Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2014. Том 55, № 3

УДК 517.2+519.64

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА, ПОРОЖДЕННОГО ПРОИЗВОДНОЙ АКУСТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ

Э. Г. Халилов

Аннотация. Дана формула для вычисления производной акустического потенциала двойного слоя и доказана ограниченность оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя, в обобщенных пространствах Гёльдера.

Ключевые слова: уравнения Гельмгольца, акустический потенциал двойного слоя, производная акустического потенциала, поверхностный сингулярный интеграл, обобщенное пространство Гёльдера.

Известно, что внешние краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца и др. (см. [1]) приводятся к сингулярному интегральному уравнению, зависящему от нормальной производной акустического потенциала двойного слоя:

$$W_{k,\rho}(x) = \int\limits_S \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \vec{n}(y)} \cdot \rho(y) dS_y, \quad x \in S,$$

где $S \subset \mathbb{R}^3$ — поверхность Ляпунова с показателем α, $\vec{n}(y)$ — внешняя единичная нормаль в точке $y \in S$, $\Phi_k(x,y) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|}$, $x \neq y$, — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, k — волновое число, причем $\operatorname{Im} k \geq 0$, а $\rho(y)$ — непрерывно дифференцируемая функция на S.

Построенные Гюнтером (см. [2]) контрпримеры показывают, что для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью производные, вообще говоря, не существуют. Но в [1] показано, что если S — дважды дифференцируемая поверхность, а $\rho \in H_{1,\beta}$, $\beta < 1$, где $H_{1,\beta}$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций на S, имеющих равномерно непрерывную по Гёльдеру производную, с нормой

$$\|g\|_{1,\beta} = \sup_{x\in S}|g(x)| + \sup_{x\in S}|\operatorname{grad} g(x)| + \sup_{\substack{x,y\in S,\\ x\neq y}} \frac{|\operatorname{grad} g(x) - \operatorname{grad} g(y)|}{|x-y|^\beta},$$

то акустический потенциал двойного слоя имеет непрерывную производную и с помощью поверхностного градиента дана формула вычисления производной акустического потенциала двойного слоя. Кроме того, доказано, что оператор $A\rho(x) = \operatorname{grad} W_{k,\rho}(x)$, $x \in S$, ограниченно действует из $H_{1,\beta}$ в H_β, где H_β — пространство Гёльдера с нормой

$$\|g\|_\beta = \sup_{x\in S}|g(x)| + \sup_{\substack{x,y\in S,\\ x\neq y}} \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\beta}.$$

Но, как видно, условия, налагаемые на поверхность S и на плотность $\rho(x)$, довольно жесткие и данная формула не очень практична. Поэтому появляется интерес к разработке более практичной формулы для вычисления производной акустического потенциала двойного слоя при ослабленных условиях, чему посвящена настоящая статья. Кроме того, доказана ограниченность оператора A в обобщенных пространствах Гёльдера.

Для непрерывной на S векторной функции $g(x)$ введем модуль непрерывности вида

$$\omega(g,\delta) = \delta \sup_{\tau\ge\delta} \frac{\overline{\omega}(g,\tau)}{\tau}, \quad \delta > 0,$$

где

$$\overline{\omega}(g,\tau) = \max_{\substack{|x-y|\le\tau,\\ x,y\in S}} |g(x)-g(y)|.$$

Теорема 1. *Пусть S — поверхность Ляпунова с показателем $0<\alpha\le 1$, $\rho(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция на S и*

$$\int\limits_0^{\operatorname{diam} S} \frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,t)}{t}\,dt < +\infty.$$

Тогда акустический потенциал двойного слоя $W_{k,\rho}(x)$ имеет на S непрерывную производную, причем

$$\operatorname{grad} W_{k,\rho}(x) = \int\limits_S \operatorname{grad}_x\left(\frac{\partial(\Phi_k(x,y)-\Phi_0(x,y))}{\partial\vec{n}(y)}\right)\rho(y)dS_y$$
$$-\frac{3}{4\pi}\int\limits_S \frac{(\overrightarrow{xy},\vec{n}(y))\cdot\overrightarrow{xy}}{|x-y|^5}(\rho(y)-\rho(x))\,dS_y + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{\rho(y)-\rho(x)}{|x-y|^3}\vec{n}(y)\,dS_y, \quad x\in S, \tag{1}$$

где последний интеграл существует в смысле главного значения Коши. Кроме того, имеют место следующие неравенства:

$$\|\operatorname{grad} W_{k,\rho}\|_\infty \le M\left(\int\limits_0^{\operatorname{diam} S}\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,t)}{t}\,dt + \|\rho\|_\infty + \|\operatorname{grad}\rho\|_\infty\right).$$

Здесь и в дальнейшем через M будем обозначать положительное постоянные, зависящие лишь от S и k, при $0<\alpha<1$

$$\omega(\operatorname{grad} W_{k,\rho},h) \le M_\rho\left(h^\alpha + \omega(\operatorname{grad}\rho,h) + \int\limits_o^h \frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,t)}{t}\,dt + h\int\limits_h^{\operatorname{diam} S}\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,t)}{t^2}\,dt\right),$$

а при $\alpha=1$

$$\omega(\operatorname{grad} W_{k,\rho},h) \le M_\rho\left(h|\ln h| + \omega(\operatorname{grad}\rho,h) + \int\limits_0^h \frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,t)}{t}\,dt + h\int\limits_h^{\operatorname{diam} S}\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,t)}{t^2}\,dt\right),$$

где M_ρ — положительная постоянная, зависящая лишь от S, k и ρ.

Доказательство. Очевидно, что

$$W_{k,\rho}(x) = (W_{k,\rho}(x) - W_{0,\rho}(x)) + W_{0,\rho}(x),$$

где

$$W_{0,\rho}(x) = W_{k,\rho}(x)|_{k=0},\ x \in S, \quad \Phi_0(x,y) = \Phi_k(x,y)|_{k=0},\ x,y \in S.$$

Выражение $W_{k,\rho}(x) - W_{0,\rho}(x)$ имеет на S производную (см. [1]), причем

$$\operatorname{grad}(W_{k,\rho}(x) - W_{0,\rho}(x)) = \int_S \operatorname{grad}_x \left(\frac{\partial(\Phi_k(x,y) - \Phi_0(x,y))}{\partial \vec{n}(y)} \right) \rho(y)\, dS_y$$

$$= \int_S \left[\overrightarrow{yx} \frac{(\vec{n}(y), \overrightarrow{xy})}{4\pi |x-y|^5} ((3 - 3ik|x-y| - k^2|x-y|^2) e^{ik|x-y|} - 3) \right.$$

$$\left. + \frac{\vec{n}(y)}{4\pi |x-y|^3} ((1 - ik|x-y|) e^{ik|x-y|} - 1) \right] \rho(y)\, dS_y,$$

$$\left| \operatorname{grad}_x \left(\frac{\partial(\Phi_k(x,y) - \Phi_0(x,y))}{\partial \vec{n}(y)} \right) \right| \le \frac{M}{|x-y|}.$$

Тогда интеграл

$$L(x) = \int_S \operatorname{grad}_x \left(\frac{\partial(\Phi_k(x,y) - \Phi_0(x,y))}{\partial \vec{n}(y)} \right) \rho(y)\, dS_y$$

сходится как несобственный и для любого $x \in S$

$$|L(x)| \le M \|\rho\|_\infty.$$

По теореме Гаусса (см. [3]) выражение $W_{0,\rho}(x)$ можно представить в следующем виде:

$$W_{0,\rho}(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{(\overrightarrow{xy}, \vec{n}(y))}{|x-y|^3} (\rho(y) - \rho(x))\, dS_y - \frac{1}{2} \rho(x).$$

Поскольку функция $\rho(x)$ непрерывно дифференцируема, существует такая точка $y^* = x + \theta \cdot (y - x)$ (здесь $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ и $\theta_i \in (0,1)$, $i = \overline{1,3}$), что

$$\rho(y) - \rho(x) = (\operatorname{grad} \rho(y^*), \overrightarrow{xy}), \quad x, y \in S. \tag{2}$$

Тогда

$$\left| \frac{(\overrightarrow{xy}, \vec{n}(y))}{|x-y|^3} (\rho(y) - \rho(x)) \right| \le \frac{\mathrm{M}}{|x-y|^{1-\alpha}} \| \operatorname{grad} \rho \|_\infty.$$

По известной теореме (см. [4]) выражение $W_{0,\rho}(x)$ имеет на S производную, причем

$$\operatorname{grad} W_{0,\rho}(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \operatorname{grad}_x \left[\frac{(\overrightarrow{xy}, \vec{n}(y))}{|x-y|^3} (\rho(y) - \rho(x)) \right] dS_y - \frac{1}{2} \operatorname{grad} \rho(x)$$

$$= -\frac{3}{4\pi} \int_S \frac{(\overrightarrow{xy}, \vec{n}(y)) \overrightarrow{xy}}{|x-y|^5} (\rho(y) - \rho(x))\, dS_y + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\rho(y) - \rho(x)}{|x-y|^3} \vec{n}(y)\, dS_y, \quad x \in S.$$

Учитывая (2), находим, что интеграл

$$F(x) = \int\limits_S \frac{(\overrightarrow{xy}, \vec{n}(y))\overrightarrow{xy}}{|x-y|^5}(\rho(y)-\rho(x))\,dS_y$$

сходится как несобственный и для любого $x \in S$

$$|F(x)| \le M\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty.$$

Очевидно, что

$$G(x) = \int\limits_S \frac{\rho(y)-\rho(x)}{|x-y|^3}\vec{n}(y)\,dS_y = \int\limits_S \frac{\vec{n}(y)-\vec{n}(x)}{|x-y|^3}(\rho(y)-\rho(x))\,dS_y + \vec{n}(x)\int\limits_S \frac{\rho(y)-\rho(x)}{|x-y|^3}\,dS_y.$$

Так как

$$\left|\frac{\vec{n}(y)-\vec{n}(x)}{|x-y|^3}(\rho(y)-\rho(x))\right| \le M\frac{\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty}{|x-y|^{2-\alpha}},$$

то

$$\left|\int\limits_S \frac{\vec{n}(y)-\vec{n}(x)}{|x-y|^3}(\rho(y)-\rho(x))\,dS_y\right| \le M\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty.$$

Пусть d — радиус стандартной сферы для S и $S_d(x) = \{y \in S \mid |y-x| < d\}$, $x \in S$. Учитывая (2), получаем

$$\int\limits_S \frac{\rho(y)-\rho(x)}{|x-y|^3}\,dS_y = \int\limits_{S\setminus S_d(x)} \frac{\rho(y)-\rho(x)}{|x-y|^3}\,dS_y + \int\limits_{S_d(x)} \frac{(\operatorname{grad}\rho(y^*)-\operatorname{grad}\rho(x), \overrightarrow{xy})}{|x-y|^3}\,dS_y + \int\limits_{S_d(x)} \frac{(\operatorname{grad}\rho(x), \overrightarrow{xy})}{|x-y|^3}\,dS_y.$$

Первое слагаемое существует как собственный интеграл, а для второго слагаемого имеем

$$\left|\int\limits_{S_d(x)} \frac{(\operatorname{grad}\rho(y^*)-\operatorname{grad}\rho(x), \overrightarrow{xy})}{|x-y|^3}\,dS_y\right| \le M\int\limits_0^d \frac{\omega(\operatorname{grad}\rho, t)}{t}\,dt.$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{S_d(x)} \frac{(\operatorname{grad}\rho(x), \overrightarrow{xy})}{|x-y|^3}\,dS_y = \int\limits_{S_d(x)} \frac{(y_1-x_1)\frac{\partial\rho(x)}{\partial x_1} + (y_2-x_2)\frac{\partial\rho(x)}{\partial x_2} + (y_3-x_3)\frac{\partial\rho(x)}{\partial x_3}}{((y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2)^{\frac{3}{2}}}\,dS_y.$$

Известно (см. [3]), что для любой точки $x \in S$ окрестность $S_d(x)$ пересекается с прямой, параллельной нормали $\vec{n}(x)$, в единственной точке либо вообще не пересекается, т. е. множество $S_d(x)$ однозначно проектируется на множество $\Omega_d(x)$, лежащее в круге радиуса d с центром в точке x на касательной плоскости

$\Gamma(x)$ к S в точке x. На куске $S_d(x)$ выберем локальную прямоугольную систему координат (u,v,w) с началом в точке x, где ось w направим вдоль нормали $\vec{n}(x)$. Очевидно, что оси u и v будут лежать на касательной плоскости $\Gamma(x)$. Тогда в этих координатах окрестность $S_d(x)$ можно задать уравнением

$$w = f(u,v), \quad (u,v) \in \Omega_d(x),$$

причем

$$f \in C^{1,\alpha}(\Omega_d(x)), \quad f(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial v} = 0. \tag{3}$$

Кроме того, если $\tilde{y} \in \Gamma(x)$ — проекция точки $y \in S$, то (см. [5])

$$|x - \tilde{y}| \leq |x - y| \leq C_1 |x - \tilde{y}|,$$

где C_1 — положительная постоянная, зависящая лишь от S (для сферы $C_1 = \sqrt{2}$).

Пусть $d_0 = d/C_1$ и $O_{d_0}(x) = \{u^2 + v^2 < d_0\} \subset \Gamma(x)$ (очевидно, что $O_{d_0}(x) \subset \Omega_d(x)$). Тогда по формуле сведения поверхностного интеграла к повторному имеем

$$\int\limits_{S_d(x)} \frac{(\operatorname{grad}\rho(x), \overrightarrow{xy})}{|x-y|^3}\, dS_y$$

$$= \int\limits_{\Omega_d(x)\setminus O_{d_0}(x)} \frac{\frac{\partial\rho(x)}{\partial x_1}u + \frac{\partial\rho(x)}{\partial x_2}v + \frac{\partial\rho(x)}{\partial x_3}f(u,v)}{(\sqrt{u^2+v^2+f^2(u,v)})^3}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}\, dudv$$

$$+ \int\limits_{O_{d_0}(x)} \frac{\frac{\partial\rho(x)}{\partial x_1}u + \frac{\partial\rho(x)}{\partial x_2}v}{(\sqrt{u^2+v^2})^3}\, dudv$$

$$+ \int\limits_{O_{d_0}(x)} \frac{\frac{\partial\rho(x)}{\partial x_3}f(u,v)}{(\sqrt{u^2+v^2+f^2(u,v)})^3}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}\, dudv$$

$$+ \int\limits_{O_{d_0}(x)} \frac{\frac{\partial\rho(x)}{\partial x_1}u + \frac{\partial\rho(x)}{\partial x_2}v}{(\sqrt{u^2+v^2+f^2(u,v)})^3}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dv}\right)^2} - 1\right) dudv$$

$$+ \int\limits_{O_{d_0}(x)} \left(\frac{\partial\rho(x)}{\partial x_1}u + \frac{\partial\rho(x)}{\partial x_2}v\right)\left(\frac{1}{(\sqrt{u^2+v^2+f^2(u,v)})^3} - \frac{1}{(\sqrt{u^2+v^2})^3}\right) dudv.$$

Первое слагаемое существует как собственный интеграл, а второе слагаемое существует в смысле главного значения Коши и равно нулю. Действительно, перейдя к полярной системе координат, находим

$$\int\limits_{O_{d_0}(x)} \frac{\frac{\partial\rho(x)}{\partial x_1}u + \frac{\partial\rho(x)}{\partial x_2}v}{(\sqrt{u^2+v^2})^3}\, dudv = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{d_0}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\frac{\frac{\partial\rho(x)}{\partial x_1}}{r}\cos\varphi + \frac{\frac{\partial\rho(x)}{\partial x_2}}{r}\sin\varphi\right) d\varphi dr = 0.$$

Кроме того, учитывая неравенства

$$|f(u,v)| \leq M(\sqrt{u^2+v^2})^{1+\alpha}, \quad (u,v) \in \Omega_d(x), \tag{4}$$

$$\left|\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}-1\right| \le M(\sqrt{u^2+v^2})^{2\alpha}, \quad (u,v)\in\Omega_d(x), \tag{5}$$

$$\left|\frac{1}{(\sqrt{u^2+v^2+f^2(u,v)})^3}-\frac{1}{(\sqrt{u^2+v^2})^3}\right| \le \frac{M}{(\sqrt{u^2+v^2})^{3-2\alpha}},$$
$$(u,v)\in\Omega_d(x)\backslash\{(0,0)\}, \tag{6}$$

нетрудно доказать, что остальные интегралы сходятся как несобственные и

$$\left|\int\limits_S \frac{\rho(y)-\rho(x)}{|x-y|^3}\,dS_y\right| \le M\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty.$$

В результате получаем справедливость формулы (1) и оценку

$$\sup_{x\in S}|W_{k,\rho}(x)| \le M\left(\int\limits_0^{\operatorname{diam} S}\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,t)}{t}\,dt+\|\rho\|_\infty+\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty\right).$$

Возьмем любые точки $x',x''\in S$ такие, чтобы величина $h=|x'-x''|$ была достаточно малой. Очевидно, что

$$\operatorname{grad}W_{k,\rho}(x')-\operatorname{grad}W_{k,\rho}(x'')$$
$$=[L(x')-L(x'')]-\frac{3}{4\pi}[F(x')-F(x'')]+\frac{1}{4\pi}[G(x')-G(x'')]. \tag{7}$$

Так как интегралы $L(x)$ и $F(x)$ слабо сингулярны, нетрудно доказать, что

$$|L(x')-L(x'')| \le Mh|\ln h|\|\rho\|_\infty \tag{8}$$

и при $0<\alpha<1$

$$|F(x')-F(x'')| \le M(h\|\rho\|_\infty+h^\alpha\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty),$$

а при $\alpha=1$

$$|F(x')-F(x'')| \le M(h\|\rho\|_\infty+h|\ln h|\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty). \tag{9}$$

Оценим выражение $G(x')-G(x'')$. Очевидно, что существуют точки $\tilde y'=x'+\theta'(y-x')$ и $\tilde y''=x''+\theta''\cdot(y-x'')$ такие, что $\rho(y)-\rho(x')=(\operatorname{grad}\rho(\tilde y'),\overrightarrow{x'y})$ и $\rho(y)-\rho(x'')=(\operatorname{grad}\rho(\tilde y''),\overrightarrow{x''y})$. Тогда выражение $G(x')-G(x'')$ можно представить в следующем виде:

$$G(x')-G(x'')=\int\limits_{S\backslash S_d(x')}\left(\frac{\rho(y)-\rho(x')}{|x'-y|^3}-\frac{\rho(y)-\rho(x'')}{|x''-y|^3}\right)\vec n(y)\,dS_y$$

$$+\int\limits_{S_{h/2}(x')}\left[\frac{(\operatorname{grad}\rho(\tilde y')-\operatorname{grad}\rho(x'),\overrightarrow{x'y})}{|x'-y|^3}+\frac{(\operatorname{grad}\rho(x'),\overrightarrow{x'y})}{|x'-y|^3}(\vec n(y)-\vec n(x'))\right]\vec n(y)\,dS_y$$

$$-\int\limits_{S_{h/2}(x'')}\left[\frac{(\operatorname{grad}\rho(x''),\overrightarrow{x''y})}{|x''-y|^3}(\vec n(y)-\vec n(x''))+\frac{(\operatorname{grad}\rho(\tilde y'')-\operatorname{grad}\rho(x''),\overrightarrow{x''y})}{|x''-y|^3}\right]\vec n(y)\,dS_y$$

$$-\int\limits_{S_{h/2}(x')}\left[\frac{(\operatorname{grad}\rho(\tilde y'')-\operatorname{grad}\rho(x''),\overrightarrow{x''y})}{|x''-y|^3}+\frac{(\operatorname{grad}\rho(x''),\overrightarrow{x''y})}{|x''-y|^3}(\vec n(y)-\vec n(x''))\right]dS_y$$

$$+\int\limits_{S_{h/2}(x'')}\left[\frac{(\operatorname{grad}\rho(x'),\overrightarrow{x'y})}{|x'-y|^3}(\vec{n}(y)-\vec{n}(x'))+\frac{(\operatorname{grad}\rho(\tilde{y}')-\operatorname{grad}\rho(x'),\overrightarrow{x'y})}{|x'-y|^3}\right]dS_y$$

$$+\int\limits_{S_d(x')\setminus(S_{h/2}(x')\cup S_{h/2}(x''))}\left\{(\operatorname{grad}\rho(\tilde{y}')-\operatorname{grad}\rho(x''),\overrightarrow{x'y})\left(\frac{1}{|x'-y|^3}-\frac{1}{|x''-y|^3}\right)\vec{n}(y)\right.$$

$$+\frac{1}{|x''-y|^3}\left[(\operatorname{grad}\rho(\tilde{y}')-\operatorname{grad}\rho(\tilde{y}''),\overrightarrow{x'y})+(\operatorname{grad}\rho(\tilde{y}')-\operatorname{grad}\rho(x'),\overrightarrow{x'x''})\right]\vec{n}(y)$$

$$+\frac{n(y)-n(x')}{|x'-y|^3}(\operatorname{grad}\rho(x'')-\operatorname{grad}\rho(x'),x'y)+(\operatorname{grad}\rho(x''),\overrightarrow{x''y})(\vec{n}(y)-\vec{n}(x''))$$

$$\times\left(\frac{1}{|x'-y|^3}-\frac{1}{|x''-y|^3}\right)$$

$$\left.+\frac{\vec{n}(y)-\vec{n}(x'')}{|x'-y|^3}((\operatorname{grad}\rho(x')-\operatorname{grad}\rho(x''),\overrightarrow{x'y})+(\operatorname{grad}\rho(x''),\overrightarrow{x'x''}))\right\}dS_y$$

$$+\int\limits_{S_d(x')}\frac{(\operatorname{grad}\rho(x'),\overrightarrow{x'y})}{|x'-y|^3}(\vec{n}(x')-\vec{n}(x''))\,dS_y$$

$$+n(x')\int\limits_{S_d(x')\setminus(S_{h/2}(x')\cup S_{h/2}(x''))}\frac{(\operatorname{grad}\rho(x'')-\operatorname{grad}\rho(x'),x'y)}{|x'-y|^3}\,dS_y$$

$$+\int\limits_{S_d(x')\setminus(S_{h/2}(x')\cup S_{h/2}(x''))}\frac{(\operatorname{grad}\rho(x'),\overrightarrow{x'y})}{|x'-y|^3}(\vec{n}(x'')-\vec{n}(x'))\,dS_y$$

$$+\vec{n}(x'')\cdot\int\limits_{S_d(x')}\left[\frac{(\operatorname{grad}\rho(x'),\overrightarrow{x'y})}{|x'-y|^3}-\frac{(\operatorname{grad}\rho(x''),\overrightarrow{x''y})}{|x''-y|^3}\right]dS_y.$$

Слагаемые интегралы в последнем равенстве обозначим через $G_i(x',x'')$, $i=\overline{1,10}$, соответственно. Очевидно, что

$$|G_1(x',x'')|\le Mh\|\rho\|_\infty,$$

$$|G_2(x',x'')|\le M\left(\int\limits_0^h\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,t)}{t}\,dt+h^\alpha\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty\right),$$

$$|G_3(x',x'')|\le M\left(\int\limits_0^h\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,t)}{t}\,dt+h^\alpha\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty\right).$$

Кроме того, принимая во внимание $h/2\le|y-x''|\le 3h/2$, $y\in S_{h/2}(x')$, имеем

$$|G_4(x',x'')|\le M\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,3h/2)+(3h/2)^\alpha}{(3h/2)^2}\operatorname{mes}S_{h/2}(x')\le M(h^\alpha+\omega(\operatorname{grad}\rho,h)).$$

Учитывая, что $h/2\le|y-x'|\le 3h/2$, $y\in S_{h/2}(x'')$, находим

$$|G_5(x',x'')|\le M(h^\alpha+\omega(\operatorname{grad}\rho,h)).$$

Так как существует точка $\tilde{x} = x' + \tilde{\theta} \cdot (x'' - x')$ такая, что $\rho(x'') - \rho(x') = (\operatorname{grad} \rho(\tilde{x}), \overrightarrow{x'x''})$, то

$$\begin{aligned}(\operatorname{grad} \rho(\tilde{x}), \overrightarrow{x'x''}) = \rho(x'') - \rho(x') = (\rho(y) - \rho(x')) - (\rho(y) - \rho(x''))\\ = (\operatorname{grad} \rho(\tilde{y}'), \overrightarrow{x'y}) - (\operatorname{grad} \rho(\tilde{y}''), \overrightarrow{x''y})\\ = (\operatorname{grad} \rho(\tilde{y}') - \operatorname{grad} \rho(\tilde{y}''), \overrightarrow{x'y}) + (\operatorname{grad} \rho(\tilde{y}''), \overrightarrow{x'x''}),\end{aligned}$$

а значит,

$$(\operatorname{grad} \rho(\tilde{y}') - \operatorname{grad} \rho(\tilde{y}''), \overrightarrow{x'y}) = (\operatorname{grad} \rho(\tilde{x}) - \operatorname{grad} \rho(\tilde{y}''), \overrightarrow{x'x''}).$$

Тогда, принимая во внимание неравенство

$$\left| \frac{1}{|x'-y|^3} - \frac{1}{|x''-y|^3} \right| \le \frac{Mh}{|x'-y|^4}, \quad y \in S_d(x') \backslash (S_{h/2}(x') \cup S_{h/2}(x'')),$$

получаем, что при $0 < \alpha < 1$

$$|G_6(x', x'')| \le M \left(h \int_h^d \frac{\omega(\operatorname{grad} \rho, t)}{t^2}\, dt + h^\alpha \| \operatorname{grad} \rho \|_\infty + \omega(\operatorname{grad} \rho, h) \right),$$

а при $\alpha = 1$

$$|G_6(x', x'')| \le M \left(h \int_h^d \frac{\omega(\operatorname{grad} \rho, t)}{t^2}\, dt + h |\ln h| \| \operatorname{grad} \rho \|_\infty + \omega(\operatorname{grad} \rho, h) \right).$$

Известно, что интеграл

$$\int_{S_d(x')} \frac{(\operatorname{grad} \rho(x'), \overrightarrow{x'y})}{|x'-y|^3}\, dS_y$$

сходится в смысле главного значения Коши. Поэтому

$$|G_7(x', x'')| \le M h^\alpha.$$

На куске $S_d(x')$ выберем локальную прямоугольную систему координат (u, v, w) с началом в точке x', где ось w направим вдоль нормали $\vec{n}(x')$ (оси u и v будут лежать на касательной плоскости $\Gamma(x')$). Через $\Omega_{h/2}(x', x'')$ обозначим проекцию множества $S_{h/2}(x') \cup S_{h/2}(x'')$ на касательную плоскость $\Gamma(x')$. Так как

$$\int_{\mathrm{O}_{d_0}(x') \backslash \mathrm{O}_{2h}(x')} \frac{\left(\frac{\partial \rho(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_1}\right) u + \left(\frac{\partial \rho(x')}{\partial x_2} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_2}\right) v}{(\sqrt{u^2 + v^2})^3}\, du dv = 0,$$

по формуле сведения поверхностного интеграла к повторному получаем

$$\int_{S_d(x') \backslash (S_{h/2}(x') \cup S_{h/2}(x''))} \frac{(\operatorname{grad} \rho(x') - \operatorname{grad} \rho(x''), \overrightarrow{x'y})}{|x'-y|^3}\, dS_y$$

$$= \int\limits_{\Omega_d(x')\setminus\Omega_{h/2}(x',x'')} \frac{\big(\frac{\partial\rho(x')}{\partial x_1}-\frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_1}\big)u+\big(\frac{\partial\rho(x')}{\partial x_2}-\frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_2}\big)v+\big(\frac{\partial\rho(x')}{\partial x_3}-\frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_3}\big)f(u,v)}{(\sqrt{u^2+v^2+f^2(u,v)})^3}$$

$$\times\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}\,dudv = \int\limits_{\Omega_d(x')\setminus\Omega_{h/2}(x',x'')} \frac{\big(\frac{\partial\rho(x')}{\partial x_3}-\frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_3}\big)f(u,v)}{(\sqrt{u^2+v^2+f^2(u,v)})^3}$$

$$\times\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}\,dudv$$

$$+\int\limits_{\Omega_d(x')\setminus\Omega_{h/2}(x',x'')} \frac{\big(\frac{\partial\rho(x')}{\partial x_1}-\frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_1}\big)u+\big(\frac{\partial\rho(x')}{\partial x_2}-\frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_2}\big)v}{(\sqrt{u^2+v^2+f^2(u,v)})^3}$$

$$\times\left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{dv}\right)^2}-1\right)dudv$$

$$+\int\limits_{\Omega_d(x')\setminus\Omega_{h/2}(x',x'')}\left\{\left(\frac{\partial\rho(x')}{\partial x_1}-\frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_1}\right)u+\left(\frac{\partial\rho(x')}{\partial x_2}-\frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_2}\right)v\right\}$$

$$\times\left(\frac{1}{(\sqrt{u^2+v^2+f^2(u,v)})^3}-\frac{1}{(\sqrt{u^2+v^2})^3}\right)dudv$$

$$+\int\limits_{\Omega_d(x')\setminus O_{d_0}(x')} \frac{\big(\frac{\partial\rho(x')}{\partial x_1}-\frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_1}\big)u+\big(\frac{\partial\rho(x')}{\partial x_2}-\frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_2}\big)v}{(\sqrt{u^2+v^2})^3}\,dudv$$

$$+\int\limits_{O_{2h}(x')\setminus\Omega_{h/2}(x',x'')} \frac{\big(\frac{\partial\rho(x')}{\partial x_1}-\frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_1}\big)u+\big(\frac{\partial\rho(x')}{\partial x_2}-\frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_2}\big)v}{(\sqrt{u^2+v^2})^3}\,dudv.$$

Для последнего интеграла имеем

$$\left|\int\limits_{O_{2h}(x')\setminus\Omega_{h/2}(x',x'')} \frac{\big(\frac{\partial\rho(x')}{\partial x_1}-\frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_1}\big)u+\big(\frac{\partial\rho(x')}{\partial x_2}-\frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_2}\big)v}{(\sqrt{u^2+v^2})^3}\,dudv\right|$$

$$\le M\omega(\operatorname{grad}\rho,h)\int\limits_{h/C_1}^{2h}\frac{1}{t}\,dt = M\omega(\operatorname{grad}\rho,h)\ln(2C_1).$$

Оценивая все остальные интегралы с помощью неравенств (4)–(6), получаем

$$|G_8(x',x'')|\le M\left(h\int\limits_h^d\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,t)}{t^2}\,dt+\omega(\operatorname{grad}\rho,h)\right).$$

Тем же способом можно доказать, что

$$|G_9(x',x'')|\le M(h^\alpha\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty+\omega(\operatorname{grad}\rho,h)).$$

Перейдя к локальной прямоугольной системе координат (u,v,w) с началом в точке x' и учитывая (3), с помощью несложных рассуждений можно доказать, что при $0<\alpha<1$

$$|G_{10}(x',x'')|\le M(h^\alpha\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty+\omega(\operatorname{grad}\rho,h)),$$

а при $\alpha = 1$

$$|G_{10}(x', x'')| \le M(h|\ln h|\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty + \omega(\operatorname{grad}\rho, h)).$$

В результате, суммируя полученные оценки для выражений $G_i(x', x'')$, $i = \overline{1, 10}$, имеем

$$|G(x') - G(x'')| \le M\Bigg(\int\limits_0^h \frac{\omega(\operatorname{grad}\rho, t)}{t}\,dt + h\int\limits_h^{\operatorname{diam} S}\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho, t)}{t^2}\,dt + h^\alpha\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty + \omega(\operatorname{grad}\rho, h)\Bigg)$$

при $0 < \alpha < 1$,

$$|G(x') - G(x'')| \le M\Bigg(\int\limits_0^h \frac{\omega(\operatorname{grad}\rho, t)}{t}\,dt + h\int\limits_h^{\operatorname{diam} S}\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho, t)}{t^2}\,dt + h|\ln h|\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty + \omega(\operatorname{grad}\rho, t)\Bigg) \quad \text{при } \alpha = 1. \qquad (10)$$

Так как функция

$$\psi(h) = \begin{cases} h^\alpha + \omega(\operatorname{grad}\rho, h) + \int\limits_0^h \frac{\omega(\operatorname{grad}\rho, t)}{t}\,dt + h\int\limits_h^{\operatorname{diam} S}\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho, t)}{t^2}\,dt & \text{при } 0 < \alpha < 1, \\ h|\ln h| + \omega(\operatorname{grad}\rho, h) + \int\limits_o^h \frac{\omega(\operatorname{grad}\rho, t)}{t}\,dt + h\int\limits_h^{\operatorname{diam} S}\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho, t)}{t^2}\,dt & \text{при } \alpha = 1 \end{cases}$$

не убывает, функция $\psi(h)/h$ не возрастает и $\lim\limits_{h\to 0}\psi(h) = 0$. Принимая во внимание оценки (8)–(10) в равенстве (7), получаем справедливость теоремы.

Введем следующие классы функций, определенных на $(0, \operatorname{diam} S]$:

$$\chi = \{\varphi \mid \varphi\uparrow, \lim_{\delta\to 0}\varphi(\delta) = 0,\ \varphi(\delta)/\delta\downarrow\},$$

$$J_0(S) = \left\{\varphi \in \chi \mid \int\limits_0^{\operatorname{diam} S}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt < +\infty\right\},$$

и рассмотрим функцию

$$Z(h, \varphi) = \begin{cases} h^\alpha + \varphi(h) + \int\limits_0^h \frac{\varphi(t)}{t}\,dt + h\int\limits_h^{\operatorname{diam} S}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt & \text{при } 0 < \alpha < 1, \\ h|\ln h| + \varphi(h) + \int\limits_0^h \frac{\varphi(t)}{t}\,dt + h\int\limits_h^{\operatorname{diam} S}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Там, где это не вызовет недоразумения, иногда будем писать $Z(h)$, $Z(\varphi)$ вместо $Z(h, \varphi)$.

Очевидно, что $\lim\limits_{h\to 0} Z(h) = 0$, функция $Z(h)$ не убывает, а функция $Z(h)/h$ не возрастает.

Пусть $\varphi \in \chi$. Будем обозначать через $H_\varphi(S)$ линейное пространство всех непрерывных на S функций ρ, удовлетворяющих условию

$$|\rho(x) - \rho(y)| \le M_1\varphi(|x-y|), \quad x, y \in S,$$

а через $H_{1,\varphi}(S)$ — линейное пространство всех непрерывно дифференцируемых на S функций ρ, удовлетворяющих условию

$$|\operatorname{grad}\rho(x) - \operatorname{grad}\rho(y)| \le M_2\varphi(|x-y|), \quad x, y \in S,$$

где M_1 и M_2 — положительные постоянные, зависящие от ρ, а не от x и y.

Известно (см. [6]), что пространство $H_\varphi(S)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|\rho\|_\varphi = \sup_{x\in S}|\rho(x)| + \sup_{\substack{x,y\in S,\\ x\neq y}} \frac{|\rho(x)-\rho(y)|}{\varphi(|x-y|)},$$

а пространство $H_{1,\varphi}(S)$ — с нормой

$$\|\rho\|_{1,\varphi} = \sup_{x\in S}|\rho(x)| + \sup_{x\in S}|\operatorname{grad}\rho(x)| + \sup_{\substack{x,y\in S,\\ x\neq y}} \frac{|\operatorname{grad}\rho(x)-\operatorname{grad}\rho(y)|}{\varphi(|x-y|)}.$$

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in J_0(S)$. Тогда оператор $A\rho = \operatorname{grad} W_{k,\rho}(x)$, $x \in S$, ограниченно действует из $H_{1,\varphi}$ в $H_{Z(\varphi)}$, причем*

$$\|\operatorname{grad} W_{k,\rho}\|_{Z(\varphi)} \le M\|\rho\|_{1,\varphi}.$$

Следствие. *Пусть S — поверхность Ляпунова с показателем α, а $\rho \in H_{1,\beta}$. Тогда акустический потенциал двойного слоя $W_{k,\rho}(x)$ имеет на S непрерывную производную, причем*

(a) *если $\alpha < \beta \le 1$, то $\operatorname{grad} W_{k,\rho} \in H_\alpha$ и $\|\operatorname{grad} W_{k,\rho}\|_\alpha \le M\|\rho\|_{1,\beta}$;*

(б) *если $\beta \le \alpha < 1$, то $\operatorname{grad} W_{k,\rho} \in H_\beta$ и $\|\operatorname{grad} W_{k,\rho}\|_\beta \le M\|\rho\|_{1,\beta}$;*

(c) *если $\alpha = 1$, $\beta < 1$, то $\operatorname{grad} W_{k,\rho} \in H_\beta$ и $\|\operatorname{grad} W_{k,\rho}\|_\beta \le M\|\rho\|_{1,\beta}$;*

(д) *если $\alpha = 1$, $\beta = 1$, то $\operatorname{grad} W_{k,\rho} \in H_\gamma$ и $\|\operatorname{grad} W_{k,\rho}\|_\gamma \le M\|\rho\|_{1,1}$, где $\gamma \in (0,1)$.*

Отметим, что из утверждения (c) вытекает теорема 2.23 в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
2. *Гюнтер Н.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехиздат, 1953.
3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
4. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
5. *Кустов Ю. А., Мусаев Б. И.* Кубатурная формула для двумерного сингулярного интеграла и ее приложения. М., 1981. Деп. в ВИНИТИ, № 4281-81. 60 с.
6. *Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш.* Введение в теории нелинейных сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 26 сентября 2013 г.

Халилов Эльнур Гасан оглы
Азербайджанская гос. нефтяная академия,
пр. Азадлыг, 20, Баку AZ 1010
`xemm@mail.ru`