Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2014. Том 55, № 3

УДК 512.541

ОБ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ С ИНВАРИАНТНЫМИ СПРАВА ИЗОМЕТРИЯМИ

А. Р. Чехлов

Аннотация. Описаны редуцированные периодически полные p-группы, алгебраически компактные группы и вполне разложимые группы без кручения с инвариантными справа мономорфизмами, сохраняющими p-высоты элементов группы.

Ключевые слова: автоморфизм, чистая подгруппа, p-высота, правая инвариантность изометрий, инварианты Ульма — Капланского.

Все группы в статье предполагаются абелевыми. Следуя [1], мономорфизмы группы, сохраняющие p-высоты ее элементов, будем называть *изометриями*; изометрии группы сохраняют чистоту ее подгрупп. Будем говорить, что изометрии группы *инвариантны справа*, если для любых ее изометрий α, β найдется такая изометрия γ, что $\alpha\beta = \beta\gamma$ (в частности, образы изометрий таких групп инвариантны относительно изометрий). Автоморфизмы любой группы инвариантны справа; следовательно, к рассматриваемому классу групп относятся группы, изометрии которых являются автоморфизмами (это равносильно тому, что эти группы не имеют собственных чистых подгрупп, изоморфных самой группе).

Группы, изоморфные или не изоморфные тем или иным своим подгруппам, изучались, например, в [1–5]. В частности, в [1] исследовались p-группы без собственных, изоморфных самой группе плотных чистых подгрупп; а в [2] в числе прочих изучались группы, изоморфные собственной чистой подгруппе. Группы с инвариантными эндоморфизмами, а также близкие классы групп исследовались в [6–12]; вопросы продолжения частичных эндоморфизмов рассматривались в [13–18] и др.

Через $E(A)$ обозначается кольцо эндоморфизмов группы A, через 1_A — ее тождественный автоморфизм, $h_p(a)$ — p-высота элемента $a \in A$. Если A — группа без кручения, то $t(a)$ — тип, а $\chi(a)$ — характеристика ее элемента a. Если A — однородная группа без кручения, то через $t(A)$ обозначается ее тип. Если A — p-группа, то через $f(n)$ обозначается ее *n-й инвариант Ульма — Капланского*, т. е. ранг фактор-группы $p^nA[p]/p^{n+1}A[p]$. Если $f : A \to B$ — гомоморфизм, то $f \mid G$ — ограничение f на подмножестве $G \subseteq A$. Подгруппу H группы A будем называть *вполне инвариантной*, если $fH \subseteq H$ для каждого $f \in E(A)$; *чистой*, если $nH = H \cap nA$ для каждого натурального n. Под *p-рангом* группы A понимается ранг ее фактор-группы A/pA. Оставшиеся неопределенными терминология и обозначения соответствуют [19].

Отметим следующие свойства.

1. Если A — группа с инвариантными справа изометриями, то каждое ее прямое слагаемое B также обладает таким свойством.

Действительно, пусть $A = B \oplus C$ и α, β — изометрии группы B. Продолжим их до изометрий $\bar\alpha, \bar\beta$ группы A, полагая $\bar\alpha \mid C = 1_C$, $\bar\beta \mid C = 1_C$. Тогда если $\bar\alpha\bar\beta = \bar\beta\gamma$, где γ — изометрия группы A, то из задания $\bar\alpha, \bar\beta$ следует, что $\gamma \mid B$ — изометрия группы B и $\alpha\beta = \beta(\gamma \mid B)$.

2. Если A — редуцированная группа с ненулевой периодической частью и с инвариантными справа изометриями, то все инварианты Ульма — Капланского ее периодической части конечны.

Если некоторый вышеназванный инвариант $f(n)$ бесконечен, то $A = B \oplus C$, где группа B изоморфна прямой сумме $f(n)$ копий циклической группы порядка p^{n+1}. Ввиду свойства 1 можно считать, что $A = B$. Тогда $A = A_1 \oplus A_2$, где $A_1 \cong A_2 \cong A$, что невозможно.

3. Если B — подгруппа группы A такая, что $\alpha B = B$ для изометрии $\alpha \in E(A)$, то α индуцирует изометрию на A/B.

Изометрия α индуцирует мономорфизм на A/B. Допустим, что $p^n x = \alpha a + b$ для $a, x \in A$ и $b \in B$. Если $b = \alpha y$ для $y \in B$, то $p^n x = \alpha(a + y)$. Отсюда $h_p(a + y) \geqslant n$. Следовательно, $h_p(a + y) = h_p(\alpha a + B)$ для каждого простого p.

У делимой группы каждый мономорфизм является изометрией, поэтому согласно теореме 2 из [12] справедлива

Теорема 1. *Для делимой группы D эквивалентны следующие условия:*

(а) *ее изометрии инвариантны справа;*

(б) *любая ее изометрия является автоморфизмом;*

(в) *часть без кручения группы D, а также каждая ее p-компонента имеют конечный ранг.*

Теорема 2. *У нередуцированной группы $A = D \oplus G$, где D — делимая часть группы A, изометрии инвариантны справа тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладают группы D и G.*

Доказательство. Ввиду свойства 1 перейдем к доказательству достаточности. Пусть $\pi : A \to D$, $\theta : A \to G$ — проекции, а α, β — изометрии группы A. Имеем $(\alpha\beta)D = (\pi\alpha\pi\beta)D = \delta(\pi\alpha)D$ для некоторой изометрии $\delta \in E(D)$. Заметим, что $(\theta\alpha) \mid G$ — изометрия группы G. Действительно, если $(\theta\alpha)g = 0$ для $g \in G$, то $\alpha g \in D$, поэтому по теореме 1 $\alpha y = \alpha g$ для некоторого $y \in D$ и, значит, $y - g \in \ker\alpha = 0$, откуда $y = g = 0$. Далее $\alpha g = u + v$, где $u \in D$, $v \in G$. Отсюда $h_p(g) = h_p(\alpha g) = \min\{h_p(u), h_p(v)\} = h_p(v) = h_p((\theta\alpha)g)$ для каждого простого p. Аналогично $(\theta\beta) \mid G$ — изометрия группы G. Поэтому $(\theta\alpha\theta\beta) \mid G = \gamma((\theta\alpha) \mid G)$ для некоторой изометрии $\gamma \in E(G)$. Имеем $\alpha\beta = (\pi\alpha + \theta\alpha)(\pi\beta + \theta\beta) = \pi\alpha\pi\beta + \pi\alpha\theta\beta + \theta\alpha\theta\beta$ (здесь учтено, что $\theta\alpha\pi\beta = 0$). В силу инъективности группы D отображение $(\theta\alpha)g \mapsto (\pi\alpha\pi\beta + \pi\alpha\theta\beta - \delta\pi\alpha)g$, где $g \in G$, продолжается до некоторого гомоморфизма $\xi : G \to D$. Положим $\delta \mid G = 0$, $\xi \mid D = 0$, $\gamma \mid D = 0$, и пусть $\psi = \delta + \xi + \gamma$. Покажем, что $\psi\alpha = \alpha\beta$. Действительно, если $x \in D$, то $\psi\alpha x = \delta\alpha x = \delta(\pi\alpha)x = (\alpha\beta)x$. Пусть $g \in G$. Имеем $(\psi\alpha)g = \psi(\pi\alpha g + \theta\alpha g) = \delta\pi\alpha g + (\pi\alpha\pi\beta + \pi\alpha\theta\beta - \delta\pi\alpha)g + \gamma\theta\alpha g = (\pi\alpha\pi\beta + \pi\alpha\theta\beta)g + (\theta\alpha\theta\beta)g = (\alpha\beta)g$. Далее, если $0 \neq x \in D$, то $\psi x = \delta x \neq 0$. Если $0 \neq g \in G$, то $\psi g = \xi g + \gamma g$; здесь $\xi g \in D$ и $0 \neq \gamma g \in G$, поэтому $\psi g \neq 0$. Наконец, $\psi(x + g) = (\delta x + \xi g) + \gamma g \neq 0$, т. е. ψ — мономорфизм группы A. Кроме того, $h_p(\psi g) = \min\{h_p(\xi g), h_p(\gamma g)\} = h_p(\gamma g) = h_p(g)$ для каждого $g \in G$. Значит, ψ — изометрия.

В теоремах 3, 4 опускаем доказательство очевидных импликаций.

Теорема 3. *Для редуцированной p-группы A следующие условия эквивалентны:*

(а) *изометрии группы A являются ее автоморфизмами;*

(б) *изометрии группы A инвариантны справа;*

(в) *A не имеет собственных чистых подгрупп, изоморфных самой группе A.*

Если к тому же группа A периодически полна, то каждое из условий (а)–(в) *равносильно тому, что все инварианты Ульма — Капланского группы A конечны.*

Доказательство. (б) $\Rightarrow$ (в). Допустим, что G — собственная чистая подгруппа и $\alpha : A \to G$ — изоморфизм. Пусть $b \in A[p] \setminus G$, причем $h_p(b) < \infty$. Тогда в A найдется циклическое прямое слагаемое A_1, содержащее b [19, следствие 27.2], $A = A_1 \oplus A_2$. Так как $G \cong A$, то $G = G_1 \oplus G_2$, где $G_1 \cong A_1$; G_1 также является прямым слагаемым в A, $A = G_1 \oplus C$. Имеем $G_1 \cong A_1$ и $C \cong A_2$. Эти изоморфизмы продолжаются до автоморфизма β группы A, для которого имеем $(\beta\alpha)A \nsubseteq \alpha A$, т. е. изометрия α не инвариантна справа. Наконец, если B — базисная подгруппа периодически полной p-группы A с конечными инвариантами Ульма — Капланского, а α — изометрия группы A, то из теоремы 33.1 в [19] следует, что αB также является базисной подгруппой группы A. Отсюда в силу полноты $\alpha A = A$, т. е. выполнено условие (а). Ссылка на свойство 2 заканчивает доказательство.

Для вполне разложимой группы без кручения A обозначим через $T(A)$ множество типов всех ее прямых слагаемых ранга 1.

Теорема 4. *Для редуцированной вполне разложимой группы без кручения A следующие условия эквивалентны:*

(а) *изометрии группы A являются ее автоморфизмами;*

(б) *изометрии группы A инвариантны справа;*

(в) *множество $T(A)$ удовлетворяет условию максимальности и каждая однородная компонента группы A имеет конечный ранг.*

Доказательство. (б) $\Rightarrow$ (в). Допустим, что A имеет такое прямое слагаемое $B = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, что B_n — группы ранга 1 и каждая B_n содержит элемент $b_n \neq 0$ со свойством $\chi(b_n) \leqslant \chi(b_{n+1})$. Отображения $\alpha : b_n \mapsto b_n + b_{n+1}$ и $\beta : b_{2n} \mapsto b_{2n}$, $\beta : b_{2n+1} \mapsto b_{2n+1} + b_{2n+3}$ продолжаются до изометрий α, β группы B, для которых $(\beta\alpha)b_1 = b_1 + b_2 + b_3 \notin \alpha B$, что невозможно.

(в) $\Rightarrow$ (а). Для всякой изометрии α группы A достаточно показать, что $B \subseteq \alpha A$ для каждой однородной компоненты B группы A. Если тип $t(B)$ максимальный, то $\alpha B \subseteq B$ и в силу конечности ранга $\alpha B = B$. Допустим, что тип $t(B)$ не максимален. Тогда если t' — максимальный элемент в $T(A)$ и $t' > t(B)$, то для соответствующей однородной компоненты G группы A имеем $\alpha G = G$. Фактор-группа A/G изоморфна прямому слагаемому группы A, поэтому является вполне разложимой группой [19, теорема 86.7]; значит, множество $T(A/G)$ также удовлетворяет условию максимальности. Следовательно, A/G содержит однородное прямое слагаемое C/G конечного ранга, максимального в $T(A/G)$ типа и $t(C/G) \geqslant t(B)$. По свойству 3 $\alpha(C/G) = C/G$, откуда $\alpha C = C$. Ввиду условия максимальности в $T(A)$ через конечное число шагов получим, что B содержится в некой вполне инвариантной подгруппе F со свойством $\alpha F = F$; в частности, $B \subseteq \alpha A$.

Теорема 5. *У редуцированной алгебраически компактной группы A изометрии инвариантны справа тогда и только тогда, когда A имеет строение $A = B \oplus G$, где B — алгебраически компактная группа, служащая алгебраически компактным замыканием периодической группы, каждая примарная компонента которой является периодически полной группой с конечными инвариантами Ульма — Капланского, а G — алгебраически компактная группа без кручения, каждая p-адическая компонента которой имеет конечный p-ранг.*

Доказательство. Необходимость. Пусть T — периодическая часть группы A и B — замыкание в Z-адической топологии группы A подгруппы T, B совпадает с пополнением в Z-адической топологии (алгебраически компактным замыканием) группы T [19, § 39]; T является периодически полной группой [19, теорема 68.4] с конечными инвариантами Ульма — Капланского по свойству 2. Имеем $A = B \oplus G$. Группа G как алгебраически компактная группа без кручения представима в виде прямого произведения своих p-адических компонент G_p [19, § 40]. Каждая G_p изоморфна пополнению в p-адической топологии группы $\bigoplus\limits_{m_p} \widehat{\mathbb{Z}}_p$, где $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — группа целых p-адических чисел, а кардинальное число m_p совпадает с p-рангом группы G. Если хотя бы один p-ранг группы G бесконечен, то соответствующую p-адическую компоненту G_p группы G можно представить в виде $G_p = N \oplus F$, где $G_p \cong N \cong F$, что невозможно.

Достаточность. Ввиду вполне инвариантности p-адических компонент G_p в группе G для каждой изометрии ζ группы G имеем $\zeta(G_p) \subseteq G_p$, конечность p-ранга влечет равенство $\zeta(G_p) = G_p$ и, значит, $\zeta G = G$. Далее для периодической части T группы B и каждой изометрии α группы B согласно теореме 3 имеем $\alpha T = T$. Отсюда для замыкания $\overline{T} = B$ в Z-адической топологии подгруппы T группы B получим $\alpha B = \overline{\alpha T} = B$. Ввиду вполне инвариантности подгруппы B в группе A изометрии f, g группы A можно представить в виде матриц $f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} \delta & \varepsilon \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$, где α, δ — автоморфизмы группы B, $\beta, \varepsilon \in \operatorname{Hom}(G, B)$, а γ, ζ — автоморфизмы группы G. Тогда если $\eta = \delta^{-1}\alpha\delta$, $\lambda = \zeta^{-1}\gamma\zeta$, а $\mu = \delta^{-1}(\alpha\varepsilon + \beta\zeta - \varepsilon\lambda)$, то для изометрии $h = \begin{pmatrix} \eta & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ группы A имеем $fg = gh$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Monk G. S.* Abelian p-groups without proper isomorphic pure dense subgroups // Ill. J. Math. 1970. V. 14, N 1. P. 164–177.
2. *Beaumont R. A., Pierce R. S.* Isomorphic direct summands of abelian groups // Math. Ann. 1964. V. 153. P. 21–37.
3. *Goldsmith B., Óhógáin S., Wallutis S.* Quasi-minimal Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. V. 132, N 8. P. 2185–2195.
4. *Pierce R. S.* Homomorphisms of primary Abelian groups // Topics in Abelian groups. 1963. P. 215–310.
5. *Grinshpon S. Y., Nikolskaya M. M.* Fully invariant subgroups of abelian p-groups with finite Ulm–Kaplansky invariants // Commun. Algebra. 2011. V. 39, N 11. P. 4273–4282.
6. *Чехлов А. Р.* Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 4. С. 520–539.
7. *Călugăreanu G., Schultz P.* Modules with Abelian endomorphism rings // Bull. Aust. Math. Soc. 2010. V. 82, N 1. P. 99–112.
8. *Чехлов А. Р.* E-разрешимые модули // Фунд. и прикл. математика. 2010. Т. 16, № 7. С. 221–236.

9. *Чехлов А. Р.* Об абелевых группах, близких к E-разрешимым // Фунд. и прикл. математика. 2012. Т. 17, № 8. С. 183–219.
10. *Чехлов А. Р.* Об абелевых группах с нильпотентными коммутаторами эндоморфизмов // Изв. вузов. Математика. 2012. № 10. С. 60–73.
11. *Чехлов А. Р.* О прямых суммах циклических групп с инвариантными мономорфизмами // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. 2013. № 3. С. 60–65.
12. *Чехлов А. Р.* Об абелевых группах с перестановочными мономорфизмами // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 5. С. 1182–1187.
13. *Куликов Л. Я.* К теории абелевых групп произвольной мощности // Мат. сб. 1945. Т. 16, № 4. С. 129–162.
14. *Мишина А. П.* Об автоморфизмах и эндоморфизмах абелевых групп // Вестн. МГУ. Математика и механика. 1962. № 4. С. 39–43.
15. *Крылов П. А.* Продолжение изоморфизмов в абелевых p-группах // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 4. С. 543–548.
16. *Fuchs L.* Extensions of isomorphisms between subgroups // Lect. Notes Math. 1981. V. 874. P. 289–296.
17. *Чистяков Д. С., Любимцев О. В.* Абелевы группы как эндоморфные модули над своим кольцом эндоморфизмов // Фунд. и прикл. математика. 2007. Т. 13, № 1. С. 229–233.
18. *Туганбаев А. А.* Автоморфизмы подмодулей и их продолжения // Дискрет. математика. 2013. Т. 25, № 1. С. 144–151.
19. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.

Статья поступила 4 июня 2013 г.

Чехлов Андрей Ростиславович
Национальный исследовательский Томский гос. университет,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
cheklov@math.tsu.ru