехиздат, 1953.
21. *Attouch H., Buttazzo G., Michaille G.* Variational analysis in Sobolev and BV spaces. Philadelphia: SIAM, 2006.

Статья поступила 23 августа 2013 г.

Погодаев Николай Ильич, Толстоногов Александр Александрович
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
`nickpogo@gmail.com`, `aatol@icc.ru`