Сибирский математический журнал
Июль—август, 2014. Том 55, № 4

УДК 511

СОВМЕСТНАЯ УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ L–ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ И ДЗЕТА–ФУНКЦИЙ ЛЕРХА

А. Лауринчикас, Р. Мацайтене

Аннотация. Получена совместная теорема универсальности типа Воронина о приближении аналитических функций сдвигами L-функций Дирихле и дзета-функций Лерха.

Ключевые слова: дзета-функция Лерха, L-функция Дирихле, предельная теорема, пространство аналитических функций, мера Хаара, универсальность.

1. Введение

Пусть $s = \sigma + it$ — комплексная переменная, а χ — характер Дирихле по модулю q. L-функция Дирихле $L(s, \chi)$ при $\sigma > 1$ определяется рядом Дирихле

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}$$

и в случае неглавного характера χ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость. Если χ_0 — главный характер по модулю q ($\chi_0(m) = 1$ для всех $m \in \mathbb{N}$, $(m, q) = 1$, и $\chi_0(m) = 0$ для $(m, q) > 1$), то

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right),$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, а p обозначает простое число. Следовательно, $L(s, \chi_0)$ в точке $s = 1$ имеет простой полюс с вычетом

$$\prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Функции $L(s, \chi)$ введены Дирихле в 1837 г. как аналитический инструмент для изучения распределения простых чисел в арифметических прогрессиях. Аналитическая теория L-функций Дирихле изложена в [1–5].

Определим другой объект изучения в нашей статье. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ и α, $0 < \alpha \leq 1$, — фиксированные параметры. Функция Лерха $L(\lambda, \alpha, s)$ определена Липшицем в 1857 г. [6], однако она названа именем Лерха, который в 1887 г. доказал [7] функциональное уравнение. В полуплоскости $\sigma > 1$ функция $L(\lambda, \alpha, s)$ определяется рядом Дирихле

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m + \alpha)^s}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке the European Community's Seventh Framework Programme FP7/2007–2013 (agreement N 230376).

Ввиду периодичности коэффициентов $e^{2\pi i\lambda m}$ можно считать, что $0 < \lambda \leq 1$. Если $\lambda \neq 1$, то $L(\lambda, \alpha, s)$ аналитически продолжается до целой функции. Если $\lambda = 1$, то она становится дзета-функцией Гурвица $\zeta(s, \alpha)$, которая имеет единственный простой полюс в точке $s = 1$ с вычетом 1. При $\lambda = 1$ и $\alpha = 1$ получаем классическую дзета-функцию Римана, а при $\lambda \neq 1$ и $\alpha = 1$ функция $L(\lambda, \alpha, s)$ превращается в периодическую функцию

$$\zeta_\lambda(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\lambda m}}{m^s}, \quad \sigma > 1,$$

умноженную на $e^{-2\pi i\lambda}$. Дзета-функция Лерха не имеет прямого применения, скажем, при исследовании распределения простых чисел, однако зависимость от двух параметров делает ее интересным объектом с точки зрения арифметики, алгебры и комплексного анализа, она появляется в ряде задач аналитической теории чисел. Особенно возросло внимание к функции $L(\lambda, \alpha, s)$ в последние годы (см. [8, 9]). Аналитическая теория дзета-функции Лерха изложена в [10].

Интуитивно универсальность в математике понимается так же, как и на практике. *Универсальным* называется объект, имеющий влияние на широкий класс других объектов. В анализе универсальность обычно связана с приближением некоторым образом множества функций. Первый результат в этом направлении принадлежит Фекете (см. [11]), доказавшему существование действительного степенного ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m, \quad x \in [-1, 1],$$

который не только расходится для всех $x \neq 0$, но делает это наихудшим образом: для всякой непрерывной на $[-1, 1]$ функции $f(x)$, $f(0) = 0$, существует такая возрастающая последовательность целых положительных чисел n_k, что равномерно относительно $x \in [-1, 1]$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{m \leq n_k} a_m x^m = f(x).$$

Эта теорема неэффективна, ряд (1) не имеет явного вида, доказано только его существование. Позже и другие авторы нашли некоторым образом универсальные аналитические объекты, однако все они оказались также неэффективными (см. статью [12], в которой дано такое общее определение универсального объекта). Пусть X и Y — два (в общем случае топологические) пространства, а $T_j : X \to Y$, $j \in I$, — непрерывные отображения. Тогда элемент $x \in X$ называется *универсальным относительно семейства* $\{T_j : j \in I\}$, если множество $\{T_j x : j \in I\}$ всюду плотно в Y.

Только в 1975 г. С. М. Воронин нашел явным образом заданный универсальный объект, и им оказалась знаменитая дзета-функция Римана $\zeta(s)$. С. М. Воронин доказал [13] следующую теорему, содержащую свойство универсальности функции $\zeta(s)$. Сущность этой универсальности — приближения аналитических функций сдвигами $\zeta(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Пусть $0 < r < \frac{1}{4}$, а функция $f(s)$ непрерывна, не имеет нулей в круге $|s| \leq r$ и аналитична внутри этого круга. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\tau = \tau(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, что выполняется неравенство

$$\max_{|s|\leq r} \left|\zeta\left(s + \frac{3}{4} + i\tau\right) - f(s)\right| < \varepsilon.$$

Теорема Воронина имеет более общий вид (см., например, [14]). Через $\mathrm{mes}\{A\}$ будем обозначать меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$. Пусть K — компактное подмножество полосы $D = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$, обладающее связным дополнением, а функция $f(s)$ непрерывна, не имеет нулей на K и аналитична внутри K. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{mes}\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Последнее неравенство показывает, что существует бесконечно много таких действительных чисел τ, что сдвиг $\zeta(s+i\tau)$ с желаемой точностью равномерно на K приближает заданную аналитическую функцию.

Пусть G — область на комплексной плоскости, а $H(G)$ — пространство аналитических функций на G, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах. Тогда в определении универсальности можем брать $X = Y = H(D)$, а $T_\tau : g(s) \to g(s+i\tau)$, $g \in H(D)$. Множество $\{T_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ плотно в множестве $\{g \in H(D) : g(s) \neq 0\}$.

Аналогичная теорема универсальности, как замечено в [13], также имеет место для всякой L-функции Дирихле $L(s,\chi)$. Однако в случае L-функций Дирихле более важной и интересной является совместная теорема универсальности, когда несколько заданных аналитических функций приближаются сдвигами $L(s+i\tau,\chi_j)$. Ясно, что в этом случае сдвиги $L(s+i\tau,\chi_j)$ должны быть некоторым образом независимыми и эта независимость может быть обеспечена попарной неэквивалентностью характеров χ_j. Мы приводим современный вариант совместной теоремы универсальности Воронина [15] для функций $L(s,\chi_j)$, доказательство которого содержится в [16]. Предположим, что $\chi_1,\dots,\chi_r$ — попарно не эквивалентные характеры Дирихле. При $j = 1,\dots,r$ пусть K_j — компактное подмножество полосы D, обладающее связным дополнением, а $f_j(s)$ — непрерывная, не имеющая нулей на K_j и аналитическая внутри K_j функция. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{mes}\{\tau \in [0,T] : \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} |L(s+i\tau,\chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Другие версии совместной теоремы универсальности для L-функций Дирихле получены также в [17–19].

Свойства дзета-функции Лерха $L(\lambda,\alpha,s)$ во многом зависят от параметров λ и α. В частности, ее универсальность тесно связана с множеством

$$L(\alpha) = \{\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Если множество $L(\alpha)$ линейно независимо над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то нетрудно получить универсальность $L(\lambda,\alpha,s)$. Легко видеть, что множество $L(\alpha)$ линейно независимо над $\mathbb{Q}$, если α — трансцендентное число. В этом случае имеет место такое утверждение. Пусть K — компактное подмножество полосы D, обладающее связным дополнением, а $f(s)$ — непрерывная на K и аналитическая внутри K функция. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\,\mathrm{mes}\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |L(\lambda,\alpha,s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Отметим, что в этой теореме в отличие от случая функции $\zeta(s)$ приближаемая функция $f(s)$ может иметь нули, лежащие в K. В случае рационального

α функция $L(\lambda, \alpha, s)$ также универсальна при рациональном λ [10]. Случай алгебраического иррационального параметра α остается открытым до сих пор.

Совместная универсальность дзета-функций Лерха $L(\lambda_j, \alpha_j, s)$ с алгебраически независимыми параметрами $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ рассматривалась в [20–23]. Аналогично [24] можно получить следующий результат. Пусть

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \{\log(m + \alpha_j) : m \in \mathbb{N}_0,\ j = 1, \dots, r\}.$$

Предположим, что множество $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ линейно независимо над $\mathbb{Q}$. При $j = 1, \dots, r$ пусть K_j — компактное подмножество полосы D, обладающее связным дополнением, а $f_j(s)$ — непрерывная на K_j и аналитическая внутри K_j функция. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{mes}\{\tau \in [0, T] : \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} |L(\lambda_j, \alpha_j, s + i\tau) - f_j(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Отметим, что это верно для всех $0 < \lambda_j \le 1$, $j = 1, \dots, r$. В случае рациональных λ_j можно рассматривать более общую схему, когда каждому параметру α_j соответствует набор $\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jl_j}$, $l_j \in \mathbb{N}$, и при некотором дополнительном ранговом условии получить универсальность функций $(L(\lambda_{11}, \alpha_1, s), \dots, L(\lambda_{1l_1}, \alpha_1, s), \dots, L(\lambda_{r1}, \alpha_r, s), \dots, L(\lambda_{rl_r}, \alpha_r, s))$. Это сделано в [21, 22].

Цель настоящей статьи — получить совместную теорему универсальности для набора функций, состоящего из L-функций Дирихле и дзета-функций Лерха. Через $\mathscr{P}$ обозначим множество всех простых чисел и определим множество

$$L(\mathscr{P}, \alpha_1, \dots, \alpha_r) = \{(\log p : p \in \mathscr{P}), (\log(m + \alpha_j) : m \in \mathbb{N}_0,\ j = 1, \dots, r)\}.$$

Теорема 1. *Предположим, что $\chi_1, \dots, \chi_l$ — попарно не эквивалентные характеры Дирихле, а множество $L(\mathscr{P}, \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ линейно независимо над $\mathbb{Q}$. При $j = 1, \dots, l$ пусть K_j — компактное подмножество полосы D, обладающее связным дополнением, а функция $f_j(s)$ непрерывна и не имеет нулей на K_j и аналитична внутри K_j. При $j = 1, \dots, r$ пусть $\widehat{K}_j$ — компактное подмножество полосы D, обладающее связным дополнением, а функция $\hat{f}_j(s)$ непрерывна на $\widehat{K}_j$ и аналитична внутри $\widehat{K}_j$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ и любых $\lambda_j \in (0, 1)$, $j = 1, \dots, r$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{mes}\{\tau \in [0, T] : \sup_{1\le j\le l} \sup_{s\in K_j} |L(s + i\tau, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon,$$
$$\sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in \widehat{K}_j} |L(\lambda_j, \alpha_j, s + i\tau) - \hat{f}_j(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Следствие 2. *Предположим, что условие теоремы* 1 *линейной независимости множества $L(\mathscr{P}, \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ над $\mathbb{Q}$ заменено условием алгебраической независимости чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ над $\mathbb{Q}$. Тогда имеет место утверждение теоремы* 1.

Доказательство теоремы 1 проведем с использованием предельных теорем о слабой сходимости вероятностных мер в функциональных пространствах.

2. Предельные теоремы

Через $\mathscr{B}(X)$ будем обозначать борелевское σ-поле пространства X. Пусть $H(D)$ — пространство аналитических на D функций, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах. Для краткости положим

$$\underline{L}(s, \underline{\chi}, \underline{\alpha}, \underline{\lambda}) = (L(s, \chi_1), \dots, L(s, \chi_l), L(\lambda_1, \alpha_1, s), \dots, L(\lambda_r, \alpha_r, s)),$$

где $\underline{\chi} = (\chi_1, \dots, \chi_l)$, $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ и $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. В настоящем разделе докажем предельную теорему в пространстве $H^{l+r}(D)$ для вектора $\underline{L}(s, \underline{\chi}, \underline{\alpha}, \underline{\lambda})$, для формулирования которой нужны некоторые обозначения и определения.

Пусть $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ — единичная окружность на комплексной плоскости. Определим два тора

$$\Omega = \prod_{p \in \mathscr{P}} \gamma_p \quad \text{и} \quad \widehat{\Omega} = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m,$$

где $\gamma_p = \gamma$ для всех $p \in \mathscr{P}$ и $\gamma_m = \gamma$ для всех $m \in \mathbb{N}_0$. На Ω и $\widehat{\Omega}$ можем определить операцию поточечного перемножения и топологию произведения. Тогда по теореме Тихонова они становятся компактными топологическими абелевыми группами. Следовательно, на $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega))$ и $(\widehat{\Omega}, \mathscr{B}(\widehat{\Omega}))$ существуют вероятностные меры Хаара m_H и $\widehat{m}_H$ соответственно. Пусть

$$\underline{\Omega} = \Omega \times \prod_{j=1}^{r} \widehat{\Omega}_j,$$

где $\widehat{\Omega}_j = \widehat{\Omega}$ при $j = 1, \dots, r$. Тогда $\underline{\Omega}$ также является компактной топологической группой, что приводит к вероятностному пространству $(\underline{\Omega}, \mathscr{B}(\underline{\Omega}), \underline{m}_H)$ с вероятностной мерой Хаара $\underline{m}_H$ на $(\underline{\Omega}, \mathscr{B}(\underline{\Omega}))$. Через $\underline{\omega} = (\omega, \widehat{\omega}_1, \dots, \widehat{\omega}_r)$ будем обозначать элементы группы $\underline{\Omega}$, где $\omega \in \Omega$, а $\widehat{\omega}_j \in \widehat{\Omega}_j$, $j = 1, \dots, r$. Пусть $\omega(p)$ — проекция элемента $\omega \in \Omega$ на координатное пространство γ_p , $p \in \mathscr{P}$, а $\widehat{\omega}_j(m)$ — проекция элемента $\widehat{\omega}_j \in \widehat{\Omega}_j$, $j = 1, \dots, r$, на координатное пространство γ_m, $m \in \mathbb{N}_0$. На вероятностном пространстве $(\underline{\Omega}, \mathscr{B}(\underline{\Omega}), \underline{m}_H)$ определим $H^{l+r}(D)$-значный случайный элемент $\underline{L}(s, \underline{\omega}, \underline{\chi}, \underline{\alpha}, \underline{\lambda})$ формулой

$$\underline{L}(s, \underline{\omega}, \underline{\chi}, \underline{\alpha}, \underline{\lambda}) = (L(s, \omega, \chi_1), \dots, L(s, \omega, \chi_l), L(\lambda_1, \alpha_1, s, \omega_1), \dots, L(\lambda_r, \alpha_r, s, \omega_r)),$$

где

$$L(s, \omega, \chi_j) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \left(1 - \frac{\chi_j(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad j = 1, \dots, l,$$

$$L(\lambda_j, \alpha_j, s, \omega_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m \lambda_j} \omega_j(m)}{(m + \alpha_j)^s}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Пусть $P_{\underline{L}}$ — распределение случайного элемента $\underline{L}(s, \underline{\omega}, \underline{\chi}, \underline{\alpha}, \underline{\lambda})$, т. е.

$$P_{\underline{L}}(A) = \underline{m}_H(\underline{\omega} \in \underline{\Omega} : \underline{L}(s, \underline{\omega}, \underline{\chi}, \underline{\alpha}, \underline{\lambda}) \in A), \quad A \in \mathscr{B}(H^{l+r}(D)).$$

Теперь формулируем основной результат этого раздела.

Теорема 3. *Предположим, что множество $L(\mathscr{P}, \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ линейно независимо над $\mathbb{Q}$. Тогда*

$$P_T(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \operatorname{mes}\{\tau \in [0, T] : \underline{L}(s + i\tau, \underline{\chi}, \underline{\alpha}, \underline{\lambda}) \in A\}, \quad A \in \mathscr{B}(H^{l+r}(D)),$$

при $T \to \infty$ слабо сходится к $P_{\underline{L}}$.

Доказательство теоремы 3 разобьем на несколько лемм. Начнем с предельной теоремы на $\underline{\Omega}$.

Лемма 4. *Предположим, что множество* $L(\mathscr{P}, \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ *линейно независимо над* $\mathbb{Q}$. *Тогда*

$$Q_T(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\,\mathrm{mes}\{\tau \in [0,T] : ((p^{-i\tau} : p \in \mathscr{P}),\ ((m+\alpha_1)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0), \dots, ((m+\alpha_r)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0)) \in A\}, \quad A \in \mathscr{B}(\underline{\Omega}),$$

при $T \to \infty$ *слабо сходится к* $\underline{m}_H$.

Доказательство леммы 4. Как это обычно делается в случае вероятностных мер на группах, применим метод преобразований Фурье. Преобразование Фурье $g_T(\underline{k})$, $\underline{k} = (k_p : p \in \mathscr{P};\ k_{mj} : m \in \mathbb{N},\ j = 1, \dots, r)$, меры Q_T имеет вид

$$g_T(\underline{k}) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{-i\tau k_p} \prod_{j=1}^{r} \prod_{m=0}^{\infty} (m+\alpha_j)^{-i\tau k_{mj}}\, d\tau,$$

где только конечное число целых чисел k_p и k_{mj} отличны от нуля. Отсюда находим, что

$$g_T(\underline{k}) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \exp\biggl\{-i\tau \sum_{p \in \mathscr{P}} k_p \log p + i\tau \sum_{j=1}^{r}\sum_{m=0}^{\infty} k_{mj}\log(m+\alpha_j)\biggr\}\, d\tau.$$

Учитывая линейную независимость множества $L(\mathscr{P}, \alpha_1, \dots, \alpha_r)$, отсюда находим, что

$$\lim_{T\to\infty} g_T(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \underline{k} = \underline{0}, \\ 0, & \text{если } \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases}$$

Полученное равенство и известные теоремы непрерывности на компактных группах (см., например, [25]), дают утверждение леммы.

Пусть $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ — фиксированное число и при $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(m) = \exp\biggl\{-\Bigl(\frac{m}{n}\Bigr)^{\sigma_0}\biggr\}, \quad u_n(m,\alpha) = \exp\biggl\{-\Bigl(\frac{m+\alpha}{n+\alpha}\Bigr)^{\sigma_0}\biggr\}.$$

Определим функции

$$\begin{aligned} L_n(s,\chi_j) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi_j(m)u_n(m)}{m^s}, \quad j = 1, \dots, l, \\ L_n(\lambda_j,\alpha_j,s) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m\lambda_j}u_n(m,\alpha_j)}{(m+\alpha_j)^s}, \quad j = 1, \dots, r, \end{aligned} \tag{1}$$

и для $\underline{\omega} \in \underline{\Omega}$

$$\begin{aligned} L_n(s,\omega,\chi_j) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi_j(m)\omega(m)u_n(m)}{m^s}, \quad j = 1, \dots, l, \\ L_n(\lambda_j,\alpha_j,s,\omega_j) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m\lambda_j}\omega_j(m)u_n(m,\alpha_j)}{(m+\alpha_j)^s}, \quad j = 1, \dots, r. \end{aligned} \tag{2}$$

Тогда известным путем с использованием формулы Меллина получаем (см. [10, 14]), что все выше определенные ряды абсолютно сходятся при $\sigma > \frac{1}{2}$. Положим

$$\underline{L}_n(s,\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda}) = (L_n(s,\chi_1), \dots, L_n(s,\chi_l), L_n(\lambda_1,\alpha_1,s), \dots, L_n(\lambda_r,\alpha_r,s)),$$

$$\underline{L}_n(s,\underline{\omega},\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda})$$
$$= (L_n(s,\omega,\chi_1),\dots,L_n(s,\omega,\chi_l),L_n(\lambda_1,\alpha_1,\omega_1,s),\dots,L_n(\lambda_r,\alpha_r,\omega_r,s)).$$

Для $A \in \mathscr{B}(H^{l+r}(D))$ определим

$$P_{T,n}(A) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\text{mes}\{\tau \in [0,T] : \underline{L}_n(s+i\tau,\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda}) \in A\}$$

и для фиксированного $\underline{\widehat{\omega}} \in \Omega$

$$P_{T,n,\underline{\widehat{\omega}}}(A) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\text{mes}\big\{\tau \in [0,T] : L_n(s+i\tau,\underline{\widehat{\omega}},\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda}) \in A\big\}.$$

Лемма 5. *Предположим, что множество $L(\mathscr{P},\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ линейно независимо над $\mathbb{Q}$. Тогда на $(H^{l+r}(D),\mathscr{B}(H^{l+r}(D)))$ существует вероятностная мера P_n такая, что $P_{T,n}$ и $P_{T,n,\underline{\widehat{\omega}}}$ при $T\to\infty$ слабо сходятся к P_n.*

Доказательство. Определим функции h_n и $\hat{h}_n : \underline{\Omega} \to H^{l+r}(D)$ соответственно формулами

$$h_n(\underline{\omega}) = \underline{L}_n(s,\underline{\omega},\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda})$$

и

$$\hat{h}_n(\underline{\omega}) = \underline{L}_n(s,\underline{\omega},\underline{\widehat{\omega}},\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda}).$$

Полагая

$$\underline{a}_\tau = ((p^{-i\tau} : p\in\mathscr{P}),\ ((m+\alpha_1)^{-i\tau} : m\in\mathbb{N}_0),\dots,((m+\alpha_r)^{-i\tau} : m\in\mathbb{N}_0)),$$

имеем, что $h_n(\underline{a}_\tau) = \underline{L}_n(s+i\tau,\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda})$ и $\hat{h}_n(\underline{a}_\tau) = \underline{L}_n(s+i\tau,\underline{\widehat{\omega}},\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda})$, поэтому $P_{T,n} = Q_T h_n^{-1}$ и $P_{T,n,\underline{\widehat{\omega}}} = Q_T\hat{h}_n^{-1}$, где для измеримой функции $h : \underline{\Omega} \to H^{l+r}(D)$ мера $Q_T h^{-1}$ определяется равенством $Q_T h^{-1}(A) = Q_T(h^{-1}A)$, $A\in\mathscr{B}(H^{l+r}(D))$. Абсолютная сходимость рядов (1) и (2) влечет за собой непрерывность функций h_n и $\hat{h}_n$. Отсюда, из леммы 4 и теоремы 5.1 в [26] вытекает, что $P_{T,n}$ и $P_{T,n,\underline{\widehat{\omega}}}$ при $T\to\infty$ слабо сходятся к $\underline{m}_H h_n^{-1}$ и $\underline{m}_H\hat{h}_n^{-1}$ соответственно. Поскольку мера Хаара $\underline{m}_H$ инвариантна относительно сдвигов точками из $\underline{\Omega}$, получаем, что $\underline{m}_H h_n^{-1} = \underline{m}_H\hat{h}_n^{-1} \overset{\text{def}}{=} P_n$.

Займемся приближением в среднем функций $\underline{L}(s,\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda})$ и $\underline{L}(s,\underline{\omega},\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda})$ соответственно функциями $\underline{L}_n(s,\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda})$ и $\underline{L}_n(s,\underline{\omega},\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda})$. Для этой цели нам нужна метрика пространства $H^{l+r}(D)$, индуцирующая его топологию равномерной сходимости на компактах. Известно, что существует последовательность $\{K_m : m\in\mathbb{N}\}$ компактных подмножеств полосы D такая, что

$$D = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m,$$

$K_m \subset K_{m+1}$ для всех $m\in\mathbb{N}$, и если K — компактное подмножество полосы D, то $K\subset K_m$ при некотором m. Определим

$$\varrho(g_1,g_2) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\frac{\sup\limits_{s\in K_m}|g_1(s)-g_2(s)|}{1+\sup\limits_{s\in K_m}|g_1(s)-g_2(s)|},\quad g_1,g_2\in H^{l+r}(D).$$

Тогда ϱ — метрика пространства $H^{l+r}(D)$, индуцирующая его топологию. Полагая для $\underline{g}_1 = (g_{11},\dots,g_{1,l+r})$, $\underline{g}_2 = (g_{21},\dots,g_{2,l+r}) \in H^{l+r}(D)$

$$\underline{\varrho}(\underline{g}_1,\underline{g}_2) = \max_{1\le j\le l+r}\varrho(g_{1j},g_{2j}),$$

получаем искомую метрику в пространстве $H^{l+r}(D)$.

Лемма 6. *Имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \underline{\varrho}(\underline{L}(s+i\tau,\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda}),\underline{L}_n(s+i\tau,\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda}))\,d\tau=0.$$

Предположим, что множество $L(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ линейно независимо над $\mathbb{Q}$. Тогда для почти всех $\underline{\omega}\in\underline{\Omega}$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \underline{\varrho}(\underline{L}(s+i\tau,\underline{\omega},\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda}),\underline{L}_n(s+i\tau,\underline{\omega},\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda}))\,d\tau=0.$$

Доказательство. В [27] получено, что

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \varrho(L(s+i\tau,\chi_j),L_n(s+i\tau,\chi_j)\big)\,d\tau=0,\quad j=1,\dots,l,\tag{3}$$

и для почти всех $\omega\in\Omega$

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \varrho(L(s+i\tau,\omega,\chi_j),L_n(s+i\tau,\omega,\chi_j))\,d\tau=0,\quad j=1,\dots,l.\tag{4}$$

Аналогично в [10] доказано, что

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \varrho(L(\lambda_j,\alpha_j,s+i\tau),L_n(\lambda_j,\alpha_j,s+i\tau))\,d\tau=0,\quad j=1,\dots,r,\tag{5}$$

и для почти всех $\widehat{\omega}_j\in\widehat{\Omega}_j$ при трансцендентном α_j, $j=1,\dots,r$,

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \varrho(L(\lambda_j,\alpha_j,s+i\tau,\widehat{\omega}_j),L_n(\lambda_j,\alpha_j,s+i\tau,\widehat{\omega}_j))\,d\tau=0.\tag{6}$$

При этом трансцендентность чисел α_j используется только для линейной независимости над $\mathbb{Q}$ множества $L(\alpha_j)$. Очевидно, что из линейной независимости множества $L(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ вытекает линейная независимость множеств $L(\alpha_1),\dots,L(\alpha_r)$. Таким образом, в условиях леммы равенства (6) имеют место.

Первое утверждение леммы является следствием равенств (3) и (5) и определения метрики $\underline{\varrho}$. Второе утверждение леммы аналогично вытекает из равенств (4) и (6) и замечания, что мера Хаара $\underline{m}_H$ является произведением мер Хаара m_H и $\widehat{m}_{jH}$, где $\widehat{m}_{jH}$ — мера Хаара на $(\widehat{\Omega}_j,\mathscr{B}(\widehat{\Omega}_j))$, $j=1,\dots,r$.

Для $A\in\mathscr{B}(H^{l+r}(D))$ и $\underline{\omega}\in\underline{\Omega}$ определим

$$P_{T,\underline{\omega}}(A)=\frac{1}{T}\mathrm{mes}\{\tau\in[0,T]:\underline{L}(s+i\tau,\underline{\omega},\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda})\in A\}.$$

Опираясь на леммы 5 и 6, получим слабую сходимость при $T\to\infty$ для P_T и $P_{T,\underline{\omega}}$. При этом нам будет удобнее пользоваться сходимостью по распределению случайных элементов, которую будем обозначать через $\xrightarrow{\mathscr{D}}$.

Лемма 7. *Предположим, что множество $L(\mathscr{P}, \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ линейно независимо над $\mathbb{Q}$. Тогда на $(H^{l+r}(D), \mathscr{B}(H^{l+r}(D)))$ существует мера P такая, что P_T и $P_{T,\underline{\omega}}$ при $T \to \infty$ слабо сходятся к P.*

Доказательство. Пусть θ — случайная величина, определенная на некотором вероятностном пространстве $(\Omega_0, \mathscr{B}(\Omega_0), \mathbb{P})$ и равномерно распределенная на интервале $[0,1]$. На этом вероятностном пространстве определим $H^{l+r}(D)$-значный случайный элемент $\underline{X}_{T,n}$ формулой

$$\underline{X}_{T,n}(s) = (X_{T,n,1}(s), \dots, X_{T,n,l}(s), \widehat{X}_{T,n,1}(s), \dots, \widehat{X}_{T,n,r}(s)) = \underline{L}_n(s + i\theta T, \underline{\chi}, \underline{\alpha}, \underline{\lambda}).$$

Тогда в силу леммы 5 имеем, что

$$\underline{X}_{T,n}(s) \xrightarrow[T\to\infty]{\mathscr{D}} \underline{X}_n(s), \tag{7}$$

где

$$\underline{X}_n(s) = (X_{n,1}(s), \dots, X_{n,l}(s), \widehat{X}_{n,1}(s), \dots, \widehat{X}_{n,r}(s))$$

— $H^{l+r}(D)$-значный случайный элемент, имеющий распределение P_n (напоминаем, что P_n — предельная мера в лемме 5). Так как ряды, определяющие функции $L_n(s, \chi_j)$, $j = 1, \dots, l$, и $L_n(\lambda_j, \alpha_j, s)$, $j = 1, \dots, r$, абсолютно сходятся при $\alpha > \frac{1}{2}$, то при $\sigma > \frac{1}{2}$ для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |L_n(\sigma + it, \chi_j)|^2 \, dt = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\chi_j(m)|^2 u_n^2(m)}{m^{2\sigma}} \le \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2\sigma}} < \infty, \quad j = 1, \dots, l, \tag{8}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |L_n(\lambda_j, \alpha_j, \sigma + it)|^2 \, dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u_n^2(m, \alpha_j)}{(m + \alpha_j)^{2\sigma}} \le \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha_j)^{2\sigma}} < \infty, \quad j = 1, \dots, r. \tag{9}$$

Непосредственное применение интегральной формулы Коши и (8), (9) показывает, что существуют такие C_m, $\widehat{C}_m$ и $\sigma_m > \frac{1}{2}$, $\hat{\sigma}_m > \frac{1}{2}$, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K_m} |L_n(s + i\tau, \chi_j)| \, d\tau \le C_m \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2\sigma_m}} \right)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, l, \tag{10}$$

и

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K_m} |L_n(\lambda_j, \alpha_j, s + i\tau)| \, d\tau \le \widehat{C}_m \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha_j)^{2\hat{\sigma}_m}} \right)^{1/2}, \ j = 1, \dots, r. \tag{11}$$

Здесь K_m — компактное множество из определения метрики ϱ. Положим

$$R_m = C_m \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2\sigma_m}} \right)^{1/2}, \quad \widehat{R}_{mj} = \widehat{C}_m \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha_j)^{2\hat{\sigma}_m}} \right)^{1/2}.$$

Пусть ε — произвольное положительное число и $m \in \mathbb{N}$. Полагая $M_m = R_m 2^{m+l+1}\varepsilon^{-1}$ и $\widehat{M}_{mj} = R_{mj} 2^{m+r+1}\varepsilon^{-1}$, из неравенств (10) и (11) получаем, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}((\exists_j : \sup_{s\in K_m} |X_{T,n,j}(s)| > M_m) \vee (\exists_j : \sup_{s\in K_m} |\widehat{X}_{T,n,j}(s)| > \widehat{M}_{mj}))\\
&\le \sum_{j=1}^{l} \limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{s\in K_m} |X_{T,n,j}(s)| > M_m) + \sum_{j=1}^{r} \limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{s\in \widehat{K}_m} |\widehat{X}_{T,n,j}(s)| > \widehat{M}_{mj})\\
&\le \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{M_m} \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sup_{s\in K_m} |L_n(s+i\tau,\chi_j)|\,d\tau\\
&+ \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\widehat{M}_{mj}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sup_{s\in K_m} |L_n(\lambda_j,\alpha_j,s+i\tau)|\,d\tau\\
&\le \sum_{j=1}^{l} \frac{R_m}{M_m} + \sum_{j=1}^{r} \frac{\widehat{R}_{mj}}{\widehat{M}_{mj}} = \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} = \frac{\varepsilon}{2^m}.
\end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание соотношение (7), находим, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}((\exists_j : \sup_{s\in K_m} |X_{n,j}(s)| > M_m) \vee (\exists_j : \sup_{s\in K_m} |\widehat{X}_{n,j}(s)| > \widehat{M}_{mj})) \le \frac{\varepsilon}{2^m}. \tag{12}$$

Определим множество

$$\begin{aligned}
H_\varepsilon^{l+r} = \{(g_1,\dots,g_l,\hat{g}_1,\dots,\hat{g}_r) \in H^{l+r}(D) : \sup_{s\in K_m} |g_{j_1}(s)| \le M_m,\\
j_1 = 1,\dots,l,\ \sup_{s\in K_m} |g_j(s)| \le \widehat{M}_{mj},\ j = 1,\dots,r,\ m \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}$$

Тогда H_ε^{l+r} является компактным множеством в пространстве $H^{l+r}(D)$. Кроме того, ввиду (12) для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\big(\underline{X}_n(s) \in H_\varepsilon^{l+r}\big) \ge 1 - \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 1 - \varepsilon.$$

Отсюда и из определения случайного элемента $\underline{X}_n(s)$ имеем, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$P_n(H_\varepsilon^{l+r}) \ge 1 - \varepsilon.$$

Последнее неравенство показывает, что семейство вероятностных мер $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ плотное (определение плотности см. в [26]). Следовательно, по теореме Прохорова [26] оно относительно компактно. Поэтому существует подпоследовательность $\{P_{n_k}\} \subset \{P_n\}$ такая, что P_{n_k} при $k \to \infty$ слабо сходится к некоторой мере P на $(H^{l+r}(D), \mathscr{B}(H^{l+r}(D)))$. Это можно записать соотношением

$$\underline{X}_{n_k}(s) \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}} P. \tag{13}$$

На вероятностном пространстве $(\Omega_0, \mathscr{B}(\Omega_0), \mathbb{P})$ определим еще один $H^{l+r}(D)$-значный случайный элемент $\underline{X}_T(s)$ формулой

$$\underline{X}_T(s) = \underline{L}(s + i\theta T, \underline{\chi}, \underline{\alpha}, \underline{\lambda}).$$

Тогда из первого утверждения леммы 6 вытекает, что для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\mathbb{P}(\underline{\varrho}(\underline{X}_T(s),\underline{X}_{T,n}(s))\ge\varepsilon)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{mes}\{\tau\in[0,T]:\underline{\varrho}(\underline{L}(s+i\tau,\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda}),\underline{L}_n(s+i\tau,\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda}))\ge\varepsilon\}$$
$$\le\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T\varepsilon}\int_0^T\underline{\varrho}(\underline{L}(s+i\tau,\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda}),\underline{L}_n(s+i\tau,\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda}))\,d\tau=0.$$

Последнее равенство и соотношения (7) и (13) показывают, что выполнены все условия теоремы 4.2 из [26]. Следовательно,

$$\underline{X}_T(s)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}}P, \tag{14}$$

что эквивалентно слабой сходимости меры P_T при $T\to\infty$ к мере P.

Остается доказать, что мера $P_{T,\underline{\omega}}$ при $T\to\infty$ также слабо сходится к P. Сначала замечаем, что соотношение (14) показывает, что мера P не зависит от выбора последовательности $\{P_{n_k}\}$. Отсюда и относительной компактности семейства $\{P_n\}$ вытекает, что

$$\underline{X}_n(s)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}}P. \tag{15}$$

На вероятностном пространстве $(\Omega_0,\mathscr{B}(\Omega_0),\mathbb{P})$ определим $H^{l+r}(D)$-значные случайные элементы

$$\underline{X}_{T,n,\underline{\omega}}(s)=\underline{L}_n(s+i\theta T,\underline{\omega},\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda}),$$
$$\underline{X}_{T,\underline{\omega}}(s)=\underline{L}(s+i\theta T,\underline{\omega},\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda}).$$

Повторяя вышеприведенные рассуждения для случайных элементов $\underline{X}_{T,n,\underline{\omega}}(s)$ и $\underline{X}_{T,\omega}(s)$ и применяя леммы 5 и 6, а также соотношение (15), без труда получаем, что мера $P_{T,\underline{\omega}}$ при $T\to\infty$ также слабо сходится к P.

Теорема 3 будет доказана, если покажем, что предельная мера P в лемме 7 совпадает с распределением $P_{\underline{L}}$ случайного элемента $\underline{L}(s,\underline{\omega},\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda})$. Для этой цели применим некоторые элементы эргодической теории. Пусть для $\tau\in\mathbb{R}$

$$\underline{a}_\tau=((p^{-i\tau}:p\in\mathscr{P}),((m+\alpha_1)^{-i\tau}:m\in\mathbb{N}_0),\dots,((m+\alpha_r)^{-i\tau}:m\in\mathbb{N}_0)).$$

Определим $\underline{\Phi}_\tau(\underline{\omega})=\underline{a}_\tau\underline{\omega}$, $\underline{\omega}\in\underline{\Omega}$. Тогда $\{\underline{\Phi}_\tau:\tau\in\mathbb{R}\}$ является однопараметрической группой измеримых и сохраняющих меру преобразований на $\underline{\Omega}$. Напоминаем, что множество $A\in\mathscr{B}(\underline{\Omega})$ называется *инвариантным* относительно этой группы, если для всякого $\tau\in\mathbb{R}$ множества A и $\underline{\Phi}_\tau(A)$ могут отличаться друг от друга только на множество нулевой $\underline{m}_H$ меры. Группа $\{\underline{\Phi}_\tau:\tau\in\mathbb{R}\}$ называется эргодической, если ее σ-поле инвариантных множеств состоит только из множеств, мера $\underline{m}_H$ которых равна 0 и 1.

Лемма 8. *Предположим, что множество $L(\mathscr{P},\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ линейно независимо над $\mathbb{Q}$. Тогда группа $\{\underline{\Phi}_\tau:\tau\in\mathbb{R}\}$ эргодична.*

Доказательство. Поскольку множество $L(\mathscr{P},\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ линейно независимо над $\mathbb{Q}$, доказательство, по существу, совпадает с доказательством леммы 7 из [28], в которой требовалась алгебраическая независимость чисел $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ над $\mathbb{Q}$.

Доказательство теоремы 3. Берем фиксированное множество непрерывности A меры P в лемме 6. Ввиду эквивалента слабой сходимости вероятностных мер в терминах множеств непрерывности (теорема 2.1 из [26]) в силу леммы 7

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{mes}\{\tau\in[0,T]:\underline{L}(s+i\tau,\underline{\omega},\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda})\in A\}=P(A). \tag{16}$$

На вероятностном пространстве $(\underline{\Omega},\mathscr{B}(\underline{\Omega}),\underline{m}_H)$ определим случайную величину $X(\underline{\omega})$ формулой

$$X(\underline{\omega})=\begin{cases}1, & \text{если } \underline{L}(s,\underline{\omega},\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda})\in A,\\ 0, & \text{если } \underline{L}(s,\underline{\omega},\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda})\neq A.\end{cases}$$

Тогда для математического ожидания имеем

$$\mathbb{E}X=\int\limits_{\underline{\Omega}}X(\underline{\omega})\,d\underline{m}_H=\underline{m}_H(\underline{\omega}\in\underline{\Omega}:\underline{L}(s,\underline{\omega},\underline{\chi},\underline{\alpha},\lambda)\in A)=P_{\underline{L}}(A). \tag{17}$$

Из леммы 8 вытекает эргодичность случайного процесса $X(\underline{\Phi}_\tau(\underline{\omega}))$. Поэтому классическая теорема Биркгофа — Хинчина (см., например, [29]) влечет за собой для почти всех $\underline{\omega}\in\underline{\Omega}$ равенство

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T X(\underline{\Phi}_\tau(\underline{\omega}))\,d\tau=\mathbb{E}X. \tag{18}$$

Так как из определений случайной величины X и преобразования $\underline{\Phi}_\tau$ следует, что

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T X(\underline{\Phi}_\tau(\underline{\omega}))\,d\tau=\frac{1}{T}\mathrm{mes}\{\tau\in[0,T]:\underline{L}(s+i\tau,\underline{\omega},\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda})\in A\},$$

учитывая равенства (17) и (18), получаем, что

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{mes}\{\tau\in[0,T]:\underline{L}(s+i\tau,\underline{\omega},\underline{\chi},\underline{\alpha},\underline{\lambda})\in A\}=P_{\underline{L}}(A).$$

Отсюда и из (16) заключаем, что $P(A)=P_{\underline{L}}(A)$. Поскольку A — произвольное множество непрерывности меры P, последнее равенство имеет место для всех множеств непрерывности меры P. Известно, что множества непрерывности образуют определяющий класс вероятностной меры, поэтому $P(A)=P_{\underline{L}}(A)$ для всех $A\in\mathscr{B}(H^{l+r}(D))$. Теорема доказана.

3. Носитель меры $P_{\underline{L}}$

Напоминаем, что *носителем меры* $P_{\underline{L}}$ называется минимальное замкнутое множество $S_{P_{\underline{L}}}$ пространства $H^{l+r}(D)$ такое, что $P_{\underline{L}}(S_{P_{\underline{L}}})=1$. Множество $S_{P_{\underline{L}}}$ состоит из всех таких элементов $\underline{g}\in H^{l+r}(D)$, что $P_{\underline{L}}(G)>0$ для любой открытой окрестности G элемента $\underline{g}$.

Пусть

$$S=\{g\in H(D):g(s)\neq 0 \text{ или } g(s)\equiv 0\}.$$

Лемма 9. *Предположим, что* $\chi_1, \dots, \chi_l$ — *попарно не эквивалентные характеры Дирихле, а множество* $L(\mathscr{P}, \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ *линейно независимо над* $\mathbb{Q}$. *Тогда носителем меры* $P_{\underline{L}}$ *является множество* $S^l \times H^r(D)$.

Доказательство. Поскольку пространства $H^l(D)$ и $H(D)$ сепарабельны и

$$H^{l+r}(D) = H^l(D) \times \underbrace{H(D) \times \dots \times H(D)}_{r},$$

то [26]

$$\mathscr{B}(H^{l+r}(D)) = \mathscr{B}(H^l(D)) \times \underbrace{\mathscr{B}(H(D)) \times \dots \times \mathscr{B}(H(D))}_{r}.$$

Поэтому достаточно рассматривать меру $P_{\underline{L}}(A)$ для $A = B \times B_1 \times \dots \times B_r$, где $B \in \mathscr{B}(H^l(D))$, а $B_j \in \mathscr{B}(H(D))$, $j = 1, \dots, r$. Пусть $\widehat{m}_{jH}$ — мера Хаара на $(\widehat{\Omega}_j, \mathscr{B}(\widehat{\Omega}_j))$, $j = 1, \dots, r$. Тогда мера Хаара $\underline{m}_H$ является произведением мер m_H и $\widehat{m}_{1H}, \dots, \widehat{m}_{rH}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} P_{\underline{L}}(A) = \underline{m}_H(\underline{\omega} \in \underline{\Omega} : \underline{L}(s, \underline{\omega}, \underline{\chi}, \underline{\alpha}, \underline{\lambda}) \in A) \\ = \underline{m}_H(\underline{\omega} \in \underline{\Omega} : (L(s, \omega, \chi_1), \dots, L(s, \omega, \chi_l)) \in B, \\ L(\lambda_1, \alpha_1, s, \widehat{\omega}_1) \in B_1, \dots, L(\lambda_r, \alpha_r, s, \widehat{\omega}_r) \in B_r) \\ = m_H(\omega \in \Omega : (L(s, \omega, \chi_1), \dots, L(s, \omega, \chi_l)) \in B) \\ \times \widehat{m}_{1H}(\widehat{\omega}_1 \in \widehat{\Omega}_1 : L(\lambda_1, \alpha_1, s, \widehat{\omega}_1) \in B_1) \cdots \widehat{m}_{rH}(\widehat{\omega}_r \in \widehat{\Omega}_r : L(\lambda_r, \alpha_r, s, \widehat{\omega}_r) \in B_r). \end{aligned} \tag{19}$$

Через $P_{\underline{\underline{L}}}$ обозначим распределение $H^l(D)$-значного случайного элемента $(L(s, \omega, \chi_1), \dots, L(s, \omega, \chi_l))$. Так как характеры Дирихле $\chi_1, \dots, \chi_l$ попарно не эквивалентны, носителем меры $P_{\underline{\underline{L}}}$ является множество S^l [16], т. е. S^l — минимальное замкнутое подмножество пространства $H^l(D)$ такое, что

$$m_H(\omega \in \Omega : (L(s, \omega, \chi_1), \dots, L(s, \omega, \chi_l)) \in S^l) = 1. \tag{20}$$

Так как множество $L(\mathscr{P}, \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ линейно независимо над $\mathbb{Q}$, множества $L(\alpha_1), \dots, L(\alpha_r)$ также линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Отсюда и из [10] получаем, что носителем меры

$$P_{L_j}(B_j) = \widehat{m}_{jH}(\widehat{\omega}_j \in \widehat{\Omega}_j : L(\lambda_j, \alpha_j, s, \widehat{\omega}_j) \in B_j), \quad B_j \in \mathscr{B}(H(D)),$$

$j = 1, \dots, r$, является все пространство $H(D)$, т. е. $H(D)$ — минимальное замкнутое множество в пространстве $H(D)$ такое, что

$$\widehat{m}_{jH}(\widehat{\omega} \in \widehat{\Omega}_j : L(\lambda_j, \alpha_j, s, \widehat{\omega}_j) \in H(D)) = 1, \quad j = 1, \dots, r.$$

Отсюда в силу (20) и (19) получаем утверждение теоремы.

4. Доказательство теоремы универсальности

Кроме теорем 3 и 9, доказательство теоремы 1 использует известную теорему Мергеляна о приближении аналитических функций многочленами. Ради удобства сформулируем версию этой теоремы в виде следующей леммы.

Лемма 10. *Пусть K — компактное подмножество на комплексной плоскости, обладающее связным дополнением, а $f(s)$ — непрерывная на K и аналитическая внутри K функция. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $p(s)$, что*

$$\sup_{s\in K} |f(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

Доказательство леммы содержится в [30, 31].

Доказательство теоремы 1. В силу леммы 10 найдутся такие многочлены $p_1(s), \dots, p_l(s)$ и $\hat{p}_1(s), \dots, \hat{p}_r(s)$, что

$$\sup_{1\le j\le l} \sup_{s\in K_j} |f_j(s) - e^{p_j(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{21}$$

$$\sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in \widehat{K}_j} |\hat{f}_j(s) - \hat{p}_j(s)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{22}$$

Определим множество

$$G = \left\{ (g_1, \dots, g_l, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_r) \in H^{l+r}(D) : \sup_{1\le j\le l} \sup_{s\in K_j} |g_j(s) - e^{p_j(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}, \right.$$
$$\left. \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in \widehat{K}_j} |\hat{g}_j(s) - \hat{p}_j(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Тогда G — открытое множество в $H^{l+r}(D)$. Кроме того, в силу теоремы 9 набор функций $(e^{p_1(s)}, \dots, e^{p_l(s)}, \hat{p}_1(s), \dots, \hat{p}_r(s)) \in H^{l+r}(D)$ является элементом носителя меры $P_{\underline{L}}$. Поэтому $P_{\underline{L}}(G) > 0$. Отсюда, из теоремы 3 и эквивалента слабой сходимости вероятностных мер в терминах открытых множеств (теорема 2.1 из [26]) следует, что

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{mes}\{\tau \in [0,T] : \underline{L}(s + i\tau, \underline{\chi}, \underline{\alpha}, \underline{\lambda}) \in G\} \ge \underline{P}(G) > 0.$$

Используя определение множества G, получаем неравенство

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{mes} \left\{ \tau \in [0,T] : \sup_{1\le j\le l} \sup_{s\in K_j} |L(s + i\tau, \chi_j) - e^{p_j(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}, \right.$$
$$\left. \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in \widehat{K}_j} |L(\lambda_j, \alpha_j, s + i\tau) - \hat{p}_j(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} > 0. \tag{23}$$

Из (21) и (22) находим, что

$$\left\{ \tau \in [0,T] : \sup_{1\le j\le l} \sup_{s\in K_j} |L(s + i\tau, \chi_j) - e^{p_j(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}, \right.$$
$$\left. \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in \widehat{K}_j} |L(\lambda_j, \alpha_j, s + i\tau) - \hat{p}_j(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$
$$\subset \{\tau \in [0,T] : \sup_{1\le j\le l} \sup_{s\in K_j} |L(s + i\tau, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon,$$
$$\sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in \widehat{K}_j} |L(\lambda_j, \alpha_j, s + i\tau) - \hat{f}_j(s)| < \varepsilon\}.$$

Отсюда и из (23) приходим к неравенству теоремы 1.

Следствие 2 вытекает из утверждения теоремы 1, так как алгебраическая независимость над $\mathbb{Q}$ чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ влечет за собой линейную независимость множества $L(\mathscr{P}, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.

2. *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.

3. *Чандрасекхаран К.* Арифметические функции. М.: Наука, 1975.

4. *Давенпорт Г.* Мультипликативная теория чисел. М.: Наука, 1971.

5. *Iwaniec H., Kowalski E.* Analytic number theory. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2004. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.; V. 53).

6. *Lipschitz R.* Untersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reihe // J. Reine Angew. 1857. V. 54. P. 313–328.

7. *Lerch M.* Note sur la fonction $\mathscr{R}(w, x, s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi i}}{(w+k)^s}$ // Acta Math. 1887. V. 11. P. 19–24.

8. *Lagarias J. C., Li W.-Ch. W.* The Lerch zeta function. I. Zeta integrals // Forum Math. 2012. V. 24. P. 1–48.

9. *Lagarias J. C., Li W.-Ch. W.* The Lerch zeta-function. II. Analytic continuation // Forum Math. 2012. V. 24. P. 49–84.

10. *Laurinčikas A., Garunkštis R.* The Lerch zeta-function. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002.

11. *Pál J.* Zwei kleine Bemerkungen // Tohôku Math. J. 1914/15. V. 6. P. 42–43.

12. *Grosse-Erdmann K.-G.* Universal families and hypercyclic operators // Bull. Amer. Math. Soc. 1999. V. 36. P. 345–381.

13. *Воронин С. М.* Теорема об «универсальности» дзета-функции Римана // Изв. АН СССР. Сер. математика. 1975. Т. 39. С. 475–486.

14. *Laurinčikas A.* Limit theorems for the Riemann zeta-function. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1996.

15. *Воронин С. М.* О функциональной независимости L-функций Дирихле // Acta Arith. 1975. V. 27. P. 493–503.

16. *Laurinčikas A.* On joint universality of Dirichlet L-functions // Чебышевский сб. 2011. V. 12, N 1. P. 124–139.

17. *Bagchi B.* The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series: Ph. D Thesis. Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

18. *Bagchi B.* A joint universality theorem for Dirichlet L-functions // Math. Z. 1982. Bd 181. S. 319–334.

19. *Gonek S. M.* Analytic properties of zeta and L-functions: Ph. D. Thesis. Univ. Michigan, 1979.

20. *Laurinčikas A., Matsumoto K.* The joint universality and the functional independence for Lerch zeta-functions // Nagoya Math. J. 2000. V. 157. P. 211–227.

21. *Laurinčikas A., Matsumoto K.* Joint value distribution theorems on Lerch zeta-functions. III // Anal. Prob. Methods Number Theory (Eds. Laurinčikas A., E. Manstavičius). Vilnius: TEV, 2007. P. 87–98.

22. *Лауринчикас А.* О совместной универсальности дзета-функций Лерха // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 3. С. 428–437.

23. *Nakamura T.* The existence and the non-existence of joint t-universality for Lerch zeta-functions // J. Number Theory. 2007. V. 125, N 2. P. 424–441.

24. *Laurinčikas A.* The joint universality of Hurwitz zeta-functions // Šiauliai Math. Semin. 2008. V. 3, N 11. P. 169–187.

25. *Heyer H.* Probability measures on locally compact groups. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1977.

26. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.

27. *Лауринчикас А., Шяучюнас Д.* Замечания об универсальности периодической дзета-функции // Мат. заметки. 2006. Т. 80, № 4. С. 561–568.

28. *Лауринчикас А.* Совместная универсальность дзета-функций с периодическими коэффициентами // Изв. РАН. Сер. математика. 2010. Т. 74, № 3. С. 79–102.

29. *Cramér H., Leadbetter M. R.* Stationary and related stochastic processes. New York: John Wiley, 1967.

30. *Мергелян С. Н.* Равномерное приближение функций комплексной переменной // Успехи мат. наук. 1952. Т. 7. С. 31–122.

31. *Walsh J. L.* Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1960. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.; V. 20).

Статья поступила 29 ноября 2012 г.

Лауринчикас Антанас
Вильнюский университет,
ул. Наугардуко, 24, Вильнюс LT-03225, Литва
antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Мацайтене Рената
Шяуляйский университет,
пр. Вишинскио, 19, Шяуляй LT-77156, Литва
renata.macaitiene@mi.su.lt