Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2014. Том 55, № 3

УДК 510.67:512.56

РЕГУЛЯРНЫЕ ПОЛИГОНЫ С ПРИМИТИВНО СВЯЗНЫМИ ТЕОРИЯМИ

А. А. Степанова

Аннотация. Изучаются моноиды S, над которыми класс всех регулярных S-полигонов аксиоматизируем и примитивно связен. Доказано, что аксиоматизируемый класс всех регулярных S-полигонов примитивно связен тогда и только тогда, когда полугруппа R является прямоугольной связкой групп и $R = eR$ для некоторого идемпотента $e \in R$, где $_SR$ — наибольший относительно включения регулярный подполигон S-полигона $_SS$.

Ключевые слова: примитивно нормальная теория, примитивно связная теория, полигон, регулярный полигон.

§ 1. Предварительные сведения

Описание моноидов S, для которых класс регулярных S-полигонов аксиоматизируем, приведено в [1]. В [2] введено понятие примитивно связной теории. В [3] доказано, что класс всех S-полигонов примитивно связен тогда и только тогда, когда S является группой. В данной работе изучаются моноиды S, над которыми аксиоматизируемый класс регулярных S-полигонов примитивно связен. Доказано, что аксиоматизируемый класс регулярных S-полигонов примитивно связен тогда и только тогда, когда полугруппа R является прямоугольной связкой групп и $R = eR$ для некоторого идемпотента $e \in R$, где $_SR$ — наибольший регулярный подполигон S-полигона $_SS$. Отсюда легко получается следующий результат (см. [4]): если S — коммутативный моноид и класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов аксиоматизируем, то класс регулярных S-полигонов примитивно связен в том и только том случае, когда полугруппа R является абелевой группой.

Напомним некоторые теоретико-модельные понятия. Пусть T — полная теория языка L. Зафиксируем некоторую достаточно большую и достаточно насыщенную модель $\mathscr{C}$ теории T, которая называется *монстр-моделью*, так как предполагается, что все рассматриваемые модели теории T являются ее элементарными подмоделями. Все элементы, кортежи элементов и множества будут браться из монстр-модели $\mathscr{C}$. Кортежи элементов $\langle a_1, \dots, a_n\rangle$ и переменных $\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ будут обозначаться соответственно через $\bar{a}$ и $\bar{x}$. Вместо $\bar{a} \in \mathscr{C}^n$ будем писать $\bar{a} \in \mathscr{C}$. Пусть $\bar{s} = \langle s_1, \dots, s_n\rangle$ — кортеж элементов или переменных. Введем следующие обозначения: $l(\bar{s})$ — длина кортежа $\bar{s}$; $\bigcup \bar{s}$ — множество, состоящее из элементов кортежа $\bar{s}$, $\bar{s}(i)$ — элемент s_i кортежа $\bar{s}$. Вместо $s \in \bigcup \bar{s}$ пишем просто $s \in \bar{s}$. Если $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — формула языка L, $\mathscr{A}$ — модель теории

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00460–а).

T, $\bar a$ — кортеж элементов из $\mathscr{A}$ и $l(\bar a) = l(\bar y)$, то через $\Phi(\mathscr{A}, \bar a)$ обозначается множество $\{\bar b \mid \mathscr{A} \models \Phi(\bar b, \bar a)\}$.

Формула вида

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n (\Phi_0 \wedge \cdots \wedge \Phi_k),$$

где Φ_i, $i \le k$, — атомарные формулы, называется *примитивной*.

Пусть $\Phi(\bar x, \bar y)$ — примитивная формула языка L, $\bar a$ — кортеж элементов и $l(\bar a) = l(\bar y)$. Множество вида $\Phi(\mathscr{C}, \bar a)$ называется *примитивным множеством*. Если $\bar b$ — кортеж элементов и $l(\bar b) = l(\bar y)$, то множества $\Phi(\mathscr{C}, \bar a)$ и $\Phi(\mathscr{C}, \bar b)$ называются *примитивными копиями*.

Эквивалентность α на некотором множестве X n-ок элементов из $\mathscr{C}$, определенная в $\mathscr{C}$ с помощью некоторой примитивной формулы $\Phi(\bar x_1, \bar x_2)$, называется *примитивной эквивалентностью*. Область определения X такой эквивалентности α определяется в $\mathscr{C}$ примитивной формулой $\Phi(\bar x, \bar x)$ и обозначается через $\mathrm{dom}\,\alpha$. Если $a \in X$, то через a/α будем обозначать класс эквивалентности α с представителем a. Эквивалентность α называется *нулевой*, если все α-классы одноэлементны.

Теория T называется *примитивно нормальной*, если любые примитивные копии либо совпадают, либо не пересекаются. Аксиоматизируемый класс структур K языка L называется *примитивно нормальным*, если теория $\mathrm{Th}(K)$ класса K примитивно нормальна. Множество X называется Δ-*примитивным*, если существует такое семейство S примитивных множеств, что

$$X = \bigcap \{Y \mid Y \in S\}.$$

Эквивалентность α называется Δ-*примитивной*, если существует такое множество E примитивных эквивалентностей, что

$$\alpha = \bigcap \{\beta \mid \beta \in E\}.$$

Классы X и Y одной Δ-примитивной эквивалентности α называются Δ-*примитивными копиями*. Множество вида $X = X^*/\alpha = \{a/\alpha \mid a \in X^*\}$, где X^* — Δ-примитивное множество, α — примитивная эквивалентность и выполнено $X^* \subseteq \mathrm{dom}(\alpha)$, называется *обобщенно примитивным множеством*. При этом X^* называется *основой*, а α — *образующей эквивалентностью* обобщенно примитивного множества X. Обобщенно примитивные множества X_1, X_2 называются *обобщенно примитивными копиями*, если у них есть общая образующая эквивалентность, а их основы X_1^*, X_2^* являются Δ-примитивными копиями.

Формула $\Phi(\bar x, \bar y, \bar z)$, $l(\bar x) = l(\bar y)$, называется $(\bar x, \bar y)$-*рефлексивной*, если

$$T \vdash \forall \bar x \forall \bar y \forall \bar z (\Phi(\bar x, \bar y, \bar z) \to (\exists \bar z \Phi(\bar x, \bar x, \bar z) \wedge \exists \bar z \Phi(\bar y, \bar y, \bar z))).$$

Пусть обобщенно примитивные множества X_0 и X_1 — обобщенно примитивные копии и α — их образующая эквивалентность. Говорят, что X_0 *примитивно связано* с X_1, если существует примитивная $(\bar x, \bar y)$-рефлексивная формула $\Phi(\bar x, \bar y, \bar c)$ (с параметрами $\bar c$) такая, что

(a) для любых $\bar a_0 \in X_0^*$ и $\bar b_0 \in X_1^*$ существуют такие $\bar a_1 \in X_0^*$ и $\bar b_1 \in X_1^*$, что в $\mathscr{C}$ истинны $\Phi(\bar a_0, \bar b_1, \bar c)$ и $\Phi(\bar a_1, \bar b_0, \bar c)$;

(b) для любого $\bar a \in X_0^*$ множество $\Phi(\bar a, \mathscr{C}, \bar c)$ не содержит X_1^* и $\bar b/\alpha \subseteq \Phi(\bar a, \mathscr{C}, \bar c)$ для любого $\bar b \in \Phi(\bar a, \mathscr{C}, \bar c)$;

(c) для любого $\bar b \in X_1^*$ множество $\Phi(\mathscr{C}, \bar b, \bar c)$ не содержит X_0^* и $\bar a/\alpha \subseteq \Phi(\mathscr{C}, \bar b, \bar c)$ для любого $\bar a \in \Phi(\mathscr{C}, \bar b, \bar c)$.

Теория T называется *примитивно связной*, если она примитивно нормальна и любые обобщенно примитивные копии либо примитивно связаны, либо обе одноэлементны.

Теория (не обязательно полная) примитивно нормальна (примитивно связна), если любое ее пополнение примитивно нормально (примитивно связно).

Приводимые ниже сведения из теории полигонов можно найти в [5]. *Левым S-полигоном* ${}_SA$ (или просто *S-полигоном*) называется множество A, на котором определено действие моноида S, причем единица S действует на A тождественно. Если для любого $a \in A$ существует гомоморфизм $\varphi : {}_SSa \longrightarrow {}_SS$ такой, что $\varphi(a)a = a$, то S-полигон ${}_SA$ называется *регулярным*. Заметим, что объединение всех регулярных подполигонов S-полигона ${}_SS$ также является регулярным подполигоном, который обозначим через ${}_SR$. *Копроизведением* полигонов ${}_SA_i$, $i \in I$, называется их дизъюнктное объединение. Копроизведение полигонов ${}_SA_i$, $i \in I$, обозначается через $\coprod\limits_{i\in I} {}_SA_i$. Следующее утверждение часто будем использовать без ссылок.

Утверждение 1. *Для любых $a, e, f \in S$, $e^2 = e$, $f^2 = f$, выполняются соотношения*

1) $aS \subseteq eS \Longleftrightarrow ea = a$;
2) $Sa \subseteq Se \Longleftrightarrow ae = a$.

Полугруппа T называется *прямоугольной связкой групп*, если $T = \bigcup\{T_{ij} \mid i \in I(T), j \in J(T)\}$ — разложение полугруппы T на группы T_{ij} и при этом $T_{ij} \cdot T_{kl} \subseteq T_{il}$ $(i, k \in I(T),\ j, l \in J(T))$.

Замечание 1. Если полугруппа $\langle T, *\rangle$ является прямоугольной связкой групп T_{ij} с единицами e_{ij}, $i \in I(T)$, $j \in J(T)$, то для любых $i, k \in I(T)$, $j, l \in J(T)$ выполняются следующие свойства:

1) $e_{ij} \cdot e_{kj} = e_{ij}$; $e_{ij} \cdot e_{il} = e_{il}$;
2) $e_{ij} \cdot T_{kl} = T_{ij} \cdot e_{kl} = T_{ij} \cdot T_{kl} = T_{il}$;
3) $\langle T_{ij}, *\rangle \cong \langle T_{kl}, *\rangle$;
4) $Te_{ij} = \bigcup\limits_{p\in I(T)} T_{pi}$; $e_{ij}T = \bigcup\limits_{p\in J(T)} T_{ip}$;
5) для любого $a \in T$ условие $Ta = Te_{ij}$ $(aT = e_{ij}T)$ равносильно тому, что $a \in T_{pj}$ $(a \in T_{ip})$ для некоторого $p \in I(T)$ $(p \in J(T))$.

§ 2. Примитивно связные классы регулярных полигонов

Во всех леммах, приведенных ниже, предполагается, что класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов аксиоматизируем и примитивно связен. Через T обозначим теорию класса $\mathfrak{R}$.

Пусть ${}_SA$ — полигон, $t \in S$. Определим на полигоне ${}_SA$ примитивную эквивалентность α_t^A следующим образом:

$$a\ \alpha_t^A\ b \Longleftrightarrow ta = tb.$$

Лемма 1. *Если ${}_SA \in \mathfrak{R}$, то α_t^A является нулевой примитивной эквивалентностью на полигоне ${}_SA$ для любого $t \in S$.*

Доказательство. Предположим, что ${}_SA \in \mathfrak{R}$, $t \in S$ и для некоторого $a \in A$ класс a/α_t^A не одноэлементен. Пусть ${}_SA_1$ и ${}_SA_2$ — копии полигона ${}_SA$, $a_1 \in A_1$ и $a_2 \in A_2$ — копии элемента $a \in A$. Заметим, что ${}_SB =_S A_1 \sqcup_S A_2 \in \mathfrak{R}$. В силу примитивной связности класса $\mathfrak{R}$ существует примитивная формула

$\Phi(x, y, \bar{c})$, где $\bar{c} \in B$, примитивно связывающая примитивные копии a_1/α_t^B и a_2/α_t^B. Пусть

$$\Phi(x, y, \bar{z}) \rightleftharpoons \exists \bar{u} \Psi(x, y, \bar{z}, \bar{u}).$$

Так как подполигоны ${}_SA_1$ и ${}_SA_2$ полигона ${}_SB$ не пересекаются, в формуле $\Psi(x, y, \bar{z}, \bar{u})$ нет подформул, эквивалентных формулам вида

$$rx = s_0 v_0 \wedge \bigwedge_{i=0}^{k-1} r_i v_i = s_{i+1} v_{i+1} \wedge r_k v_k = sy,$$

где $v_i \in \bar{z} \cup \bar{u}$ $(0 \le i \le k)$. Тогда

$$\Psi(x, y, \bar{z}, \bar{u}) \rightleftharpoons \Psi_1(x, \bar{z}, \bar{v}) \wedge \Psi_2(y, \bar{z}, \bar{w}),$$

причем кортежи $\bar{v}$ и $\bar{w}$ не пересекаются. Это означает, что в теории T

$$\Phi(x, y, \bar{z}) \equiv \exists \bar{v} \Psi_1(x, \bar{z}, \bar{v}) \wedge \exists \bar{w} \Psi_2(y, \bar{z}, \bar{w}).$$

Следовательно,

$${}_SA_1 \sqcup_S A_2 \models \exists \bar{v} \Psi_1(x_0, \bar{c}, \bar{v}) \wedge \exists \bar{w} \Psi_2(y_0, \bar{c}, \bar{w})$$

для любых $x_0 \in a_1/\alpha$, $y_0 \in a_2/\alpha$, что противоречит определению примитивной связности класса $\mathfrak{R}$.

Лемма 2. *Если ${}_SA \in \mathfrak{R}$, $t \in S$ и $a \in A$, то $Sta = Sa$.*

Доказательство. Пусть условия леммы выполняются. Через Sa_1 и Sa_2 обозначим непересекающиеся копии полигона Sa, sa_1 и sa_2 — копии элемента $sa \in Sa$ для любого $s \in S$, ${}_SB = ({}_SSa_1 \sqcup {}_SSa_2)/\theta$, где конгруэнция θ порождается парой $\langle ta_1, ta_2 \rangle$. Ясно, что ${}_SB \in \mathfrak{R}$. В полигоне ${}_SB$ имеет место равенство $ta_1/\theta = ta_2/\theta$. По лемме 1 $a_1/\theta = a_2/\theta$. Следовательно, $a \in Sta$, т. е. $Sta = Sa$.

Лемма 3. *Для любого идемпотента $e \in R$ имеет место равенство $R = eR$.*

Доказательство. Пусть $a, e \in R$ и e — идемпотент. Тогда $ea = e(ea)$. По лемме 1 $a = ea$, т. е. $a \in eR$, что доказывает лемму.

Лемма 4. *Полугруппа eSa является группой для любых $e, a \in R$, где e — идемпотент.*

Доказательство. Пусть $a, e \in R$ и e — идемпотент. По лемме 2 $Se = Sae$. Тогда $e = kae = ekae$ для некоторого $k \in S$. Так как $(eka)(eka) = eka$, то $g = eka$ — идемпотент и $g = eg$. Заметим, что $e = ge$. По лемме 2 $Sa = Sg$, т. е. $a = ag$. Из равенств $(esa)g = es(ag) = esa$ и $g(esa) = (eka)(esa) = (ekae)sa = esa$, где s — произвольный элемент S, следует, что g — единица полугруппы eSa.

Пусть $s \in S$. По лемме 2 $Saesag = Sg$. Тогда $g = kaesag$ для некоторого $k \in S$. Из равенств $a = ag$ и $g = eg$ вытекает $g = ka(esa) = (gka)(esa)$ и $gka \in eSa$. Покажем, что gka является элементом, обратным к esa, т. е. $g = (esa)(gka)$. Так как $(gka)((esa)(gka)) = ((gka)(esa))(gka) = g(gka) = gka = gk(ag) = (gka)g$, по лемме 1 $g = (esa)(gka)$. Таким образом, полугруппа eSa является группой.

Лемма 5. *Полугруппа R является прямоугольной связкой групп.*

Доказательство. Пусть $a, b, e \in R$ и e — идемпотент. По лемме 3 $R = eR$. По лемме 4 полугруппы eSa и eSb являются группами. Включение $eSa \cdot eSb \subseteq eSb$ очевидно. Пусть $eSa \ne eSb$ и g — единица группы eSa. Предположим, что $esa = etb$ для некоторых $s, t \in S$. Тогда $g = (esa)^{-1}(esa) = (esa)^{-1}(etb) \in eSb$. Следовательно, $era = erag \in eSb$ для любого $r \in S$, т. е. $eSa \subseteq eSb$. Аналогично $eSb \subseteq eSa$. Таким образом, $eSa = eSb$, и полугруппа R является прямоугольной связкой групп eSa $(a \in R)$.

Теорема. *Пусть класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов аксиоматизируем. Класс $\mathfrak{R}$ примитивно связен тогда и только тогда, когда полугруппа R является прямоугольной связкой групп и $R = eR$ для некоторого идемпотента $e \in R$.*

Доказательство. Необходимость следует из лемм 3 и 5. Докажем достаточность. Пусть полугруппа R является прямоугольной связкой групп, e — идемпотент полугруппы R и $R = eR$. Тогда по замечанию 1 $R = \coprod\{T_i \mid i \in I\}$, где T_i — группы, причем $T_i \cdot T_j = T_j$ для любых $i, j \in I$. Пусть e_i — единицы групп T_i $(i \in I)$. Поскольку $e = e_j$ для некоторого $j \in I$, по замечанию 1 для любого $i \in I$ выполняются равенства $e_i \cdot e = e$ и $e \cdot e_i = e$, следовательно, $eR = e_iR$ и $Se_i = e_iSe_i = T_i$; кроме того, ${}_SSe_i \cong_S Se$. Так как по замечанию 1 $Sa = Se_i$ для $a \in Se_i$ $(i \in I)$, то ${}_SSa \cong_S Se$. Поскольку $Se_i \subseteq R = e_jR$, то $Se_i = e_jSe_i$ для любых $i, j \in I$.

Докажем, что в теории класса $\mathfrak{R}$ имеет место элиминация кванторов для примитивных формул. Для этого рассмотрим примитивные формулы специального вида. Формулу вида

$$\Theta(\bar{x}) \rightleftharpoons \bigwedge_{i=0}^{n}(s_i x_i = t_{i+1}x_{i+1}), \tag{1}$$

где $\bar{x} = \langle x_0, \dots, x_{n+1}\rangle$, $s_i, t_{i+1} \in S$ $(0 \le i \le n)$, назовем *цепью* из x_0 в x_{n+1}. Пусть ${}_SA \in \mathfrak{R}$ и ${}_SA \models \Theta(a_0, \dots, a_{n+1})$, где $\Theta(\bar{x})$ — формула (1). Зафиксируем i $(0 \le i \le n)$. Поскольку ${}_SSa_i \cong_S Se$ и $Se = eSe$, то $a_i = ea_i$. Следовательно, $a_i = (s_ie)^{-1}t_{i+1}a_{i+1}$, где $(s_ie)^{-1}$ — элемент, обратный к элементу s_ie в группе eSe. Тогда существует $r_i \in S$ такой, что $a_i = r_ia_{n+1}$. Таким образом, в теории класса $\mathfrak{R}$ формула $\Theta(\bar{x})$ эквивалентна формуле $\bigwedge\limits_{i=0}^{n}(x_i = r_ix_{n+1})$, и формула $\exists x_1 \dots \exists x_n \Theta(\bar{x})$ эквивалентна формуле $x_0 = r_0x_{n+1}$.

Пусть $\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \rightleftharpoons \exists \bar{v}\Psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})$ — примитивная формула, где $\Psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})$ — конъюнкция атомарных формул. По доказанному выше если в формуле $\Psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})$ существует цепь из $\bar{x}(i)$ в $\bar{y}(j)$ для некоторых i и j, то существует $r \in S$ такой, что $\bar{x}(i) = r\bar{y}(j)$. Следовательно, в теории класса $\mathfrak{R}$ формула $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ эквивалентна формуле

$$\Phi_1(\bar{x}) \wedge \Phi_2(\bar{y}) \wedge \bigwedge_{i\in I}(\bar{x}(i) = r_{j(i)}\bar{y}(j(i))), \tag{2}$$

где $\Phi_1(\bar{x})$, $\Phi_2(\bar{y})$ — примитивные формулы, $r_{j(i)} \in S$ $(i \in I)$, I — некоторое множество индексов.

Предположим, что формула $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$, где $l(\bar{x}) = l(\bar{y})$, эквивалентная формуле (2), определяет примитивную эквивалентность α на множестве $X = \operatorname{dom}\alpha$ и формула $\bar{x}(i) = r\bar{y}(j)$ является конъюнктивным сомножителем формулы (2). Пусть $\bar{a}, \bar{b} \in \mathscr{C}$ такие, что $\bar{a}\alpha\bar{b}$. Тогда $\bar{a}(i) = r\bar{b}(j)$. Так как $\bar{b}\alpha\bar{b}$, то $\bar{b}(i) = r\bar{b}(j)$, т. е. $\bar{a}(i) = \bar{b}(i)$. Аналогично $\bar{a}(j) = \bar{b}(j)$. Следовательно, $\bar{b}\alpha\bar{a}$ тогда и только тогда, когда $\bar{a}(i) = \bar{b}(i)$ и $\bar{a}(j(i)) = \bar{b}(j(i))$ для любого $i \in I$. Тогда Δ-примитивная эквивалентность является примитивной эквивалентностью. Более того, обобщенно примитивные копии являются примитивными копиями.

Пусть $\bar{c}, \bar{d} \in \mathscr{C}$. Тогда формула

$$\Theta(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{c}, \bar{d}) \rightleftharpoons \bigwedge_{j\notin I}\bar{x}_1(j) = \bar{x}_2(j) \wedge \bigwedge_{i\in I}\bar{x}_1(i) = r_{j(i))}\bar{c}(j(i)) \wedge \bigwedge_{i\in I}\bar{x}_2(i) = r_{j(i))}\bar{d}(j(i))$$

связывает примитивные копии $\Phi(\mathscr{C}, \bar{c})$ и $\Phi(\mathscr{C}, \bar{d})$.

Следствие [4]. *Если S — коммутативный моноид и класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов аксиоматизируем, то $\mathfrak{R}$ примитивно связен в том и только том случае, когда полугруппа R является абелевой группой.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Степанова А. А.* Аксиоматизируемость и модельная полнота класса регулярных полигонов // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 181–193.

2. *Палютин Е. А.* Примитивно связные теории // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 2. С. 145–169.

3. *Степанова А. А.* Примитивно связные и аддитивные теории полигонов // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 3. С. 300–313.

4. *Stepanova A. A.* Characterization of commutative monoids by primitive connected regular acts // Алгебра и математическая логика: Материалы междунар. конф. Казань: КФУ, 2011. P. 235–236.

5. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V.* Monoids, acts and categories. Berlin; New York: Walter De Gruyter, 2000.

Статья поступила 24 апреля 2013 г.

Степанова Алена Андреевна
Дальневосточный федеральный университет,
школа естественных наук,
ул. Суханова, 8, Владивосток 590000;
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, Владивосток 690041
stepltd@mail.primorye.ru