Сибирский математический журнал
Июль—август, 2014. Том 55, № 4

УДК 517.538

КРИТЕРИЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПОСРЕДСТВОМ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

М. А. Комаров

Аннотация. Методом редукции к полиномиальной интерполяции исследована задача кратной интерполяции наипростейшими дробями. Получены алгебраические условия разрешимости и однозначной разрешимости задачи. Введено понятие обобщенной кратной интерполяции посредством наипростейших дробей порядка $\le n$. Рассмотрены неполные (т. е. с суммарной кратностью узлов, строго меньшей n) задачи интерполяции; найдено неулучшаемое значение суммарной кратности узлов, при которой неполная задача заведомо разрешима. Получено дифференциальное уравнение порядка n, множество решений которого совпадает с множеством всех наипростейших дробей порядка $\le n$.

Ключевые слова: наипростейшая дробь, обобщенная кратная интерполяция, единственность.

§ 1. Введение

Наипростейшей дробью (н. д.) *порядка не выше* n, $n \in \mathbb{N}$, называется рациональная функция вида

$$R = Q'/Q, \quad Q(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, \quad Q \not\equiv 0, \ z, a_j \in \mathbb{C}; \qquad (1)$$

ее порядок считается равным в точности n, если $a_n \neq 0$. Н. д. (1) можно представить в виде

$$R(z) = \sum_{j=1}^{n} (z - C_j)^{-1}, \quad C_j \in \overline{\mathbb{C}}, \qquad (2)$$

при этом порядок равен n в том и только том случае, когда все полюсы C_j отличны от ∞.

Задача интерполяции посредством н. д. состоит в том, чтобы построить н. д. вида (1), удовлетворяющую таблице интерполяции

$$R^{(s)}(z_j) = b_{j,s+1}, \quad z_j, b_{j,s+1} \in \mathbb{C} \quad (j = \overline{1,k}, \ s = \overline{0, m_j - 1}, \ m_j \ge 1), \qquad (3)$$

где $z_1, \dots, z_k$ — все попарно различные узлы интерполяции, а $m_1, \dots, m_k$ — их кратности. Если все узлы простые (однократные), то (3) называется *задачей простой интерполяции*; в противном случае интерполяция называется *кратной*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–31471мол_а) и Министерства образования и науки (грант 14.B37.21.0369).

В стандартной постановке задачи суммарная кратность S узлов таблицы (3) равна n:

$$S := m_1 + \dots + m_k = n. \tag{4}$$

Задачу (3), (4) иногда будем называть *полной* (в отличие от *неполных*, т. е. задач интерполяции, в которых максимальный допустимый порядок интерполирующей н. д. строго больше суммарной кратности узлов: $n > S$; специальный класс таких задач будет рассмотрен в п. 3.2).

Задача (3), (4) изучалась, например, в [1–6]. Было установлено, что даже простая интерполяция н. д. имеет ряд особенностей по сравнению с интерполяцией полиномами. Так, интерполяционная н. д. может не быть единственной либо даже не существовать.

Пример 1. Не существует н. д. порядка не выше 5, интерполирующей таблицу

$$(-\sqrt{2}, -3\sqrt{2}), \quad (\sqrt{2}, 3\sqrt{2}), \quad (-1/\sqrt{3}, -\sqrt{3}), \quad (1/\sqrt{3}, \sqrt{3}), \quad (0, 1)$$

с пятью простыми узлами (неразрешимость этой задачи в классе н. д. порядка, равного в точности 5, ранее установлена в [2]). Действительно, если такая н. д. Q'/Q существует, то $Q(0) \neq 0$, иначе узел $z = 0$ является полюсом дроби Q'/Q. Кроме того, по условию $Q'(0) = Q(0)$. Тем самым поскольку полином Q определяется с точностью до постоянного множителя, не нарушая общности, можно записать Q в виде $Q(z) = 1 + z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + a_5z^5$. Но тогда из уравнений $Q'(-\sqrt{2}) = -3\sqrt{2} \cdot Q(-\sqrt{2})$, $Q'(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} \cdot Q(\sqrt{2})$ следует соотношение $6a_3 + 4a_5 = -5$, а из уравнений $Q'(-1/\sqrt{3}) = -\sqrt{3} \cdot Q(-1/\sqrt{3})$, $Q'(1/\sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot Q(1/\sqrt{3})$ — соотношение $6a_3 + 4a_5 = 0$; противоречие. Следовательно, необходимо $Q(0) = 0$.

Применительно к (полной) задаче простой интерполяции:

$$R(z_j) = \beta_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{5}$$

в [2] введены понятия особого и регулярного узлов и обобщенной интерполяции. Именно, н. д. (1) называется *решением задачи обобщенной интерполяции* таблицы (5), если полином Q удовлетворяет соотношениям $Q'(z_j) = \beta_j Q(z_j)$, $j = \overline{1, n}$. Если при этом $Q(z_j) \neq 0$ (соответственно $Q(z_j) = 0$), то узел z_j называется *регулярным* (соответственно *особым*) относительно данного решения. Ясно, что особый узел является полюсом соответствующего решения R, а задача (5) разрешима в том и только том случае, когда существует решение обобщенной задачи, относительно которого все узлы регулярны. В отличие от задачи (обычной) интерполяции задача обобщенной интерполяции таблицы (5) всегда разрешима (см. теорему 1).

Замечание. Строго говоря, в [2] решением задачи обобщенной интерполяции таблицы (5) была названа н. д. порядка, равного в точности n, поэтому возникали неразрешимые задачи обобщенной интерполяции. Предвосхищая введение в § 2 определения обобщенной *кратной* интерполяции, для единообразия разрешаем и здесь порядку дроби быть меньше n. В таком случае решение есть всегда; кроме того, этот подход близок к методу полиномиальной интерполяции. Отметим, что и из результатов [2] легко следует разрешимость задачи обобщенной интерполяции в случае простых узлов в нашей постановке.

Пример 2. Решений задачи *обобщенной* интерполяции 5-узловой таблицы из примера 1 посредством н. д. порядка не выше 5 бесконечно много; множество этих решений совпадает с множеством всех н. д., порожденных полиномами из двупараметрического семейства $Q(z) = Q(z; a_2, a_3) = a_2z^2 + a_3z^3 - a_2z^4 - (3/2)a_3z^5$, $|a_2| + |a_3| \neq 0$.

Ситуации, аналогичные появлению особых узлов, наблюдаются (при любом $n \geq 3$) и в задаче кратной интерполяции (см. § 4, пример 5). В связи с этим в настоящей работе введем (см. § 2) понятие обобщенной интерполяции таблиц с кратными узлами, докажем (см. п. 3.1), что и в этом случае решение задачи обобщенной интерполяции существует, и получим алгебраический критерий его единственности (и однозначной разрешимости задачи (3), (4)). Как побочный результат будет дан рекуррентный способ построения обыкновенного дифференциального уравнения порядка n, множество всех решений которого совпадает с множеством всех н. д. порядка не выше n (см. § 2). Кроме того, докажем (см. п. 3.2), что интерполяционная н. д. (1) заведомо существует, вообще говоря, только при условии $S \leq n - k + 1$.

Результатов об оценке погрешности интерполяции к настоящему моменту известно немного. Отметим работы [3, 6], в которых получены оценки погрешности при интерполяции аналитических функций по одному n-кратному узлу (аппроксимация Паде), а также работу [5], где получена оценка погрешности интерполяции констант $c \in (0, 15/31)$ по чебышевскому набору узлов. В настоящей работе погрешность не исследуется.

§ 2. Определение обобщенной кратной интерполяции наипростейшими дробями

Рассмотрим аналитическую вблизи точки $z = a$ функцию u такую, что $u(a) \neq 0$, и обозначим $\rho(z) = u'(z)/u(z)$.

Лемма 1. *Производные функции $u = u(z)$ представляются в виде*

$$u^{(s+1)} = uF_s(\rho), \quad F_s(\rho) = F_s(\rho, \rho', \dots, \rho^{(s)}), \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

где последовательность $\{F_s\}$ дифференциальных операторов определяется рекуррентно:

$$F_0(\rho) = \rho, \quad F_{s+1}(\rho) = \rho F_s(\rho) + (F_s(\rho))'_z, \quad s = 0, 1, 2, \dots.$$

В частности, оператор F_s имеет вид $F_s(\rho) = \rho^{(s)} + H_s(\rho, \rho', \dots, \rho^{(s-1)})$, где H_s — алгебраический полином относительно своих аргументов. Таким образом,

$$u^{(s+1)}(a) = u(a)h_{s+1}, \quad h_{s+1} = F_s(\rho)|_{z=a}, \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

где h_{s+1} зависит только от величин $b_{j+1} := \rho^{(j)}(a)$, $j = 0, 1, 2, \dots, s$. Последовательные вычисления приводят к формулам

$$h_1 = b_1, \quad h_2 = b_2 + b_1^2, \quad h_3 = b_3 + 3b_1b_2 + b_1^3, \ \dots. \tag{6}$$

Эти формулы обратимы — каждая из величин b_j обратной прогонкой однозначно выражается из соотношений (6) через величины $h_1, h_2, \dots, h_j$.

Действительно, из соотношения $\rho = u'/u$ следует тождество $u' = u\rho \equiv uF_0(\rho)$. Если выражение s-й производной получено и имеет вид $u^{(s)} = uF_{s-1}(\rho)$, то

$$u^{(s+1)} = u'F_{s-1}(\rho) + u(F_{s-1}(\rho))'_z = u(\rho F_{s-1}(\rho) + (F_{s-1}(\rho))'_z) \equiv uF_s(\rho).$$

Выражение производных доказано по индукции. Отсюда легко вытекают остальные утверждения леммы. Например, из тождеств

$$u'' = (u\rho)' = u(\rho' + \rho^2), \quad u''' = (u(\rho' + \rho^2))' = u(\rho'' + 3\rho\rho' + \rho^3)$$

при $z = a$ следуют вторая и третья из формул (6). $\square$

Следствие 1. *Н. д.* $R = Q'/Q$ *вида* (1) *является решением задачи интерполяции* (3), *полной либо неполной, если и только если полином* Q *удовлетворяет соотношениям*

$$Q(z_j) \neq 0, \quad Q^{(s)}(z_j) = Q(z_j)h_{j,s} \quad (j = \overline{1,k},\ s = \overline{1,m_j}), \tag{7}$$

где величины $h_{j,s}$ *выражаются через значения* $b_{j,s}$ *таблицы* (3) *по формулам вида* (6):

$$h_{j,1} = b_{j,1}, \quad h_{j,2} = b_{j,2} + b_{j,1}^2, \quad h_{j,3} = b_{j,3} + 3b_{j,1}b_{j,2} + b_{j,1}^3,\ \ldots.$$

Определим обобщенную кратную интерполяцию посредством наипростейших дробей.

Определение. Назовем н. д. $R = Q'/Q$ вида (1) *решением задачи обобщенной интерполяции* (3), если полином Q удовлетворяет соотношениям

$$Q \not\equiv 0, \quad Q^{(s)}(z_j) = Q(z_j)h_{j,s} \quad (j = \overline{1,k}, s = \overline{1,m_j}),$$

где $h_{j,s}$ вычисляется через $b_{j,1}$, $b_{j,2}$, $\ldots$, $b_{j,s}$ по формулам вида (6) (см. следствие 1). Задачу поиска такой н. д. будем называть *задачей обобщенной интерполяции.*

Подчеркнем, что здесь в отличие от (7) равенства $Q(z_j) = 0$ возможны, и в этом случае требуем, чтобы все соответствующие производные $Q^{(s)}(z_j)$ были равны 0, $s = \overline{1,m_j}$.

Узел z_j будем называть *особым* (соответственно *регулярным*) *относительно решения* Q'/Q *задачи обобщенной интерполяции*, если $Q(z_j) = 0$ (соответственно $Q(z_j) \neq 0$). Отметим, что если все $Q(z_j)$ ненулевые, то по следствию 1 н. д. $R = Q'/Q$ является решением обычной задачи интерполяции (3). Если же $Q(z_j) = 0$ в некотором узле z_j, то интерполяции в этом узле посредством соответствующей дроби R нет (z_j — полюс дроби). Этот особый узел по определению решения задачи обобщенной интерполяции является нулем кратности не ниже $m_j + 1$ полинома Q.

Введенная терминология относится и к полным, и к неполным задачам.

Для исследования задачи обобщенной интерполяции удобно использовать параметры $t_j := Q(z_j)$, $j = \overline{1,k}$. Тем самым на полином Q, порождающий решение этой задачи, наложены $n + k$ соотношений:

$$Q(z_j) = t_j, \quad Q^{(s)}(z_j) = t_j h_{j,s} \quad (j = \overline{1,k},\ s = \overline{1,m_j}). \tag{8}$$

Н. д. $R = Q'/Q$ *вида* (1) *является решением задачи обобщенной интерполяции* (3), *если и только если полином* $Q \not\equiv 0$ *удовлетворяет соотношениям* (8) *при каком-либо наборе значений параметров* $\{t_j\}$. *Задача* (*обычной*) *интерполяции* (3) *разрешима, если и только если задача обобщенной интерполяции* (3) *имеет решение, соответствующее какому-либо набору значений* $t_1 \neq 0, \ldots, t_k \neq 0$. Итак, интерполяция н. д. сведена к интерполяции полиномом.

Поскольку полином Q степени не выше n удовлетворяет тождеству $Q^{(n+1)} \equiv 0$, из леммы 1 сразу следует рекуррентный способ построения обыкновенного дифференциального уравнения Y_n порядка n, которому удовлетворяет (во всех точках, отличных от полюсов) любая н. д. (1).

Следствие 2. *Дифференциальное уравнение Y_n имеет вид $F_n(y) \equiv y^{(n)} + H_n(y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$; оператор F_n определен в лемме 1; H_n — алгебраический многочлен относительно своих аргументов. Наипростейшие дроби порядка $\le n$ исчерпывают всю совокупность решений уравнения Y_n; его общее решение дается выражением (2), где произвольные постоянные C_j — комплексные числа, часть которых может быть равна ∞.*

Например, общее решение $(z - C)^{-1}$ дифференциального уравнения $Y_1 : F_1(y) \equiv y' + y^2 = 0$ имеет вид наипростейшей дроби порядка 1 (либо порядка 0, если $C = \infty$). Аналогично $Y_2 : F_2(y) \equiv y'' + 3yy' + y^3 = 0$, $Y_3 : F_3(y) \equiv y''' + 3y'^2 + 4yy'' + 6y^2y' + y^4 = 0$.

Докажем, что решений уравнения Y_n, отличных от н. д. порядка не выше n, быть не может. Действительно, из вида уравнения следует, что для него выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Предположим, что h — решение уравнения Y_n, не являющееся наипростейшей дробью порядка не выше n. Пусть в точке a это решение не имеет полюса. Известно (см. п. 4.1), что н. д. Паде всегда существует и единственна; построим такую н. д. Паде R порядка не выше n, которая удовлетворяет начальным условиям $R^{(s)}(a) = h^{(s)}(a)$, $s = \overline{0, n-1}$. Но тогда допущение отличия функции h от какой угодно наипростейшей дроби приводит к противоречию с единственностью решения задачи Коши для уравнения Y_n, поскольку н. д. R необходимо является решением Y_n в силу определения уравнения.

§ 3. Теоремы о разрешимости задачи кратной интерполяции

3.1. Критерий однозначной разрешимости полной задачи кратной интерполяции. Соотношения (8), (4) приводят к линейной однородной алгебраической системе

$$\sum_{p=s}^{n} a_p \cdot \frac{p! z_j^{p-s}}{(p-s)!} - t_j h_{j,s} = 0, \quad h_{j,0} := 1 \quad (j = \overline{1,k},\ s = \overline{0, m_j},\ S = n) \qquad (9)$$

из $n+k$ уравнений относительно $n+k+1$ неизвестных $a_0, a_1, \dots, a_n, t_1, \dots, t_k$, где a_j — коэффициенты полинома Q (см. (1)); например, если все узлы простые ($k = n$), то развернутый вид системы таков:

$$\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^n & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2z_1 & \dots & nz_1^{n-1} & h_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^n & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2z_n & \dots & nz_n^{n-1} & 0 & 0 & \dots & h_{n,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_n \\ -t_1 \\ \dots \\ -t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из того, что в однородной системе (9) число неизвестных больше числа уравнений, следует существование нетривиального ее решения $\{a_s, t_j\}$, причем на этом решении не все a_s равны нулю, поскольку иначе и все величины t_j в силу соотношений $Q(z_j) = t_j$ были бы обязаны обратиться в нуль. Тем самым любому нетривиальному решению соответствует полином $Q \not\equiv 0$, который по определению порождает решение задачи обобщенной интерполяции. Итак, доказали, что *полная задача обобщенной интерполяции всегда разрешима* (для неполных задач это тоже верно). Отметим одно свойство матрицы системы (9).

Лемма 2. *Первые $n+1$ столбцов матрицы системы* (9) *линейно независимы. В частности, при обращении всех t_j в нуль все a_s также обращаются в нуль.*

Действительно, при фиксированных значениях параметров t_j коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ однозначно определяются из подсистемы, порождаемой n соотношениями
$$Q^{(s)}(z_j) = t_j h_{j,s} \quad (j = \overline{1,k},\ s = \overline{1,m_j},\ S = n), \tag{10}$$
так как однозначно разрешима соответствующая задача кратной интерполяции полиномом $Q'(z)$ [7]. Определитель матрицы подсистемы (10) относительно $a_1, \ldots, a_n$ отличен от нуля и совпадает с определителем (относительно $a_0, a_1, \ldots, a_n$) подсистемы, получаемой добавлением к (10) уравнения $Q(z_1) = a_0 + a_1 z_1 + \cdots + a_n z_1^n = t_1$ системы (9), откуда и следует требуемое. $\square$

Если дроби P'/P и Q'/Q являются решениями задачи интерполяции (обычной либо обобщенной, полной либо неполной), то н. д. вида $(P'+\tau Q')/(P+\tau Q)$, $\tau = \mathrm{const}$, тоже решение этой задачи (в случае обычной интерполяции всегда можно выбрать непустой интервал значений τ так, что $P(z_j) + \tau Q(z_j) \neq 0$ по всем узлам z_j). Следовательно, если задача имеет более одного решения, то решений бесконечно много; аналогичные вопросы обсуждались в [4, 8, 9].

В силу леммы 2 ранг $\Re$ матрицы системы (9) удовлетворяет неравенству $\Re \geq n+1$ и, как показывают при $n = 2$ пример двухузловых таблиц вида $(a+2/h, h)$, $(a, -h)$ (для них $\Re = 3$), а также при любом n пример интерполяции по одному n-кратному узлу, может в точности равняться $n+1$. Очевидно, множество полиномов — решений системы (8) — есть линейное пространство размерности $n + k - \Re \leq k - 1$.

Обозначим через T_j определитель матрицы, получаемой из матрицы системы (9) вычеркиванием $(n+1+j)$-го столбца, т. е. столбца коэффициентов при t_j. Получим k величин $T_1, \ldots, T_k$ по числу различных узлов. Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. (a) *Задача обобщенной интерполяции* (3), (4) *всегда разрешима.*

(b) *Задача обобщенной интерполяции* (3), (4) *однозначно разрешима, если и только если хотя бы один из определителей T_j отличен от нуля.*

(c) *Равенство $T_j = 0$ эквивалентно тому, что узел z_j является особым относительно некоторого решения задачи обобщенной интерполяции* (3), (4).

(d) *Задача* (*обычной*) *интерполяции* (3), (4) *однозначно разрешима, если и только если все T_j отличны от* 0.

(e) *Если задача* (*обычной*) *интерполяции* (3), (4) *имеет более одного решения, то все $T_j = 0$, в частности, каждый узел является особым хотя бы для одного решения задачи обобщенной интерполяции.*

(f) *Все k узлов не могут быть особыми относительно одного и того же решения задачи обобщенной интерполяции* (3), (4).

Утверждение (a) доказано выше. Утверждение (e) следует из (b), (c), утверждение (f) — из леммы 2, так как по определению полином $Q \equiv 0$ не порождает н. д. Остальные утверждения будут доказаны в § 5. Иллюстрация теоремы будет дана в § 4 (пример 5).

Замечание 1. Утверждение (e), вообще говоря, необратимо. Действительно, из равенств $T_j = 0$, $j = \overline{1,k}$, ввиду (a), (b) следует, что обобщенная задача имеет более одного решения, но может оказаться, например, что для всех ее решений один и тот же узел особый, а потому ни одно из решений не будет решением обычной задачи. Так, задача обобщенной интерполяции таблицы примера 1 н. д. порядка не выше 5 имеет бесконечно много решений (см. пример 2; отсюда в силу (a), (b) все T_j равны 0), причем для каждого решения узел $z = 0$ особый.

Замечание 2. Если решение задачи обобщенной интерполяции единственно, то полином Q можно строить следующим образом. Пусть для определенности $T_1 \neq 0$. Тогда $t_j = -t_1 T_j / T_1$, $j = \overline{2,k}$ (см. доказательство утверждения (b)). Фиксируем подходящие значения параметров t_j (не умаляя общности, можно взять $t_1 = -T_1$, $t_2 = T_2, \ldots, t_k = T_k$). Коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ однозначно определяются из подсистемы (10) (см. доказательство леммы 2). После этого из уравнения $Q(z_1) = t_1$ найдем a_0 как $a_0 = t_1 - a_1 z_1 - a_2 z_1^2 - \cdots - a_n z_1^n$. Решение построено.

Замечание 3. Утверждение (f), вообще говоря, грубо оценивает максимально возможное число узлов, особых относительно данного решения задачи обобщенной интерполяции. Например, как подмечено в [2], в полной задаче простой интерполяции это число для каждого решения не превосходит $n/2$, так как особый узел является нулем порядка не ниже 2 полинома Q.

3.2. Заведомо разрешимая задача интерполяции. Мы видели, что полная задача (обычной) интерполяции (3), (4) может не иметь решений. Возникает вопрос: при какой суммарной кратности $S = m_1 + \cdots + m_k$ узлов задача (3) интерполяции наипростейшими дробями порядка $\leq n$ заведомо (т. е. независимо от значений z_j и $b_{j,s+1}$) разрешима? Ответ дает следующая теорема (доказательство см. в § 5).

Теорема 2. *Задача (обычной) интерполяции таблицы (3) с k попарно различными узлами суммарной кратности S наипростейшими дробями порядка $\leq n$ заведомо разрешима, если $n \geq S + k - 1$.*

В частности, задача простой интерполяции заведомо разрешима, если узлов не более M, где $M = m$ при $n = 2m$ и $M = m + 1$ при $n = 2m + 1$ ($m \in \mathbb{N}$). Эта оценка неулучшаема.

Неулучшаемость оценки понимается в том смысле, что для каждого $n \geq 2$ существуют неразрешимые задачи интерполяции по $M + 1$ простым узлам (см. пример 3). Отметим, что в случае $k = 1$, $S = n$ (аппроксимация Паде, см. § 4) заведомо разрешимая задача полна.

Пример 3. Пусть $z_1, z_2, \ldots$ — последовательность попарно различных комплексных чисел, отличных от нуля. Построим последовательность матриц L_2, $L_3, \ldots$:

$$L_{2m} := \begin{pmatrix} z_1^2 & z_1^3 & \ldots & z_1^{2m} \\ 2z_1 & 3z_1^2 & \ldots & 2mz_1^{2m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_m^2 & z_m^3 & \ldots & z_m^{2m} \\ 2z_m & 3z_m^2 & \ldots & 2mz_m^{2m-1} \end{pmatrix},$$

$$L_{2m+1} := \begin{pmatrix} z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{2m+1} \\ 1 & 2z_1 & \dots & (2m+1)z_1^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{m+1} & z_{m+1}^2 & \dots & z_{m+1}^{2m+1} \\ 1 & 2z_{m+1} & \dots & (2m+1)z_{m+1}^{2m} \end{pmatrix},$$

$m = 1, 2, \dots$ (в частности, матрицы с четными и нечетными номерами n имеют размер $n \times (n-1)$ и $(n+1) \times n$ соответственно). Фиксируем n и для каждого $1 \le s \le M$ обозначим через G_s определитель матрицы, получающейся из L_n вычеркиванием строки с номером $2s$, т. е. второй из двух строк, отвечающих узлу z_s. Зададим таблицу с $M+1$ простыми узлами:

$$(0, h_0), \quad \left(z_1, \frac{(G_1)'_{z_1}}{G_1}\right), \ \dots, \ \left(z_M, \frac{(G_M)'_{z_M}}{G_M}\right).$$

Оказывается (см. доказательство теоремы 2), что при нечетном n задача интерполяции этой таблицы наипростейшими дробями порядка $\le n$ не имеет решений независимо от выбора h_0, а при четном $n = 2m$ для неразрешимости достаточно потребовать $h_0 \neq -\sum\limits_{s=1}^{m} (G_s)'_{z_s}/\Delta$, где Δ — определитель матрицы, получаемой из L_{2m} добавлением слева столбца $[z_1, 1, z_2, 1, \dots, z_m, 1]$.

§ 4. Примеры построения интерполяционной наипростейшей дроби

4.1. Аппроксимация Паде. Решение задачи (3), (4) имеет простой вид только в некоторых специальных случаях, один из которых — так называемая *аппроксимация Паде функции* f [1, 3, 6], т. е. когда в единственном узле интерполяции заданы значения функции f и ее производных до порядка $n-1$ включительно:

$$R^{(s)}(a) = f^{(s)}(a) =: b_{s+1}, \quad s = \overline{0, n-1}. \tag{11}$$

Доказано, что н. д. R вида (1), удовлетворяющая таблице (11), существует и единственна; она носит название *наипростейшей дроби Паде функции* f *в точке* a.

Легко построить эту дробь $R = Q'/Q$, перейдя к полиномиальной интерполяции (8). Из существования н. д. Паде следует, что $Q(a) \neq 0$. Поскольку полином Q определяется с точностью до ненулевого множителя, можем считать $Q(a) = 1$. С учетом данных таблицы (11) получаем $n+1$ условий на многочлен Q (степени $\le n$):

$$Q(a) = 1, \quad Q^{(s)}(a) = h_s, \quad s = \overline{1, n},$$

где числа h_s и b_s связаны по формулам (6). Применяя к нахождению Q формулу Тейлора для многочленов, получим искомое решение задачи (11):

$$R = Q'/Q, \quad Q(z) = 1 + \sum_{s=1}^{n} h_s (z-a)^s / s!.$$

Отметим, что для перехода между наборами чисел b_s и h_s можно использовать иной подход, нежели построение формул (6) последовательным дифференцированием, как в лемме 1. Именно, пусть (11) есть задача Паде-аппроксимации в точке a функции f, однозначной и аналитичной в некоторой односвязной окрестности $U(a)$ этой точки. В [6] показано, что н. д. Паде порядка $\le n$

функции f в точке a совпадает с логарифмической производной частной суммы $\sum\limits_{s=0}^{n} c_s(z-a)^s$ ряда Тейлора функции $\exp\left(\int\limits_a^z f(\zeta)\,d\zeta\right)$, где интегрирование ведется по любому спрямляемому пути в $U(a)$. Отсюда следует, что искомые коэффициенты $h_1,\dots,h_n$ находятся из разложения

$$\exp\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{b_s(z-a)^s}{s!}\right)=1+\sum_{s=1}^{n}\frac{h_s(z-a)^s}{s!}+O((z-a)^{n+1}),\quad z\to a.$$

Пример 4. При Паде-аппроксимации линейной функции $f(z)=\alpha+\beta z$ в точке $z=a$ имеем $b_1=\alpha+\beta a$, $b_2=\beta$, $b_s=0$, $s=\overline{3,n}$. Опустив вычисления, предъявим выражения чисел h_s, полученные с помощью разложения экспоненты из предыдущей формулы по степеням $z-a$:

$$h_s=s!\cdot\sum_{p=0}^{s-r}\frac{(\alpha+\beta a)^{s-2p}\beta^p}{(s-2p)!(2p)!!},\quad r:=\max\left\{\frac{s}{2},\left[\frac{s}{2}\right]+1\right\},\quad s=\overline{1,n}.$$

В частности, при Паде-аппроксимации постоянной функции $f(z)=\alpha=\mathrm{const}$, от суммы в формуле для h_s остается только слагаемое, отвечающее $p=0$, так что $h_s=\alpha^s$, $s=\overline{1,n}$. Отметим, что н. д. Паде для констант ранее построена в [3].

4.2. Двухузловая задача. Для иллюстрации утверждений теоремы 1 рассмотрим случай кратной интерполяции по двум узлам ($n\ge 3$).

Пример 5. Решим полную задачу интерполяции (как обычной, так и обобщенной) по узлу $z_1=0$ кратности $n-1$ и простому узлу $z_2=b\ne 0$:

$$R^{(s)}(0)=b_{s+1},\quad s=\overline{0,n-2};\quad R(b)=v;\quad R=Q'/Q,\quad \deg Q\le n,\quad Q\not\equiv 0.$$

Введем параметры $p:=Q(0)$ и $t:=Q(b)$ и перейдем к задаче (8) полиномиальной интерполяции:

$$Q(0)=p,\quad Q^{(s)}(0)=ph_s,\quad s=\overline{1,n-1};\quad Q(b)=t,\quad Q'(b)=tv,$$

где числа h_s и b_s связаны по формулам, указанным в лемме 1. Ввиду условий в узле $z_1=0$ решение полиномиальной задачи необходимо имеет вид

$$Q(z)=pH(z)+hz^n,\quad H(z):=1+\sum_{s=1}^{n-1}\frac{h_s z^s}{s!}.$$

Из условия $Q'(b)=tv$ получим $h=b^{1-n}(tv-pH'(b))/n$; подставив это выражение вместо h в уравнение $Q(b)=t$ и приведя подобные слагаемые, придем к соотношению

$$(n-bv)t=(nH(b)-bH'(b))p$$

между параметрами. Разберем возможные случаи.

В случае $n-bv\ne 0$ имеем $t=p(nH(b)-bH'(b))/(n-bv)$. Подставив это значение в выражение для h, после преобразований и подстановки полученного значения h в формулу для $Q(z)$ придем к полиному, порождающему единственное решение задачи обобщенной интерполяции:

$$Q(z)=p\left[H(z)+z^n b^{1-n}\cdot\frac{vH(b)-H'(b)}{n-bv}\right].$$

Параметр p отличен от нуля (иначе $Q \equiv 0$); можем положить $p = 1$. Очевидно, $Q(0) = p = 1 \neq 0$, следовательно, узел $z_1 = 0$ регулярный. С другой стороны, $Q(b) = (nH(b) - bH'(b))/(n - bv)$, поэтому узел $z_2 = b$ является регулярным при $nH(b) - bH'(b) \neq 0$ и особым при $nH(b) - bH'(b) = 0$. Итак, в случае $n - bv \neq 0$ обычная задача интерполяции имеет единственное решение (если $nH(b) - bH'(b) \neq 0$) либо неразрешима (если $nH(b) - bH'(b) = 0$).

Рассмотрим случай $n - bv = 0$. Если при этом $nH(b) - bH'(b) \neq 0$, то в силу найденного выше соотношения между параметрами $p = 0$, т. е. узел $z_1 = 0$ заведомо особый; обычная интерполяция не имеет решений. По виду $Q(z)$ и h легко найти, что единственным решением задачи обобщенной интерполяции является н. д. $R(z) = n/z$.

Если же $n - bv = nH(b) - bH'(b) = 0$, то при любых значениях p, h полином $Q(z) = pH(z) + hz^n$ является решением задачи обобщенной интерполяции. В самом деле, достаточно проверить, что $Q'(b) = vQ(b)$. Но

$$\begin{aligned} Q'(b) - vQ(b) &= pH'(b) + nhb^{n-1} - vpH(b) - vhb^n \\ &= p(H'(b) - vH(b)) + hb^{n-1}(nb - v) = 0 \end{aligned}$$

в силу определения подслучая. Взяв $p = 0$, снова придем к решению $R(z) = n/z$, а при $p \neq 0$ получим бесконечно много решений $R = Q'/Q$, $Q(z) = H(z) + \tilde{h}z^n$. Обычная задача интерполяции удовлетворяется такими дробями при условии $Q(b) \equiv H(b) + \tilde{h}b^n \neq 0$. Итак, решений задачи интерполяции как обычной, так и обобщенной бесконечно много.

Полученные результаты полностью согласуются с утверждениями теоремы 1, так как для данной задачи (непосредственно проверяется)

$$T_1 = (bv - n) \cdot C, \quad T_2 = (nH(b) - bH'(b)) \cdot C, \quad C := b^{n-1} \cdot 2! \cdot 3! \cdots (n-1)!.$$

Отметим, что в этом примере утверждение (e) теоремы 1 обратимо, так как равенства $T_1 = T_2 = 0$ влекут наличие бесконечного множества решений обычной интерполяции.

Рассмотрим полную двухузловую задачу с произвольным распределением кратностей, а именно: *пусть $z_1 = 0$ — $(n - m)$-кратный, а $z_2 = b \neq 0$ — m-кратный узлы; без нарушения общности, $n - m \geq m$; требуется найти н. д. $R = Q'/Q$ порядка $\leq n$ такую, что*

$$R^{(s)}(0) = b_{1,s+1}, \quad s = \overline{0, n-m-1}; \quad R^{(s)}(b) = b_{2,s+1}, \quad s = \overline{0, m-1}. \qquad (12)$$

Введем обозначения

$$A = 1 + \sum_{s=1}^{m} (-b)^s C_m^s \frac{(n-s)!}{n!} h_{2,s}, \quad B = \sum_{s=0}^{m} (-b)^s C_m^s \frac{(n-s)!}{n!} H^{(s)}(b),$$

$$H(z) = 1 + \sum_{j=1}^{n-m} h_{1,j} \frac{z^j}{j!},$$

где числа $h_{j,s}$ вычисляются через $b_{j,s}$ по формулам (6). Опустив вычисления, сообщим, что величина A (соответственно B) с точностью до ненулевого множителя равна определителю T_1 (соответственно T_2). В частности, *задача обычной интерполяции* (12)*:*

(i) *однозначно разрешима, если и только если $AB \neq 0$;*

(ii) *имеет бесконечно много решений, если и только если* $A = B = 0$; *в остальных случаях задача неразрешима.*

Видим, что утверждение (e) теоремы 1 обратимо для любой двухузловой задачи.

Пример 6. Н. д. R порядка $\le n$ обычной интерполяции функции $f(z) = c = \mathrm{const}$ по узлам $z_1 = 0$ (кратности $n - m > 0$) и $z_2 = b \ne 0$ (кратности $m \ge 0$) порождается полиномом

$$Q(z) = \sum_{s=0}^{m} C_m^s (-cb)^s (n-s)! E_{n-s}(cz), \quad E_p(t) := \sum_{j=0}^{p} \frac{t^j}{j!}.$$

Действительно, с учетом $(E_p)' = E_{p-1}$ и $E_p(t) - E_{p-1}(t) = t^p/p!$ имеем

$$Q'(z) = \sum_{s=0}^{m} C_m^s (-cb)^s (n-s)! c E_{n-s-1}(cz),$$

$$c - R(z) = \frac{cQ(z) - Q'(z)}{Q(z)} = \frac{c}{Q(z)} \sum_{s=0}^{m} C_m^s (-cb)^s (n-s)! \cdot (E_{n-s}(cz) - E_{n-s-1}(cz))$$
$$= \frac{c}{Q(z)} \sum_{s=0}^{m} C_m^s (-cb)^s (cz)^{n-s} = \frac{c^{n+1}}{Q(z)} \sum_{s=0}^{m} C_m^s (-b)^s z^{n-s} = \frac{c^{n+1} z^{n-m} (z-b)^m}{Q(z)},$$

что и требовалось. Сравнивая с выражениями для A и B, видим, что $n!A = Q(0)$, $n!B = Q(b)$ (здесь $h_{j,s} = c^s$, см. пример 4). Единственность решения полной задачи интерполяции констант доказана в [5], и условия разрешимости этой задачи (условия отсутствия особых узлов) следуют из результатов, полученных в диссертации Е. Н. Кондаковой (Владимир, 2012).

§ 5. Доказательства теорем

5.1. Доказательство теоремы 1. (b) Достаточность. Не нарушая общности, считаем $T_1 \ne 0$. Перебросив слагаемые системы (9), отвечающие t_1, в правую часть, получим квадратную систему относительно неизвестных $a_0, a_1, \dots, a_n, t_2, \dots, t_k$ с определителем $T_1 \ne 0$. Она однозначно разрешима, и все неизвестные прямо пропорциональны t_1, в частности, $t_j = -t_1 T_j / T_1$, $j = \overline{2,k}$. Случай $t_1 = 0$ не представляет интереса, так как в этом случае решение тривиально ($Q \equiv 0$). Можем считать $t_1 \ne 0$. Тогда полином $Q \not\equiv 0$ определен однозначно с точностью до умножения на ненулевую константу, а потому решение $R = Q'/Q$ задачи обобщенной интерполяции единственно.

Необходимость. Если решение $R = Q'/Q$ единственно, то полином $Q \not\equiv 0$ определен однозначно с точностью до умножения на число $c \ne 0$. Следовательно, решение $\{a_s, t_j\}$ однородной системы (9) нетривиально (не все a_s нулевые, так как $Q \not\equiv 0$) и определено однозначно с точностью до множителя c. Докажем, что на этом решении не все t_j равны 0. Действительно, если все значения в таблице $\{h_{j,s}\}$ нулевые, то единственным решением задачи интерполяции является н. д. $R \equiv 0$, для которой $Q(z) \equiv a_0 \ne 0$ и, следовательно, $t_j = Q(z_j) = a_0 \ne 0$ $\forall j$. Если среди чисел $\{h_{j,s}\}$ есть ненулевое, то не все $a_1, \dots, a_n$ равны нулю. Но при фиксированных значениях t_j подсистема (10) однозначно разрешима относительно $a_1, \dots, a_n$ (см. доказательство леммы 2), следовательно, она не может быть однородной, а значит, не все t_j равны 0. Итак, для любой таблицы $\{h_{j,s}\}$ хотя бы один из t_j отличен от нуля. Считая для определенности

$t_1 \neq 0$ и перебрасывая слагаемые системы (9), отвечающие t_1, вправо, получим неоднородную квадратную систему с определителем T_1. В силу единственности $T_1 \neq 0$. Утверждение (b) доказано.

Доказательство (d) проводится аналогично с учетом того, что здесь $t_j = -t_1 T_j / T_1 \neq 0$, $j = \overline{2,k}$.

Доказательство (c). Равенство $T_j = 0$ эквивалентно тому, что при $t_j = 0$ система (9) имеет решение, на котором не все a_s равны 0. Это означает, что соответствующая н. д. — решение задачи обобщенной интерполяции, для которого узел z_j особый.

5.2. Доказательство теоремы 2. Достаточно доказать разрешимость задачи интерполяции в случае, когда $S = n - k + 1$. Будем строить решение вида (1), для которого $Q(z_1) = \cdots = Q(z_k) = 1$. Тогда (следствие 1 в § 2) полином Q степени не выше n в силу условий на R должен интерполировать следующую таблицу с $k + \sum m_j = k + S = n + 1$ условиями:

$$Q(z_j) = 1, \quad Q^{(s)}(z_j) = h_{j,s} \quad (j = \overline{1,k},\ s = \overline{1,m_j}).$$

Искомый полином существует (и единствен) [7]. Соответствующая н. д. R является решением задачи (3) ввиду $Q(z_j) \neq 0$. Первая часть утверждения теоремы доказана.

Рассмотрим задачу простой интерполяции и докажем ее разрешимость в случае M узлов. Аналогичным образом получаем таблицу

$$Q(z_j) = 1, \quad Q(z_j) = h_{j,1} \quad (j = \overline{1,M}),$$

суммарная кратность $2M$ узлов которой при $n = 2m$ равна n, а при $n = 2m + 1$ равна $n + 1$. В обоих случаях искомый полином существует, причем в случае нечетного n он определяется поставленными условиями однозначно, а в случае четного n подходящих полиномов бесконечно много. Любое подходящее решение порождает наипростейшую дробь R, являющуюся решением задачи (3) ввиду условий $Q(z_j) = 1$.

Докажем, что если узлов больше, чем M, то задача простой интерполяции может не иметь решений. Сначала возьмем четные n, $n = 2m$, при этом $M = m$.

Выберем $m + 1$ попарно различных узлов $z_0 = 0, z_1, \ldots, z_m$ и определим н. д. R порядка $\leq n$ из условий $R(z_j) = h_j$, $j = \overline{0,m}$, где числа h_j будут определены позднее. Поскольку искомая дробь не должна иметь полюса в узле $z_0 = 0$, будем считать $Q(0) = 1$. Введем m параметров $t_j = Q(z_j)$, $j = \overline{1,m}$, и определим полином $Q(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ как решение задачи интерполяции по m двукратным узлам:

$$Q(z_j) = t_j, \quad Q'(z_j) = t_j h_j \quad (j = \overline{1,m}).$$

Сумма кратностей равна $2m = n$, поэтому такой полином существует и единствен и коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ определяются из системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \ldots & z_1^n \\ 1 & 2z_1 & 3z_1^2 & \ldots & nz_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_m & z_m^2 & z_m^3 & \ldots & z_m^n \\ 1 & 2z_m & 3z_m^2 & \ldots & nz_m^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 - 1 \\ t_1 h_1 \\ \vdots \\ t_m - 1 \\ t_m h_m \end{pmatrix}.$$

Определитель Δ_1, получаемый при замене первого столбца матрицы системы столбцом правых частей, есть линейная функция от величин t_j и $t_j h_j$ (рассматриваемых как независимые). Таким образом, коэффициент a_1 можно представить в виде

$$a_1 = \frac{1}{\Delta}\left(H_0(\xi) + \sum_{j=1}^{m} t_j(H_j(\xi) + h_j G_j(\xi))\right), \quad \xi := \{z_1, \dots, z_m\},$$

где $\Delta = \Delta(\xi) \neq 0$ — определитель матрицы системы (подчеркнем, что величины H_j, G_j не зависят от параметров t_s, h_s).

Явный вид множителей G_j указан в примере 3. Все величины G_j отличны от нуля, так как G_j совпадает с определителем матрицы системы, получаемой при интерполяции многочленом вида $z^2(p_0 + p_1 z + \dots + p_{n-2} z^{n-2})$ таблицы с простым узлом $z_j \neq 0$ и двукратными узлами $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_m \neq 0$, а такой многочлен существует и единствен.

В силу неравенств $G_j \neq 0$ можно определить значения h_j по формулам $h_j = -H_j/G_j$ (отметим, что $H_j = -(G_j)'_{z_j}$, так что $h_j = (G_j)'_{z_j}/G_j$). При этом независимо от выбора значений параметров t_j получается $a_1 = H_0/\Delta$. В частности, значение дроби R в $(m+1)$-м узле $z_0 = 0$ равно

$$R(0) = Q'(0)/Q(0) = a_1/1 = H_0/\Delta.$$

Если задать табличное значение h_0 в этом узле отличным от H_0/Δ, получим неразрешимую задачу интерполяции (отметим, что $H_0 = \sum\limits_{j=1}^{m} H_j$, откуда следует вид ограничения на h_0, данный в примере 3). Доказали неулучшаемость оценки для четных n.

Если $n = 2m+1$, то $M = m+1$. Действуя аналогично предыдущему, выберем $m+2$ попарно различных узлов $z_0 = 0, z_1, \dots, z_{m+1}$ и определим н. д. $R = Q'/Q$ порядка $\leq n$ из условий $R(z_j) = h_j$, $j = \overline{0, m+1}$, где числа h_j подлежат определению. При любых значениях параметров $t_1, \dots, t_{m+1}$ полином $Q(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ однозначно определяется как решение задачи интерполяции по $m+1$ двукратным узлам:

$$Q(z_j) = t_j, \quad Q'(z_j) = t_j h_j \quad (j = \overline{1, m+1}).$$

Его $n+1$ коэффициентов являются решениями системы

$$\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \dots & z_1^n \\ 0 & 1 & 2z_1 & 3z_1^2 & \dots & nz_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_{m+1} & z_{m+1}^2 & z_{m+1}^3 & \dots & z_{m+1}^n \\ 0 & 1 & 2z_{m+1} & 3z_{m+1}^2 & \dots & nz_{m+1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 h_1 \\ \vdots \\ t_{m+1} \\ t_{m+1} h_{m+1} \end{pmatrix}.$$

В частности, коэффициент a_0 есть однородная линейная функция от величин t_j и $t_j h_j$:

$$a_0 = \frac{1}{\Delta}\left(\sum_{j=1}^{m+1} t_j(H_j(\xi) + h_j G_j(\xi))\right), \quad \xi := \{z_1, \dots, z_{m+1}\},$$

где Δ — определитель матрицы системы. Доказывая по аналогии с предыдущим неравенства $G_j \neq 0$ и полагая $h_j = -H_j/G_j$, мы (независимо от значений параметров t_j) приходим к равенству $a_0 = 0$, означающему, что узел $z_0 = 0$ заведомо является полюсом дроби. Значение h_0 вообще не играет роли. Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Данченко В. И., Данченко Д. Я.* О приближении наипростейшими дробями // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 4. С. 553–559.

2. *Данченко В. И., Кондакова Е. Н.* Критерий возникновения особых узлов при интерполяции наипростейшими дробями // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2012. Т. 278. С. 49–58.

3. *Данченко В. И., Чунаев П. В.* Об аппроксимации наипростейшими дробями и их обобщениями // Пробл. мат. анализа. 2011. № 58. С. 121–134.

4. *Комаров М. А.* Интерполяция рациональных функций наипростейшими дробями // Пробл. мат. анализа. 2012. № 63. С. 55–66.

5. *Кондакова Е. Н.* Интерполяция наипростейшими дробями // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, № 2. С. 30–37.

6. *Косухин О. Н.* О некоторых нетрадиционных методах приближения, связанных с комплексными полиномами: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2005.

7. *Бахвалов Н. С.* Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). М.: Наука, 1973.

8. *Данченко В. И., Кондакова Е. Н.* Чебышевский альтернанс при аппроксимации констант наипростейшими дробями // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2010. Т. 270. С. 86–96.

9. *Комаров М. А.* О неединственности наипростейшей дроби наилучшего равномерного приближения // Изв. вузов. Математика. 2013. № 9. С. 28–37.

Статья поступила 17 июня 2013 г.

Комаров Михаил Анатольевич
Владимирский гос. университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых,
кафедра функционального анализа и его приложений,
ул. Горького, 87, Владимир 600000
`kami9@yandex.ru`