Сибирский математический журнал
Июль—август, 2014. Том 55, № 4

УДК 517.98

О КОММУТИРУЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ РАНГА ДВА

В. Н. Давлетшина, Э. И. Шамаев

Аннотация. Изучаются примеры формально самосопряженных коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов порядков 4 и $4g+2$ с аналитическими в $\mathbb{C}$ коэффициентами. Доказано, что эти операторы не коммутируют с операторами нечетного порядка. Тем самым дано строгое обоснование того, что рассматриваемые операторы являются операторами ранга два.

Ключевые слова: коммутирующий дифференциальный оператор ранга два.

Недавно появилась серия примеров [1–3] коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов порядков 4 и $4g+2$, отвечающих гиперэллиптическим спектральным кривым рода g, причем коэффициенты этих операторов являются аналитическими функциями на $\mathbb{C}$. В данной работе доказано, что эти операторы не коммутируют с операторами нечетного порядка, тем самым дано доказательство того, что операторы из [1–3] являются операторами ранга два.

Пусть L_n и L_m — дифференциальные операторы порядков n, $m \geqslant 2$,

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} v_i(x)\partial_x^i, \quad L_m = \sum_{j=0}^{m} u_j(x)\partial_x^j.$$

Будем считать, что $v_n = u_m = 1$, $v_{n-1} = 0$. Этого можно добиться заменой координат и сопряжением. Если $L_nL_m = L_mL_n$, то по лемме Бурхналла — Чаунди [4] существует ненулевой полином $Q(\lambda,\mu)$ такой, что $Q(L_n, L_m) = 0$. *Спектральная кривая* $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$ пары L_n, L_m определяется уравнением $Q = 0$. Если ψ является совместной собственной функцией:

$$L_n\psi = \lambda\psi, \quad L_m\psi = \mu\psi,$$

то $(\lambda,\mu) \in \Gamma$. Размерность пространства совместных собственных функций

$$l = \dim\{\psi : L_n\psi = \lambda\psi,\ L_m\psi = \mu\psi\}$$

является общим делителем n и m. *Рангом* называется наибольший общий делитель всех порядков операторов из максимального коммутативного кольца, содержащего L_n и L_m. Все коммутативное кольцо изоморфно кольцу мероморфных функций на компактной неприводимой алгебраической кривой $\widehat{\Gamma}$ с единственным полюсом, при этом имеется естественный морфизм $\widehat{\Gamma} \to \Gamma$. Отметим, что возможна ситуация, когда Γ — гладкая, а $\widehat{\Gamma}$ — сингулярная кривые.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029).

В случае операторов ранга 1 и гладкой спектральной кривой совместная собственная функция ψ (функция Бейкера — Ахиезера) выражается через тэта-функцию многообразия Якоби спектральной кривой по формуле Кричевера [5]. Отметим, что коэффициенты таких операторов являются мероморфными функциями. Первые результаты об операторах ранга $l>1$ получены в [6, 7]. Кричевером решена задача классификации коммутирующих операторов ранга l [5, 8]. В случае спектральной кривой рода $g=1$ и $l=2$ операторы найдены Кричевером и Новиковым [9]. Операторы Кричевера — Новикова изучались в [10–14]. При $g=1$, $l=3$ операторы найдены Моховым [15]. В [16–19] найдены некоторые примеры операторов ранга два и три при $g=2,3,4$. В [1] получены уравнения, которые в случае гиперэллиптической спектральной кривой эквивалентны уравнениям Кричевера — Новикова на параметры Тюрина [9]. С помощью этих уравнений получены следующие примеры коммутирующих формально самосопряженных операторов порядков 4 и $4g+2$, отвечающих гиперэллиптическим кривым рода g.

Теорема 1 [1]. *Оператор*

$$L_4^\sharp=\left(\partial_x^2+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0\right)^2+\alpha_3g(g+1)x,\quad \alpha_3\neq 0,$$

коммутирует с оператором $L_{4g+2}^\sharp$ *порядка* $4g+2$.

При $g=\alpha_3=1$, $\alpha_2=\alpha_1=0$ операторы $L_4^\sharp$, $L_6^\sharp$ совпадают с операторами Диксмье [7].

Теорема 2 [2]. *Оператор*

$$L_4^\flat=\left(\partial_x^2+\alpha_1\operatorname{ch}(x)+\alpha_0\right)^2+\alpha_1g(g+1)\operatorname{ch}(x),\quad \alpha_1\neq 0,$$

коммутирует с оператором $L_{4g+2}^\flat$ *порядка* $4g+2$.

В [20] с помощью замены координат и автоморфизмов первой алгебры Вейля из операторов $L_4^\flat$, $L_{4g+2}^\flat$ получены операторы ранга l.

Теорема 3 [3]. *Оператор*

$$L_4^\natural=\left(\partial_x^2+\alpha_1e^x+\alpha_0\right)^2+\alpha_1g(g+1)e^x,\quad \alpha_1\neq 0,$$

коммутирует с оператором $L_{4g+2}^\natural$ *порядка* $4g+2$.

В этой работе дано доказательство того, что пары операторов $L_4^\sharp$, $L_{4g+2}^\sharp$; $L_4^\flat$, $L_{4g+2}^\flat$ и $L_4^\natural$, $L_{4g+2}^\natural$ имеют ранг 2. Это вытекает из следующих теорем.

Теорема 4. *Оператор* $L_4^\sharp$ *не коммутирует с оператором нечетного порядка.*

Теорема 5. *Оператор* $L_4^\flat$ *не коммутирует с оператором нечетного порядка.*

Теорема 6. *Оператор* $L_4^\natural$ *не коммутирует с оператором нечетного порядка.*

Доказательство теоремы 4. Прямой проверкой можно убедиться в том, что верна

Лемма 1. *Пусть даны операторы*

$$L_4=\left(\partial_x^2+V(x)\right)^2+W(x),$$

$$L_n=a_n\partial_x^n+a_{n-1}\partial_x^{n-1}+\dots+a_1\partial_x+a_0,\quad a_i=a_i(x).$$

Их коммутатором является оператор

$$[L_n, L_4] = b_{n+3}\partial_x^{n+3} + b_{n+2}\partial_x^{n+2} + \dots + b_1\partial_x + b_0, \quad b_i = b_i(x),$$

порядка $n+3$, коэффициенты которого заданы формулами

$$\begin{aligned} b_{m+3} = {} & -4a'_m - 6a''_{m+1} - 4a'''_{m+2} - a''''_{m+3} \\ & - 2Va_{m+1} - 4Va'_{m+2} - 2Va''_{m+3} + 2\sum_{s=m+1}^{n} C_s^{m+1} a_s \partial_x^{s-m-1} V \\ & - 2V'a_{m+2} - 2V'a'_{m+3} + 2\sum_{s=m+2}^{n} C_s^{m+2} a_s \partial_x^{s-m-1} V \\ & - (V^2 + W + V'')a_{m+3} + \sum_{s=m+3}^{n} C_s^{m+3} a_s \partial_x^{s-m-3}(V^2 + W + V''), \end{aligned} \tag{1}$$

где $-3 \leqslant m \leqslant n$. Считаем, что $a_s = 0$ при $s < 0$ и $a_s = 0$ при $s > n$, $C_q^p = \frac{q!}{(q-p)!p!}$ при $p \geqslant 0$ и $C_q^p = 0$ при $p < 0$.

Если $[L_n, L_4] = 0$, то из (1) следует, что a_n, a_{n-1} — константы. В дальнейшем будем считать, что $a_n = 1$, a_{n-1} обозначим через γ.

Допустим, что существует дифференциальный оператор нечетного порядка

$$L_{2k+1} = \partial_x^{2k+1} + \gamma\partial_x^{2k} + a_{2k-1}\partial_x^{2k-1} + \dots + a_1\partial_x + a_0,$$

коммутирующий с $L_4^\sharp$. Тогда формула (1) при $m = 0, \dots, 2k-1$ дает

$$\begin{aligned} 4a'_m = {} & -6a''_{m+1} - 4a'''_{m+2} - a''''_{m+3} \\ & + (\alpha_3x^3 + \alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0)(-2a_{m+1} - 4a'_{m+2} - 2a''_{m+3}) \\ & + 2\sum_{s=m+1}^{m+4} C_s^{m+1} a_s \partial_x^{s-m-1}(\alpha_3x^3 + \alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0) \\ & + 2(3\alpha_3x^2 + 2\alpha_2x + \alpha_1)(-a_{m+2} - a'_{m+3}) \\ & + 2\sum_{s=m+2}^{m+4} C_s^{m+2} a_s \partial_x^{s-m-1}(\alpha_3x^3 + \alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0) \\ & + \sum_{s=m+4}^{m+9} C_s^{m+3} a_s \partial_x^{s-m-3}(\alpha_3(g(g+1)+6)x + (\alpha_3x^3 + \alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0)^2). \end{aligned} \tag{2}$$

Из (2) следует, что коэффициенты a_s — полиномы по x. С помощью индукции из формулы (2) получаем, что коэффициенты $a_{2k+1-2s}$ и a_{2k-2s} при $s = 1, \dots, k$ являются полиномами степени $3s$, более того,

$$a_{2k+1-2s} = \frac{\alpha_3^s}{2^s s!}\left(\prod_{i=0}^{s-1}(2k+1-2i)\right)x^{3s} + \dots, \quad s = 1, \dots, k, \tag{3}$$

$$a_{2k-2s} = \gamma\alpha_3^s C_k^s x^{3s} + \dots, \quad s = 1, \dots, k. \tag{4}$$

При $m = -3$ формула (1) дает

$$\begin{aligned} b_0 = {} & -a''''_0 - 2(\alpha_3x^3 + \alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0)a''_0 - 2(3\alpha_3x^2 + 2\alpha_2x + \alpha_1)a'_0 \\ & + \sum_{s=1}^{6} a_s \partial_x^s((\alpha_3 g(g+1) + 6\alpha_3)x + (\alpha_3x^3 + \alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0)^2). \end{aligned}$$

Из (3) и (4) следует, что b_0 является полиномом степени $3k+5$, точнее

$$b_0 = 6\frac{\alpha_3^{k+2}}{2^k k!}\left(\prod_{i=0}^{k-1}(2k+1-2i)\right)x^{3k+5} + \dots .$$

Таким образом, $b_0 \neq 0$, а значит, L_{2k+1} и $L_4^\sharp$ не коммутируют. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Предположим, что существует дифференциальный оператор нечетного порядка $L_{2k+1} = \partial_x^{2k+1} + \gamma\partial_x^{2k} + a_{2k-1}\partial_x^{2k-1} + \dots + a_1\partial_x + a_0$, коммутирующий с $L_4^\flat$. Из (1) при $m = 0, \dots, 2k-1$ следует, что

$$\begin{aligned} 4a'_m &= -6a''_{m+1} - 4a'''_{m+2} - a''''_{m+3} \\ &\quad + (\alpha_1 \operatorname{ch} x + \alpha_0)(-4a'_{m+2} - 2a''_{m+3}) + 2\alpha_1 \sum_{s=m+2}^{2k+1} C_s^{m+1} a_s \partial_x^{s-m-1} \operatorname{ch} x \\ &\quad + 2\alpha_1 \operatorname{sh} x(-a_{m+2} - a'_{m+3}) + 2\alpha_1 \sum_{s=m+2}^{2k+1} C_s^{m+2} a_s \partial_x^{s-m-1} \operatorname{ch} x \\ &\quad + \alpha_1 \sum_{s=m+4}^{2k+1} C_s^{m+3} a_s \partial_x^{s-m-3}(\alpha_1 \operatorname{ch}^2 x + (2\alpha_0 + g(g+1) + 1)\operatorname{ch} x). \end{aligned} \tag{5}$$

Из (5) вытекает, что a_s — полином по e^x и e^{-x} и $a_{2k+1-2s}$ и a_{2k-2s} при $s = 1, \dots, k$ являются полиномами по e^x степени s, более того,

$$a_{2k+1-2s} = \frac{\alpha_1^s}{4^s s!}\left(\prod_{i=0}^{s-1}(2k+1-2i)\right)e^{sx} + \dots, \quad s = 1, \dots, k, \tag{6}$$

$$a_{2k-2s} = \frac{\alpha_1^s}{2\cdot 4^s s!}\left(s\prod_{i=0}^{s}(2k+1-2i) + 2\gamma\prod_{i=1}^{s}(2k+2-2i)\right)e^{sx} + \dots, \quad s = 1, \dots, k. \tag{7}$$

При $m = -3$ формула (1) примет вид

$$\begin{aligned} b_0 &= -a''''_0 - (\alpha_1(e^x + e^{-x}) + 2\alpha_0)a''_0 - \alpha_1(e^x - e^{-x})a'_0 \\ &+ \alpha_1 \sum_{s=1}^{2k+1}\left(2^{s-2}\alpha_1(e^{2x} + (-1)^s e^{-2x}) + \frac{1}{2}(2\alpha_0 + g(g+1) + 1)(e^x + (-1)^s e^{-x})\right)a_s. \end{aligned}$$

Из (6) и (7) следует, что b_0 является полиномом по e^x степени $k+2$, точнее

$$b_0 = \frac{\alpha_1^{k+2}}{2\cdot 4^k \cdot k!}\left(\prod_{i=0}^{k-1}(2k+1-2i)\right)e^{(k+2)x} + \dots .$$

Таким образом, $b_0 \neq 0$, следовательно, L_{2k+1} и $L_4^\flat$ не коммутируют. Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Предположим, что существует оператор

$$L_{2k+1} = \partial_x^{2k+1} + \gamma\partial_x^{2k} + a_{2k-1}\partial_x^{2k-1} + \dots + a_1\partial_x + a_0,$$

коммутирующий с $L_4^\natural = \left(\partial_x^2 + \alpha_1 e^x + \alpha_0\right)^2 + \alpha_1 g(g+1)e^x$. В этом случае формула (1) при $m = 0, \dots, 2k-1$ дает

$$\begin{aligned} 4a'_m = -6a''_{m+1} - 4a'''_{m+2} - a''''_{m+3} \\ + (\alpha_1 e^x + \alpha_0)(-4a'_{m+2} - 2a''_{m+3}) + 2\alpha_1 \sum_{s=m+2}^{2k+1} C_s^{m+1} e^x a_s \\ + \alpha_1 e^x(-2a_{m+2} - 2a'_{m+3}) + 2\alpha_1 \sum_{s=m+2}^{2k+1} C_s^{m+2} e^x a_s \\ + \alpha_1 \sum_{s=m+4}^{2k+1} C_s^{m+3} a_s \partial_x^{s-m-3}(\alpha_1 e^{2x} + (2\alpha_0 + g(g+1)+1)e^x). \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) следует, что коэффициенты a_s — многочлены по e^x, а $a_{2k+1-2s}$ и a_{2k-2s} при $s = 1, \dots, k$ являются полиномами по e^x степени s, более того,

$$a_{2k+1-2s} = \frac{\alpha_1^s}{2^s s!}\left(\prod_{i=0}^{s-1}(2k+1-2i)\right)e^{sx} + \dots, \quad s = 1, \dots, k, \quad (9)$$

$$a_{2k-2s} = \frac{\alpha_1^s}{2 \cdot 2^s s!}\left(s\prod_{i=0}^{s}(2k+1-2i) + 2\gamma\prod_{i=1}^{s}(2k+2-2i)\right)e^{sx} + \dots, \quad s = 1, \dots, k. \quad (10)$$

При $m = -3$ формула (1) дает

$$\begin{aligned} b_0 = -a''''_0 - 2(\alpha_1 e^x + \alpha_0)a''_0 - 2\alpha_1 e^x a'_0 \\ + \alpha_1 \sum_{s=1}^{2k+1} (2^s \alpha_1 e^{2x} + (2\alpha_0 + g(g+1)+1)e^x)a_s. \end{aligned}$$

Из (9) и (10) следует, что b_0 является полиномом по e^x степени $k+2$, точнее

$$b_0 = \frac{\alpha_1^{k+2}}{2^{k-1}k!}\left(\prod_{i=0}^{k-1}(2k+1-2i)\right)e^{(k+2)x} + \dots.$$

Таким образом, $b_0 \neq 0$. Поэтому $L_4^\natural$ и L_{2k+1} не коммутируют. Теорема 6 доказана.

Авторы благодарны профессору Т. Шиоте и профессору А. Б. Жеглову, которые обратили наше внимание на необходимость обоснования того, что рассматриваемые в этой работе операторы имеют ранг два. Авторы также благодарны А. Е. Миронову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mironov A. E.* Self-adjoint commuting ordinary differential operators // Invent. Math. (published on-line) DOI 10.1007/s00222–013–0486–8.
2. *Mironov A. E.* Periodic and rapid decay rank two self-adjoint commuting differential operators // arXiv: 1302.5735.
3. *Давлетшина В. Н.* О самосопряженных коммутирующих дифференциальных операторах ранга два // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 109–112.
4. *Burchnall J. L., Chaundy I. W.* Commutative ordinary differential operators // Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 1923. V. 2, N 21. P. 420–440.

5. *Кричевер И. М.* Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии // Функцион. анализ и его прил. 1977. Т. 11, № 1. С. 15–31.
6. *Дринфельд В. Г.* О коммутативных подкольцах некоторых некоммутативных колец // Функцион. анализ и его прил. 1977. Т. 11, № 1. С. 11–14.
7. *Dixmier J.* Sur les algebres de Weyl // Bull. Soc. Math. France. 1968. V. 96. P. 209–242.
8. *Кричевер И. М.* Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов // Функцион. анализ и его прил. 1978. Т. 12, № 3. С. 20–31.
9. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35, № 6. С. 47–68.
10. *Новиков С. П., Гриневич П. Г.* О спектральной теории коммутирующих операторов ранга 2 с периодическими коэффициентами // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16, № 1. С. 19–20.
11. *Grünbaum F.* Commuting pairs of linear ordinary differential operators of orders four and six // Physica D. 1988. V. 31, N 3. P. 424–433.
12. *Latham G.* Rank 2 commuting ordinary differential operators and Darboux conjugates of KdV // Appl. Math. Lett. 1995. V. 8, N 6. P. 73–78.
13. *Latham G., Previato E.* Darboux transformations for higher-rank Kadomtsev–Petviashvili and Krichever–Novikov equations // Acta Appl. Math. 1995. V. 39. P. 405–433.
14. *Previato E., Wilson G.* Differential operators and rank 2 bundles over elliptic curves // Compositio Math. 1992. V. 81, N 1. P. 107–119.
15. *Мохов О. И.* Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные дифференциальные уравнения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1989. Т. 53, № 6. С. 1291–1315.
16. *Миронов А. Е.* Об одном кольце коммутирующих дифференциальных операторов ранга два, отвечающем кривой рода два // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 5. С. 103–114.
17. *Миронов А. Е.* О коммутирующих дифференциальных операторах ранга 2 // Сиб. электрон. мат. изв. 2009. Т. 6. С. 533–536.
18. *Миронов А. Е.* Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 2 // Функцион. анализ и его прил. 2005. Т. 39, № 3. С. 91–94.
19. *Zuo D.* Commuting differential operators of rank 3 associated to a curve of genus 2 // SIGMA. 2012. V. 8, N 044. P. 1–11.
20. *Mokhov O. I.* Commuting ordinary differential operators of arbitrary genus and arbitrary rank with polynomial coefficients // arXiv: 1201.5979.

Статья поступила 20 мая 2014 г.

Давлетшина Валентина Николаевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
v.davletshina@gmail.com

Шамаев Эллэй Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Белинского, 58, Якутск 677000
eshamaev@mail.ru