Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2014. Том 55, № 3

УДК 517.929.8

ПОВЕДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

М. С. Сгибнев

Аннотация. Получено асимптотическое разложение для решения неоднородного матричного дифференциально-разностного уравнения, принадлежащего к запаздывающему или нейтральному типу. Рассмотрен случай неограниченных запаздываний. Учтено влияние корней характеристического уравнения. Установлена точная асимптотика остатка в зависимости от асимптотических свойств свободного матричного члена уравнения.

Ключевые слова: матричное дифференциально-разностное уравнение, уравнение запаздывающего типа, уравнение нейтрального типа, неограниченное запаздывание, асимптотическое поведение, характеристическое уравнение.

§ 1. Введение

Настоящая работа является продолжением [1]. Наша цель состоит в том, чтобы исследовать асимптотическое поведение решения *матричного* дифференциально-разностного уравнения, допускающего *неограниченные* запаздывания. Рассмотрим систему дифференциально-разностных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty X'_{jm}(t-u)\,M_{ij}(du)+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty X_{jm}(t-u)\,N_{ij}(du)=F_{im}(t),\quad t>0,\tag{1}$$

$i=1,\dots,n$, $m=1,\dots,m_1$, где $X_{im}(t)$, $t>0$, — неизвестные функции, M_{ij}, N_{ij} — известные комплекснозначные меры, сосредоточенные на $[0,\infty)$, и $F_{im}(t)$, $t>0$, — известные комплексные измеримые функции. Запишем систему (1) в матричном виде

$$\int\limits_0^\infty \boldsymbol{M}(du)\,\boldsymbol{X}'(t-u)+\int\limits_0^\infty \boldsymbol{N}(du)\,\boldsymbol{X}(t-u)=\boldsymbol{F}(t),\quad t>0,\tag{2}$$

где $\boldsymbol{M}:=(M_{ij})$, $\boldsymbol{N}:=(N_{ij})$ — матрицы размера $n\times n$, а $\boldsymbol{X}(t):=(X_{im}(t))$, $\boldsymbol{F}(t):=(F_{im}(t))$ — матрицы размера $n\times m_1$, общим элементом матрицы $\int\limits_0^\infty \boldsymbol{N}(du)\,\boldsymbol{X}(t-u)$ служит сумма $\sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty X_{jm}(t-u)\,N_{ij}(du)$. Зададим начальное условие в виде

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{G}(t)=(G_{im}(t)),\quad t\in(-\infty,0],\tag{3}$$

где функции $G_{im}(t)$ абсолютно непрерывны на любом отрезке $[a,b]\subset(-\infty,0]$.

Условимся о том, что операции перехода к пределу, дифференцирования, интегрирования и др. осуществляются над матрицами поэлементно, например $\boldsymbol{X}'(t) := (X'_{im}(t))$, $|\boldsymbol{M}| := (|M_{ij}|)$; аналогичное соглашение относится к неравенствам и теоретико-множественным операциям, в которых участвуют матрицы. Единичную матрицу размера $n \times n$ обозначим через $\boldsymbol{I}$, а нулевую матрицу произвольного размера — через $\mathbf{0}$.

Беря в качестве образцов классификации скалярных дифференциально-разностных уравнений приведенные в монографиях [2; 3, гл. 1, § 1.2, 1.7], дадим соответствующую классификацию для уравнений вида (2) (см. также [1, определение 2]).

Определение 1. Уравнение вида (2) называется *уравнением запаздывающего типа*, если $\boldsymbol{M}(\{0\}) \neq \mathbf{0}$ и сужение $\boldsymbol{M}_0 := \boldsymbol{M}|_{(0,\infty)}$ матричной меры $\boldsymbol{M}$ на $(0,\infty)$ равно $\mathbf{0}$, *уравнением нейтрального типа*, если $\boldsymbol{M}(\{0\}) \neq \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{M}_0 \neq \mathbf{0}$, *уравнением опережающего типа*, если $\boldsymbol{M}(\{0\}) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{M}_0 \neq \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{N}(\{0\}) \neq \mathbf{0}$.

Предполагается, что матричная мера $\boldsymbol{M}$ такова, что скалярная матрица $\boldsymbol{M}(\{0\})$ обратима. Не ограничивая общности, можно считать, что $\boldsymbol{M}(\{0\}) = \boldsymbol{I}$ (в противном случае достаточно умножить слева обе части уравнения (2) на обратную матрицу $\boldsymbol{M}^{-1}(\{0\})$). Итак, рассматриваем дифференциально-разностные уравнения (2) запаздывающего и нейтрального типов.

Определение 2. Матричная функция $\boldsymbol{X}(t)$, $t \in (-\infty,\infty)$, называется *решением задачи* (2), (3), если она абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a,b] \subset (-\infty,\infty)$ и $\boldsymbol{X}(t)$ удовлетворяет уравнению (2) п. в. и начальному условию (3).

Работа посвящена исследованию асимптотического поведения при $t \to \infty$ решения $\boldsymbol{X}(t)$ уравнения (2), в котором матричная мера $\boldsymbol{M}$ удовлетворяет весьма общему условию ($\mathfrak{S}$) (см. начало § 4). Устанавливается разложение

$$\boldsymbol{X}(t) = \sum_{j=1}^{l} \boldsymbol{P}_j(t) e^{-s_j t} + \boldsymbol{r}(t),$$

где s_j, $j = 1,\dots,l$, — корни характеристического уравнения (5), $\boldsymbol{P}_j(t)$, $j = 1,\dots,l$, — однозначно определяемые матрицы полиномов, степени которых меньше, чем кратности соответствующих корней s_j, а остаток $\boldsymbol{r}(t)$ «наследует» асимптотические свойства исходной матричной функции $\boldsymbol{F}(t)$ в следующем смысле. Если для некоторой подходящей функции сравнения $\sigma(t)$ существует предел $\mathscr{L}(\boldsymbol{F}) := \lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{F}(t)/\sigma(t)$, то будет существовать и предел $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{r}(t)/\sigma(t)$, который может быть выражен в явном виде через матрицу $\mathscr{L}(\boldsymbol{F})$. В связи с изучаемой тематикой следует отметить работы [4, 5], в которых рассматривались близкие дифференциально-разностные уравнения нейтрального типа и были получены неулучшаемые оценки норм решений в пространствах Соболева, а также монографическую статью [6], где изложена теория функционально-дифференциальных уравнений в этих пространствах. В § 2 выводится характеристическое уравнение для уравнения (2) и приводится конкретный вид искомого асимптотического разложения для решения уравнения (2). В § 3 дается краткое описание банаховых алгебр функций с одинаковой асимптотикой на бесконечности. В § 4 формулируется и доказывается основной результат (см. теорему 1). В § 5 даны доказательства лемм.

§ 2. Характеристическое уравнение

Обозначим через $\widehat{\boldsymbol{F}}(s)$ преобразование Лапласа матричной функции $\boldsymbol{F}(t)$:

$$\widehat{\boldsymbol{F}}(s) := \int_0^\infty e^{st}\boldsymbol{F}(t)\,dt = \left(\int_0^\infty e^{st}F_{im}(t)\,dt\right), \quad s \in \Pi(\gamma) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\zeta \le \gamma\}.$$

Для произвольной комплекснозначной меры ν определим ее преобразование Лапласа по формуле $\widehat{\nu}(s) := \int_{\mathbb{R}} e^{sx}\,\nu(dx)$ для тех значений $s \in \mathbb{C}$, при которых данный интеграл сходится абсолютно относительно полной вариации $|\nu|$ меры ν. Пусть $g(t)$, $t \ge 0$, — комплексная измеримая функция и μ — σ-конечная комплекснозначная мера на $[0,\infty)$. Определим их свертку

$$g * \mu(x) := \int_0^x g(x-y)\,\mu(dy), \quad x \ge 0.$$

Тогда $\widehat{g*\mu}(s) = \hat{g}(s)\hat{\mu}(s)$ для соответствующих значений $s \in \mathbb{C}$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что все элементы матриц

$$\int_0^\infty e^{\xi t}\,|\boldsymbol{M}|(dt), \quad \int_0^\infty e^{\gamma t}|\boldsymbol{F}(t)|\,dt, \quad \int_{-\infty}^0 e^{\gamma t}|\boldsymbol{G}(t)|\,dt$$

конечны для некоторых $\xi > \gamma \in \mathbb{R}$ и аналогично для $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{G}'$. Выпишем характеристическое уравнение для уравнения (2). Допустим, что уравнение (2) имеет решение $\boldsymbol{X}(t)$, суммируемое с весовой функцией $\exp(\gamma_1 t)$, $t \ge 0$, при некотором $\gamma_1 \le \gamma$:

$$\int_0^\infty e^{\gamma_1 t}|\boldsymbol{X}(t)|\,dt < \infty.$$

Потребуем, чтобы $\boldsymbol{X}(t)e^{\gamma_1 t} \to \boldsymbol{0}$ при $t \to \infty$. Условия теоремы 1 (см. § 4) обеспечивают выполнение этих соотношений. Обозначим

$$\boldsymbol{F}_1(t) := \boldsymbol{1}_{[0,\infty)}(t)\left[\int_t^\infty \boldsymbol{M}(du)\,\boldsymbol{G}'(t-u) + \int_t^\infty \boldsymbol{N}(du)\,\boldsymbol{G}(t-u)\right]$$

($\boldsymbol{1}_A(x)$ — индикаторная функция множества A). Полагая в лемме 3 (см. § 4) $\varphi(t) := e^{\gamma t}$, имеем $\int_0^\infty e^{\gamma t}|\boldsymbol{F}_1(t)|\,dt < \infty$. Перепишем уравнение (2) в виде

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \boldsymbol{M}(du)\,\boldsymbol{X}'(t-u) + \int_0^\infty \boldsymbol{N}(du)\,\boldsymbol{X}(t-u)\\
= \int_0^t \boldsymbol{M}(du)\,\boldsymbol{X}'(t-u) + \int_0^t \boldsymbol{N}(du)\,\boldsymbol{X}(t-u) + \int_t^\infty \boldsymbol{M}(du)\,\boldsymbol{G}'(t-u) + \int_t^\infty \boldsymbol{N}(du)\,\boldsymbol{G}(t-u)\\
= \boldsymbol{M} * \boldsymbol{X}'(t) + \boldsymbol{N} * \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{F}_1(t) = \boldsymbol{F}(t).\end{aligned}$$

Переходя к преобразованиям Лапласа и учитывая равенство

$$(\boldsymbol{X}')^\wedge(s) := \int_0^\infty e^{st}\boldsymbol{X}'(t)\,dt = -s\int_0^\infty e^{st}\boldsymbol{X}(t)\,dt - \boldsymbol{X}(0) =: -s\widehat{\boldsymbol{X}}(s) - \boldsymbol{X}(0),$$

получаем

$$[\widehat{\boldsymbol{N}}(s) - s\widehat{\boldsymbol{M}}(s)]\widehat{\boldsymbol{X}}(s) = \widehat{\boldsymbol{F}}(s) - \widehat{\boldsymbol{F}}_1(s) + \widehat{\boldsymbol{M}}(s)\boldsymbol{G}(0), \quad s \in \Pi(\gamma_1),$$

$$\widehat{\boldsymbol{X}}(s) = [\widehat{\boldsymbol{N}}(s) - s\widehat{\boldsymbol{M}}(s)]^{-1}[\widehat{\boldsymbol{F}}(s) - \widehat{\boldsymbol{F}}_1(s) + \widehat{\boldsymbol{M}}(s)\boldsymbol{G}(0)]. \tag{4}$$

Правая часть равенства (4) определена в точках полуплоскости $\Pi(\gamma)$, в которых $\det[\widehat{\boldsymbol{N}}(s) - s\widehat{\boldsymbol{M}}(s)]$ не обращается в нуль. Назовем уравнение

$$\det[\widehat{\boldsymbol{N}}(s) - s\widehat{\boldsymbol{M}}(s)] = 0 \tag{5}$$

характеристическим уравнением для (2). Корни уравнения (5) существенным образом влияют на асимптотику решения $\boldsymbol{X}(t)$. Будем предполагать, что множество $\mathscr{Z} = \{s_1, s_2, \dots, s_l\}$ корней характеристического уравнения, лежащих в полуплоскости $\Pi(\gamma)$, *конечно* и что $\operatorname{Re} s_j < \gamma$, $j = 1, \dots, l$. Не исключаем случая $\mathscr{Z} = \varnothing$. *Кратностью корня* s_j уравнения (5) называется положительное целое число m_j такое, что $\det[\widehat{\boldsymbol{N}}(s) - s\widehat{\boldsymbol{M}}(s)] = (s - s_j)^{m_j} g_j(s)$, $g_j(s_j) \neq 0$. Обозначим через

$$\sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k \frac{\boldsymbol{b}_{jk}}{(s - s_j)^k}$$

главную часть разложения в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки $s = s_j \in \mathscr{Z}$ матричной аналитической функции

$$[\widehat{\boldsymbol{N}}(s) - s\widehat{\boldsymbol{M}}(s)]^{-1}[\widehat{\boldsymbol{F}}(s) - \widehat{\boldsymbol{F}}_1(s) + \widehat{\boldsymbol{M}}(s)\boldsymbol{G}(0)].$$

Пусть $\mathscr{E}_j$ — комплекснозначная мера с плотностью $\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)e^{-s_j x}$, преобразование Лапласа этой меры равно $\widehat{\mathscr{E}}_j(s) = 1/(s_j - s)$, $\operatorname{Re}(s - s_j) < 0$. Определим по индукции k-кратную свертку $\mathscr{E}_j^{k*}$ меры $\mathscr{E}_j$: $\mathscr{E}_j^{1*} := \mathscr{E}_j$, $\mathscr{E}_j^{(k+1)*} := \mathscr{E}_j^{k*} * \mathscr{E}_j$, $k \geq 1$. Функция $\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)x^{k-1}e^{-s_j x}/(k-1)!$ равна плотности меры $\mathscr{E}_j^{k*}$. Выражение

$$\widehat{\boldsymbol{X}}(s) - \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k \frac{\boldsymbol{b}_{jk}}{(s - s_j)^k}$$

представляет собой преобразование Лапласа $\hat{\boldsymbol{r}}(s)$ некоторой матричной функции $\boldsymbol{r}(t)$ — остатка искомого асимптотического разложения, которое будет выглядеть следующим образом:

$$\boldsymbol{X}(t) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m_j} \boldsymbol{b}_{jk} \frac{t^{k-1}e^{-s_j t}}{(k-1)!} + \boldsymbol{r}(t). \tag{6}$$

§ 3. Банаховы алгебры функций

Опишем вкратце класс функций, в терминах которых будут выражаться асимптотические свойства исходной матричной функции $\boldsymbol{F}(t)$ и остатка $\boldsymbol{r}(t)$; подробное изложение данного материала приведено в [1, § 3]. Для полумультипликативной функции $\varphi(x)$ на $[0, \infty)$ ($\varphi(0) = 1$, $\varphi(x + y) \leq \varphi(x)\,\varphi(y)$) имеют место соотношения [7, теорема 7.6.1]

$$\gamma := \gamma(\varphi) := \lim_{x\to\infty} \frac{\ln \varphi(x)}{x} = \inf_{x>0} \frac{\ln \varphi(x)}{x} < \infty. \tag{7}$$

Полумультипликативные функции, определенные на $\mathbb{R}$, обладают следующим свойством (см. [7, теорема 7.4.1]):

$$M_\varphi := \sup_{|x|\le 1} \varphi(x) < \infty. \tag{8}$$

Обозначим через $\widetilde{S}_{\varphi+}$ полное нормированное кольцо всех измеримых комплекснозначных функций $f(x)$, $x \ge 0$, таких, что

$$\|f\|_\varphi = \int_0^\infty |f(x)|\varphi(x)\,dx < \infty;$$

под умножением двух элементов $f, g \in \widetilde{S}_{\varphi+}$ понимается их свертка $f * g(x)$. Будем отождествлять произвольную абсолютно непрерывную меру f на $[0,\infty)$ с классом эквивалентных функций $f(x)$, $x \ge 0$, каждая из которых может рассматриваться как производная Радона — Никодима этой меры относительно меры Лебега на $[0,\infty)$. Через $S_{\varphi+}$ обозначим банахову алгебру, полученную из $\widetilde{S}_{\varphi+}$ присоединением единицы δ_0 (атомическая мера массы 1, сосредоточенная в 0). Будем использовать соглашение: если $f = \alpha\delta_0 + f_1(x) \in S_{\varphi+}$, то $f(dx) := \alpha\delta_0(dx) + f_1(x)\,dx$. Преобразование Лапласа $\hat{f}(s)$ элемента $f = \alpha\delta_0 + f_1(x) \in S_{\varphi+}$ равно

$$\hat{f}(s) = \alpha + \int_0^\infty e^{sx} f_1(x)\,dx = \int_0^\infty e^{sx}\, f(dx).$$

Пусть $\tau(x)$, $x \ge 0$, — ограниченная измеримая по Борелю положительная функция такая, что

$$\lim_{x\to\infty} \{\tau(x)\}^{1/x} = 1, \quad M_\tau := \sup_{x\ge 0, |y|\le 1} \frac{\tau(x)}{\tau(x-y)} < \infty, \tag{9}$$

где $\tau(x) := \tau(0)$, $x < 0$. Для $f \in \widetilde{S}_{\varphi+}$ положим

$$P_\tau(f) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\ge 0} \frac{|f(x)|\varphi(x)}{\tau(x)}.$$

Обозначим

$$\widetilde{\mathscr{A}} = \widetilde{\mathscr{A}}(\varphi,\tau) := \{f \in \widetilde{S}_{\varphi+} : P_\tau(f) < \infty\},$$

$$\widetilde{\mathscr{A}_{\mathscr{L}}} = \widetilde{\mathscr{A}_{\mathscr{L}}}(\varphi,\tau) := \left\{ f \in \widetilde{\mathscr{A}} : \text{ существует } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)\varphi(x)}{\tau(x)} =: \mathscr{L}(f) \right\}.$$

Для $f \in \widetilde{\mathscr{A}}$ положим $\|f\|_{\varphi,\tau} := C\{\|f\|_\varphi + P_\tau(f)\}$. Совокупность $\widetilde{\mathscr{A}}$ — полное коммутативное нормированное кольцо без единицы относительно нормы $\|\cdot\|_{\varphi,\tau}$ при выполнении условия (11) в [1]. Будем предполагать, что $\widetilde{\mathscr{A}_{\mathscr{L}}}$ — замкнутое подкольцо нормированного кольца $\widetilde{\mathscr{A}}$ и выполняется соотношение

$$\mathscr{L}(f * g) = \mathscr{L}(f)\hat{g}(\gamma) + \mathscr{L}(g)\hat{f}(\gamma) \tag{10}$$

для любых $f, g \in \widetilde{\mathscr{A}_{\mathscr{L}}}$. При построении конкретных колец типа $\widetilde{\mathscr{A}_{\mathscr{L}}}$ важную роль играет условие

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)\tau(x-y)}{\varphi(x-y)\tau(x)} = \exp(\gamma y), \tag{11}$$

которое выполняется, если существует $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)\tau(x-y)/\{\varphi(x-y)\tau(x)\}$. Положительная функция $L(x)$, $x\ge 0$, называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если $L(tx)/L(x)\to 1$ при $x\to\infty$ и любом $t>0$ [8, § VIII.8]. Для наглядности можно представлять себе $\widetilde{\mathscr{A}_{\mathscr{L}}}$ как объект, образованный с показательной функцией в качестве $\varphi(x)$ и с правильно меняющейся функцией в качестве $\tau(x)$: $\varphi(x)=\exp(\gamma x)$ и $\tau(x)=x^{\alpha}L(x)$, где $\alpha\le -1$, а $L(x)$ медленно меняется на бесконечности. Через $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ будем обозначать банахову алгебру, полученную из $\widetilde{\mathscr{A}_{\mathscr{L}}}$ присоединением единицы δ_0.

Пусть $S(\varphi)$ — совокупность комплексных функций множества (мер) ν, определенных и σ-аддитивных на всех ограниченных борелевских подмножествах $[0,\infty)$, таких, что

$$\|\nu\|_{\varphi}=\int\limits_0^{\infty}\varphi(x)\,|\nu|(dx)<\infty,$$

где $|\nu|$ — полная вариация меры ν. *Сверткой* σ-конечных мер ν и $\varkappa$, сосредоточенных на $[0,\infty)$, называется мера

$$\nu*\varkappa(A):=\iint\limits_{\{x+y\in A\}}\nu(dx)\,\varkappa(dy)=\int\limits_0^{\infty}\nu(A-y)\,\varkappa(dy)=\int\limits_0^{\infty}\varkappa(A-y)\,\nu(dy),$$

здесь A — произвольное ограниченное борелевское подмножество $[0,\infty)$ и $A-y=\{x\in\mathbb{R}: x+y\in A\}$. Совокупность $S(\varphi)$ — коммутативная комплексная банахова алгебра относительно нормы $\|\cdot\|_{\varphi}$ и свертки мер в качестве операции умножения, единицей в $S(\varphi)$ служит мера δ_0 (см. [7, § 4.16]). Положим

$$T(s_0)f(x):=\int\limits_x^{\infty}e^{-s_0(x-y)}\,f(dy),\quad x\ge 0,$$

где $f\in S_{\varphi+}$ и $\operatorname{Re}s_0<\gamma$. Тогда (см. [1, теорема 2, замечание 4])

$$T(s_0)f\in\widetilde{S}_{\varphi+},\quad \{T(s_0)f\}^{\wedge}(s)=\frac{\hat f(s)-\hat f(s_0)}{s-s_0},\quad s\in\Pi(\gamma).$$

§ 4. Основной результат

Для произвольной меры μ обозначим через μ_c ее абсолютно непрерывную компоненту относительно меры Лебега, а через μ_s — ее сингулярную часть: $\mu_s:=\mu-\mu_c$, т. е. $\mu_s=\mu_{\mathfrak{d}}+\mu_{\mathfrak{s}}$, где $\mu_{\mathfrak{d}}$ — дискретная компонента меры μ, а $\mu_{\mathfrak{s}}$ — ее сингулярная компонента в обычном смысле. Пусть $\boldsymbol{A}$ — числовая матрица размера $n\times n$ и $\sigma(\boldsymbol{A})$ — совокупность всех ее собственных значений. Число $\varrho(\boldsymbol{A}):=\max\{|\lambda|\colon\lambda\in\sigma(\boldsymbol{A})\}$ называется *спектральным радиусом* матрицы $\boldsymbol{A}$. Нам потребуется следующее условие, относящееся к сингулярности матричной меры $\boldsymbol{M}$:

$$\varrho\left[\int\limits_0^{\infty}e^{\gamma x}\,|(\boldsymbol{M}_0)_s|(dx)\right]<1. \tag{$\mathfrak{S}$}$$

В рассматриваемом случае, когда $\boldsymbol{M}(\{0\})=\boldsymbol{I}$, условие ($\mathfrak{S}$) выражает собой в определенном смысле доминирование производных с аргументом без запаздывания над совокупным вкладом в уравнение (2) производных с запаздывающими аргументами. Уравнения (2) запаздывающего типа автоматически удовлетворяют условию ($\mathfrak{S}$), так как в этом случае $\boldsymbol{M}_0 = \mathbf{0}$. Условие ($\mathfrak{S}$), таким образом, налагает ограничения только на уравнения нейтрального типа. Заметим также, что если матричная мера $\boldsymbol{M}_0$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, то условие ($\mathfrak{S}$) выполняется.

Нам понадобятся следующие леммы, доказательства которых будут проведены в § 5.

Лемма 1. *Пусть $\boldsymbol{A}(\theta)$ — скалярная матрица, элементы которой зависят от параметра $\theta \in \Theta$ и не превосходят по абсолютной величине соответствующих элементов скалярной матрицы $\boldsymbol{A}_0$: $\sup\limits_{\theta\in\Theta} |\boldsymbol{A}(\theta)| \le \boldsymbol{A}_0$. Предположим, что $\varrho(\boldsymbol{A}_0) < 1$. Тогда $\Delta = \inf\limits_{\theta\in\Theta} |\det[1 - \boldsymbol{A}(\theta)]| > 0$.*

Лемма 2. *Пусть $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ — σ-конечные комплекснозначные матричные меры на $[0, \infty)$ такие, что при некотором $\xi > \gamma$*

$$\int\limits_0^\infty e^{\xi x}\, |\boldsymbol{M}|(dx) < \infty, \quad \int\limits_0^\infty e^{\xi x}\, |\boldsymbol{N}|(dx) < \infty.$$

Предположим, что выполнено условие ($\mathfrak{S}$). Тогда множество корней характеристического уравнения (5), лежащих в полуплоскости $\Pi(\gamma)$, конечно.

Будем далее предполагать, что $\varphi(t)$, $t \ge 0$, — полумультипликативная функция такая, что $\varphi(t)/\exp(\gamma t)$, $t \ge 0$, — неубывающая функция, а функция $\tau(t)$ такова, что совокупность $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ — банахова подалгебра алгебры $\mathscr{A}$, для всех f, $g \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ справедливо равенство (10) и для любого $y \in \mathbb{R}$ существует предел (11).

Лемма 3. *Пусть функция $g(t)$, $t \le 0$, такова, что $\int\limits_{-\infty}^0 e^{\gamma t} |g(t)|\, dt < \infty$ при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$. Предположим, что μ — σ-конечная комплекснозначная мера, причем $\int\limits_0^\infty e^{\xi x}\, |\mu|(dx) < \infty$ для некоторого $\xi > \gamma$. Тогда сужение функции $\int\limits_t^\infty g(t-u)\, \mu(du)$ на $[0, \infty)$ принадлежит $\widetilde{S}_{\varphi+}$.*

Лемма 4. *Пусть $g \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ и μ — σ-конечная комплекснозначная мера на $[0, \infty)$ такая, что $\int\limits_0^\infty e^{\xi x} |\mu|(dx) < \infty$, где $\xi > \gamma$. Тогда функция $g * \mu(x)$, $x \ge 0$, — элемент банаховой алгебры $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ и $\mathscr{L}(g * \mu) = \mathscr{L}(g)\hat{\mu}(\gamma)$.*

Лемма 5. *Пусть μ — σ-конечная комплекснозначная мера на $[0, \infty)$ такая, что $\int\limits_0^\infty e^{\xi x}\, |\mu|(dx) < \infty$, где $\xi > \gamma$, и пусть функция $g(t)$, $t \in (-\infty, 0]$, обладает свойствами*

$$\int\limits_{-\infty}^0 e^{\gamma t} |g(t)|\, dt < \infty, \quad c(g) := \operatorname*{ess\,sup}_{x \le 0} e^{\gamma x} |g(x)| < \infty.$$

Тогда функция $\int\limits_t^\infty g(t-y)\, \mu(dy)$, $t \ge 0$, принадлежит банаховой алгебре $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ и

$$\mathscr{L}\left(\int\limits_t^\infty g(t-y)\, \mu(dy)\right) = 0.$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Предположим, что выполнено условие* $(\mathfrak{S})$. *Пусть* $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ — σ*-конечные комплекснозначные матричные меры на* $[0,\infty)$ *такие, что при некотором* $\xi > \gamma$

$$\int_0^\infty e^{\xi x}\,|\boldsymbol{M}|(dx) < \infty, \quad \int_0^\infty e^{\xi x}\,|\boldsymbol{N}|(dx) < \infty,$$

и пусть матричная функция $\boldsymbol{G}(t)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\int_{-\infty}^0 e^{\gamma t}|\boldsymbol{G}(t)|\,dt < \infty, \quad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{G}) := \operatorname*{ess\,sup}_{x\le 0} e^{\gamma x}|\boldsymbol{G}(x)| < \infty.$$

Предположим, что такие же неравенства выполняются для ее производной $\boldsymbol{G}'(t)$. *Допустим, что* $\boldsymbol{F} \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$, *т. е.* 1) $\operatorname*{ess\,sup}_{x\ge 0}|\boldsymbol{F}(x)|\varphi(x)/\tau(x) < \infty$ *и* 2) *существует предел* $\mathscr{L}(\boldsymbol{F}) = \lim_{x\to\infty}\boldsymbol{F}(x)\varphi(x)/\tau(x)$. *Тогда для решения* $\boldsymbol{X}(t)$ *уравнения* (2) *с начальным условием* (3) *справедливо разложение* (6), *в котором остаток* $\boldsymbol{r}$ *принадлежит* $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$, *т. е.* $\operatorname*{ess\,sup}_{x\ge 0}|\boldsymbol{r}(x)|\varphi(x)/\tau(x) < \infty$ *и существует предел* $\mathscr{L}(\boldsymbol{r})$, *причем*

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{r}) := (\mathscr{L}(r_{ij})) = \lim_{t\to\infty}\frac{\boldsymbol{r}(t)\varphi(t)}{\tau(t)} = [\widehat{\boldsymbol{N}}(\gamma) - \gamma\widehat{\boldsymbol{M}}(\gamma)]^{-1}\mathscr{L}(\boldsymbol{F}).$$

Доказательство. Известно (см. [9, § 7.2]), что собственные значения матрицы непрерывно зависят от ее элементов. Следовательно, спектральный радиус матрицы также непрерывно зависит от ее элементов. Поэтому в силу непрерывности преобразования Лапласа отсюда вытекает, что условие $(\mathfrak{S})$ справедливо при замене γ на $\gamma_2 > \gamma$, достаточно близкое к γ. По лемме 2 множество $\mathscr{Z}_2 \supseteq \mathscr{Z}$ корней характеристического уравнения (5), лежащих в полуплоскости $\Pi(\gamma_2)$, конечно. Уменьшая γ_2, можно добиться того, что $\mathscr{Z}_2 = \mathscr{Z}$ при $\gamma_2 > \gamma$. Выберем $\sigma > \gamma_2$. Положим $p := \sum_{j=1}^{l} m_j$ и

$$v(s) := \frac{\det[\widehat{\boldsymbol{N}}(s) - s\widehat{\boldsymbol{M}}(s)](s-\sigma)^p}{(s-\sigma)^n\prod_{j=1}^{l}(s-s_j)^{m_j}}, \quad s \in \Pi(\gamma_2),$$

доопределив значения функции $v(s)$ в точках $s_1,\dots,s_l$ по непрерывности. Положим $\varphi_1(x) := \exp(\gamma_2 x)$, $x \ge 0$. Пусть $\mathscr{E}_\sigma$ — мера с плотностью $\mathscr{E}_\sigma(t) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t)e^{-\sigma t}$. Очевидно, что $\mathscr{E}_\sigma \in S(\varphi_1)$ (см. (7)). Покажем, что функция $v(s)$, $s \in \Pi(\gamma_2)$, — преобразование Лапласа $\widehat{V}(s)$ некоторой меры $V \in S(\varphi_1)$. Сначала рассмотрим функцию

$$u(s) := \frac{\det[\widehat{\boldsymbol{N}}(s) - s\widehat{\boldsymbol{M}}(s)]}{(s-\sigma)^n}.$$

Функция $\det[\widehat{\boldsymbol{N}}(s) - s\widehat{\boldsymbol{M}}(s)]$ равна линейной комбинации произведений вида

$$[\widehat{N}_{1j_1}(s) - s\widehat{M}_{1j_1}(s)][\widehat{N}_{2j_2}(s) - s\widehat{M}_{2j_2}(s)]\dots[\widehat{N}_{nj_n}(s) - s\widehat{M}_{nj_n}(s)],$$

здесь $j_1 j_2 \dots j_n$ — перестановка чисел $1, 2, \dots, n$. Такое произведение можно представить в виде суммы $\sum\limits_{m=0}^{n} s^m q_m(s)$, где $q_m(s)$ — конечная сумма произведений m сомножителей вида $\widehat{M}_{ij}(s)$ и $n-m$ сомножителей вида $\widehat{N}_{ij}(s)$. Таким образом, $q_m(s)$ — преобразование Лапласа $\widehat{Q}_m(s)$ некоторой меры $Q_m \in S(\varphi_1)$. Разлагая рациональную функцию $s^m/(s-\sigma)^n$ на простые дроби, получаем

$$\frac{1}{(s-\sigma)^n} \sum_{m=0}^{n} s^m q_m(s) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{\sigma^{m-k} q_m(s)}{(s-\sigma)^{n-k}}.$$

Отсюда вытекает, что левая часть этого равенства представляет собой преобразование Лапласа меры

$$\sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{n-k} \sigma^{m-k} Q_m * \mathscr{E}_\sigma^{(n-k)*},$$

принадлежащей банаховой алгебре $S(\varphi_1)$. Поскольку $u(s)$ — линейная комбинация преобразований Лапласа таких мер, очевидно, что $u(s)$, $s \in \Pi(\gamma_2)$, — преобразование Лапласа $\widehat{U}(s)$ меры $U \in S(\varphi_1)$.

Снова разлагая рациональную функцию на простые дроби, получаем

$$v(s) = u(s) \frac{(s-\sigma)^p}{\prod\limits_{j=1}^{l} (s-s_j)^{m_j}} = u(s) \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{jk}}{(s-s_j)^k} \right\},$$

где c_{jk} — константы. Согласно лемме 2 из [1] выражение $u(s)/(s-s_j)^k$ является преобразованием Лапласа абсолютно непрерывной меры $T(s_j)^k U$, принадлежащей банаховой алгебре $S(\varphi_1)$. Подытоживая, видим, что $v(s) = \widehat{V}(s)$, где $V \in S(\varphi_1)$. Меру V можно представить в виде $V = U + V_1$, где мера V_1 абсолютно непрерывна. Покажем, что элемент V обратим в $S(\varphi_1)$, т. е. найдется элемент $V^{-1} \in S(\varphi_1)$ такой, что $V * V^{-1} = \delta_0$. Пусть $\mathscr{M}$ — пространство максимальных идеалов алгебры $S(\varphi_1)$. Из теории банаховых алгебр (нормированных колец) известны следующие факты [10]. Каждый максимальный идеал $M \in \mathscr{M}$ порождает некоторый гомоморфизм $h : S(\varphi_1) \to \mathbb{C}$, и M — ядро этого гомоморфизма. Обозначим через $\nu(M)$ значение h на $\nu \in S(\varphi_1)$. Элемент $\nu \in S(\varphi_1)$ имеет обратный тогда и только тогда, когда ν не принадлежит никакому максимальному идеалу $M \in \mathscr{M}$. Иными словами, ν обратим тогда и только тогда, когда $\nu(M) \neq 0$ при любом $M \in \mathscr{M}$.

Пространство $\mathscr{M}$ разбивается на два множества: $\mathscr{M}_1$ — множество максимальных идеалов, не содержащих совокупности $L(\varphi_1)$ всех абсолютно непрерывных мер из $S(\varphi_1)$, и $\mathscr{M}_2 = \mathscr{M} \setminus \mathscr{M}_1$. Если $M \in \mathscr{M}_1$, то порожденный им гомоморфизм имеет вид $h(\nu) = \hat{\nu}(s_0)$, где $s_0 \in \Pi(\gamma_2)$. В этом случае $M = \{\nu \in S(\varphi_1) : \hat{\nu}(s_0) = 0\}$ [7, гл. IV, § 4]. Если $M \in \mathscr{M}_2$, то $\nu(M) = 0$ для любого $\nu \in L(\varphi_1)$. Пусть M_0 — максимальный идеал в $S(\varphi_1)$ такой, что соответствующий ему гомоморфизм имеет вид $h(\nu) = \nu(\{0\})$, $\nu \in S(\varphi_1)$. Положим $\mathscr{M}_3 = \mathscr{M}_2 \setminus \{M_0\}$. Покажем, что $V(M) \neq 0$ для любого $M \in \mathscr{M}$, тем самым установим существование обратного элемента $V^{-1} \in S(\varphi_1)$. Если $M \in \mathscr{M}_1$, то при некотором $s_0 \in \Pi(\gamma_2)$ имеем $V(M) = \widehat{V}(s_0) \neq 0$ по построению. Для M_0

$$V(M_0) = U(M_0) = U(\{0\}) = \lim_{s \to -\infty} u(s) = \lim_{s \to -\infty} \det \left[\frac{\widehat{\boldsymbol{N}}(s)}{s-\sigma} - \frac{s\widehat{\boldsymbol{M}}(s)}{s-\sigma} \right]$$
$$= (-1)^n \det[\lim_{s \to -\infty} \widehat{\boldsymbol{M}}(s)] = (-1)^n \det[\boldsymbol{M}(\{0\})] = (-1)^n \det \boldsymbol{I} = (-1)^n \neq 0.$$

Пусть $M \in \mathscr{M}_3$. Очевидно, что $V(M) = U(M)$. Рассмотрим матрицу $\widehat{\boldsymbol{P}}(s) := [\widehat{\boldsymbol{N}}(s) - s\widehat{\boldsymbol{M}}(s)]/(s-\sigma)$, являющуюся преобразованием Лапласа матричной меры $\boldsymbol{P} = (\sigma\boldsymbol{M} - \boldsymbol{N}) * \mathscr{E}_\sigma - \boldsymbol{M} \in S(\varphi_1)$, и $\det\widehat{\boldsymbol{P}}(s) = u(s)$. Очевидно, что $\boldsymbol{P}(M) = -\boldsymbol{M}(M)$ и, следовательно, $U(M) = \det\boldsymbol{P}(M) = (-1)^n \det\boldsymbol{M}(M)$. По теореме о строении произвольного гомоморфизма $h : S(\varphi_1) \to \mathbb{C}$ (см. [11, теорема 1, замечание 3])

$$h(\nu) = \int\limits_0^\infty \chi(x,\nu)\exp(\beta x)\,\nu(dx), \quad \nu \in S(\varphi_1), \tag{12}$$

где β — вещественное число такое, что $\beta \le \gamma$, а функция $\chi(x,\nu)$ двух переменных $x \in [0,\infty)$ и $\nu \in S(\varphi_1)$ — обобщенный характер, из свойств которого нам потребуется лишь следующее: $|\nu|\text{-}\operatorname{ess\,sup}\limits_{x\in[0,\infty)} |\chi(x,\nu)| \le 1$. Справедливы очевидные равенства

$$\boldsymbol{M}(M) = [\boldsymbol{M}(\{0\})\delta_0 + \boldsymbol{M}_0](M) = \boldsymbol{M}(\{0\}) + \boldsymbol{M}_0(M) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{M}_0(M).$$

Покажем, что $\varrho[\boldsymbol{M}_0(M)] < 1$, откуда будет вытекать, что матрица $\boldsymbol{M}(M)$ обратима, т. е. $\det\boldsymbol{M}(M) \ne 0$. Имеем (см. (12))

$$\boldsymbol{M}_0(M) = (\boldsymbol{M}_0)_s(M) = \left(\int\limits_0^\infty \chi(x,[(\boldsymbol{M}_0)_{ij}]_s)\exp(\beta x)[(\boldsymbol{M}_0)_{ij}]_s(dx)\right).$$

Матрица справа по модулю не превосходит матрицы $\int\limits_0^\infty e^{\gamma_2 x}|(\boldsymbol{M}_0)_s|(dx)$, которую обозначим через $\boldsymbol{C}$. Поэтому $\varrho[\boldsymbol{M}_0(M)] \le \varrho(\boldsymbol{C}) < 1$ согласно теореме 8.1.18 из [12] и условию $(\mathfrak{S})$, которое выполняется, если заменить γ на γ_2, достаточно близкое к γ. Неравенство $\varrho[\boldsymbol{M}_0(M)] < 1$ установлено. Таким образом, $V(M) \ne 0$ для любого $M \in \mathscr{M}_3$, и по доказанному ранее $V(M) \ne 0$ при всех $M \in \mathscr{M}$. Обратимость элемента $V \in S(\varphi_1)$ установлена.

Рассмотрим вспомогательную матрицу

$$\mathfrak{q}(s) := \frac{\prod\limits_{j=1}^{l}(s-s_j)^{m_j}}{(s-\sigma)^p}[\widehat{\boldsymbol{N}}(s) - s\widehat{\boldsymbol{M}}(s)]^{-1}, \quad s \in \Pi(\gamma) \setminus \mathscr{Z}. \tag{13}$$

Покажем, что она является матрицей преобразований Лапласа некоторой матрицы $\mathfrak{Q}$ мер из $S(\varphi_1)$. Присоединенная матрица $\widehat{\boldsymbol{P}}(s)^\vee$ является матрицей преобразований Лапласа для некоторой матрицы, скажем $\mathfrak{D}$, мер из $S(\varphi_1)$. Воспользуемся очевидным равенством

$$[\widehat{\boldsymbol{N}}(s) - s\widehat{\boldsymbol{M}}(s)]^{-1} = \frac{1}{s-\sigma}\left[\frac{\widehat{\boldsymbol{N}}(s) - s\widehat{\boldsymbol{M}}(s)}{s-\sigma}\right]^{-1}$$

и представим $\mathfrak{q}(s)$ в виде

$$\mathfrak{q}(s) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{l}(s-s_j)^{m_j}}{(s-\sigma)^p}\frac{1}{s-\sigma}\frac{\widehat{\boldsymbol{P}}(s)^\vee}{\det\widehat{\boldsymbol{P}}(s)}.$$

Поскольку $\det\widehat{\boldsymbol{P}}(s) = u(s)$, имеем

$$\mathfrak{q}(s) = \frac{1}{s-\sigma}\frac{\widehat{\boldsymbol{P}}(s)^\vee}{v(s)}.$$

Таким образом, $\mathfrak{q}(s)$ — матрица преобразований Лапласа для матрицы мер

$$\mathfrak{Q} = (\mathfrak{Q}_{ij}) := -\mathscr{E}_\sigma * V^{-1} * \mathfrak{D} \in S(\varphi_1). \tag{14}$$

Более того, $\mathfrak{Q} \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ и $\mathscr{L}(\mathfrak{Q}) = \mathbf{0}$. Действительно, по лемме 3 в [1] $\mathscr{E}_\sigma \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ и $\mathscr{L}(\mathscr{E}_\sigma) = 0$. Воспользуемся леммой 4, полагая $g = \mathscr{E}_\sigma \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$, $\xi = \gamma_2$ и $\mu = (V^{-1} * \mathfrak{D})_{ij} \in S(\varphi_1)$ для всех пар индексов (i, j). Видим, что $\mathfrak{Q} \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ и $\mathscr{L}(\mathfrak{Q}) = -\mathscr{L}(\mathscr{E}_\sigma)(V^{-1} * \mathfrak{D})^\wedge(\gamma) = \mathbf{0}$.

Завершим доказательство теоремы 1. Имеем (см. (4))

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{X}}(s) &= [\widehat{\boldsymbol{N}}(s) - s\widehat{\boldsymbol{M}}(s)]^{-1}[\widehat{\boldsymbol{F}}(s) - \widehat{\boldsymbol{F}}_1(s) + \widehat{\boldsymbol{M}}(s)\boldsymbol{G}(0)] \\ &= \frac{(s-\sigma)^p}{\prod\limits_{j=1}^{l}(s-s_j)^{m_j}}\mathfrak{q}(s)[\widehat{\boldsymbol{F}}(s) - \widehat{\boldsymbol{F}}_1(s) + \widehat{\boldsymbol{M}}(s)\boldsymbol{G}(0)] \\ &= \left[1 + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{c_{jk}}{(s-s_j)^k}\right]\mathfrak{q}(s)[\widehat{\boldsymbol{F}}(s) - \widehat{\boldsymbol{F}}_1(s) + \widehat{\boldsymbol{M}}(s)\boldsymbol{G}(0)]. \end{aligned} \tag{15}$$

Положим

$$\mathfrak{W} := \mathfrak{Q} * [\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{M}\boldsymbol{G}(0)]. \tag{16}$$

Тогда

$$\widehat{\mathfrak{W}}(s) = \mathfrak{q}(s)[\widehat{\boldsymbol{F}}(s) - \widehat{\boldsymbol{F}}_1(s) + \widehat{\boldsymbol{M}}(s)\boldsymbol{G}(0)].$$

Согласно лемме 5 имеем $\boldsymbol{F}_1 \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ и $\mathscr{L}(\boldsymbol{F}_1) = \mathbf{0}$. Полагая в лемме 4 $\mu = M_{ij}$ и g равной плотности меры $\mathfrak{Q}_{kl}$, получаем $\mathfrak{Q} * \boldsymbol{M}\boldsymbol{G}(0) \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ и

$$\mathscr{L}[\mathfrak{Q} * \boldsymbol{M}\boldsymbol{G}(0)] = \mathscr{L}(\mathfrak{Q})\widehat{\boldsymbol{M}}(\gamma)\boldsymbol{G}(0) = \mathbf{0}.$$

В итоге имеем $\mathfrak{W} \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ и, применяя соотношение (10),

$$\mathscr{L}(\mathfrak{W}) = \mathfrak{q}(\gamma)\mathscr{L}(\boldsymbol{F}). \tag{17}$$

Перепишем (15) в виде

$$\widehat{\boldsymbol{X}}(s) = \left[1 + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{c_{jk}}{(s-s_j)^k}\right]\widehat{\mathfrak{W}}(s)$$

и осуществим следующие преобразования:

$$\frac{\widehat{\mathfrak{W}}(s)}{(s-s_j)^k} = \frac{\widehat{\mathfrak{W}}(s_j)}{(s-s_j)^k} + \frac{\widehat{\mathfrak{W}}(s) - \widehat{\mathfrak{W}}(s_j)}{(s-s_j)^k} = \sum_{i=0}^{k-1}\frac{\mathfrak{w}_{i,j}(s_j)}{(s-s_j)^{k-i}} + \mathfrak{w}_{k,j}(s),$$

$$\mathfrak{w}_{0,j}(s) := \widehat{\mathfrak{W}}(s), \quad \mathfrak{w}_{i,j}(s) := \frac{\mathfrak{w}_{i-1,j}(s) - \mathfrak{w}_{i-1,j}(s_j)}{s - s_j}, \quad i = 1, \dots, m_j.$$

Согласно теоремам 2 и 3 в [1] матричная функция $\mathfrak{w}_{i,j}(s)$ является преобразованием Лапласа меры $\mathfrak{W}_{i,j} := T(s_j)^i\mathfrak{W} \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$, для которой $\mathscr{L}(\mathfrak{W}_{i,j}) = \mathscr{L}(\mathfrak{W})/(\gamma - s_j)^i$. В итоге в силу единственности разложения аналитической функции в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки получаем

$$\widehat{\boldsymbol{X}}(s) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{q_j}(-1)^k\frac{\boldsymbol{B}_{jk}}{(s-s_j)^k} + \widehat{\mathfrak{W}}(s) + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j}c_{jk}\widehat{\mathfrak{W}}_{k,j}(s). \tag{18}$$

Из вышесказанного ясно, что функция

$$\hat{\boldsymbol{r}}(s) := \widehat{\mathfrak{W}}(s) + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j} c_{jk}\widehat{\mathfrak{W}}_{k,j}(s), \quad s \in \Pi(\gamma),$$

— преобразование Лапласа некоторой матрицы мер $\boldsymbol{r} \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$, причем элементы матрицы $\boldsymbol{r}$ — абсолютно непрерывные меры, поскольку в предшествующих рассуждениях $\mathfrak{W}$ — матрица абсолютно непрерывных мер (см. (14) и (16)), а применение операторов $T(s_j)^k$ к мерам дает абсолютно непрерывные меры. Чтобы получить искомое асимптотическое разложение (6), осталось перейти в равенстве (18) от преобразований Лапласа к прообразам.

Вычислим $\mathscr{L}(\boldsymbol{r})$. Воспользуемся равенствами (13), (17) и теоремой 3 в [1]. Имеем

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\boldsymbol{r}) &= \mathscr{L}(\mathfrak{W}) + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j} c_{jk}\mathscr{L}(\mathfrak{W}_{k,j}) \\ &= \mathscr{L}(\mathfrak{W}) + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j} c_{jk}\frac{\mathscr{L}(\mathfrak{W})}{(\gamma - s_j)^k} = \mathscr{L}(\mathfrak{W})\frac{(\gamma-\sigma)^p}{\prod\limits_{j=1}^{l}(\gamma - s_j)^{m_j}} \\ &= \mathfrak{q}(\gamma)\mathscr{L}(\boldsymbol{F})\frac{(\gamma-\sigma)^p}{\prod\limits_{j=1}^{l}(\gamma - s_j)^{m_j}} = [\widehat{\boldsymbol{N}}(\gamma) - \gamma\widehat{\boldsymbol{M}}(\gamma)]^{-1}\mathscr{L}(\boldsymbol{F}).\end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Запись $f(t) \sim cg(t)$, $t \to \infty$, означает $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)/g(t) = c$. Имеет место наглядное

Следствие 1. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1, *в которой* $\varphi(t) = \exp(\gamma t)$ *и функция* $\tau(t) = t^\alpha L(t)$ *правильно меняется на бесконечности с показателем* $\alpha \le -1$. *Допустим, что*

$$\boldsymbol{F}(t) \sim \mathscr{L}(\boldsymbol{F})\frac{t^\alpha L(t)}{e^{\gamma t}}, \quad t \to \infty.$$

Тогда для решения $\boldsymbol{X}(t)$ *уравнения* (2) *с начальным условием* (3) *справедливо разложение* (6), *в котором*

$$\boldsymbol{r}(t) \sim [\widehat{\boldsymbol{N}}(\gamma) - \gamma\widehat{\boldsymbol{M}}(\gamma)]^{-1}\mathscr{L}(\boldsymbol{F})\frac{t^\alpha L(t)}{e^{\gamma t}}, \quad t \to \infty.$$

§ 5. Доказательства лемм

Доказательство леммы 1. Допустим противное: $\Delta = 0$. Пусть последовательность $\{\theta_n\}$ такова, что $\det[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}(\theta_n)] \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда найдутся подпоследовательность $\{\theta_{n_k}\}$ и скалярная матрица $\boldsymbol{A}$ такие, что $\boldsymbol{A}(\theta_{n_k}) \to \boldsymbol{A}$ при $k \to \infty$. Известно (см. [9, § 7.2]), что собственные значения матрицы непрерывно зависят от ее элементов. Следовательно, спектральный радиус матрицы также непрерывно зависит от ее элементов. Поэтому

$$\varrho(\boldsymbol{A}) = \lim_{k\to\infty} \varrho[\boldsymbol{A}(\theta_{n_k})] \le \varrho(\boldsymbol{A}_0) < 1,$$

здесь мы воспользовались известным свойством спектрального радиуса матрицы: $|\boldsymbol{B}| \le \boldsymbol{A} \Rightarrow \varrho(\boldsymbol{B}) \le \varrho(\boldsymbol{A})$ [12, теорема 8.1.18]. Таким образом, единица не может быть собственным значением матрицы $\boldsymbol{A}$. В силу непрерывной зависимости определителя матрицы от ее элементов

$$0 = \lim_{k\to\infty} \det[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}(\theta_{n_k})] = \det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \ne 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Доказательство леммы 2. Положим $L(s) := \det[\widehat{\boldsymbol{N}}(s) - s\widehat{\boldsymbol{M}}(s)]$. Рассуждаем от противного. Допустим, что существует бесконечная последовательность различных точек $s_k \in \Pi(\gamma)$ такая, что $L(s_k) = 0$. Последовательность $\{s_k\}$ стремится к ∞, поскольку иначе $\{s_k\}$ имела бы предельную точку $s_0 \in \Pi(\gamma)$ и функция $L(s)$, аналитическая во внутренности $\overset{\circ}{\Pi}(\xi) \supset \Pi(\gamma)$ полуплоскости $\Pi(\xi)$, равнялась бы тождественно нулю по теореме единственности [13, гл. 3, п. 6.1]. Пусть в дальнейшем $|s| \ge 1$. Положим $K(s) := \det[\widehat{\boldsymbol{M}}(s) - \widehat{\boldsymbol{N}}(s)/s]$. Очевидно, что $L(s) = (-s)^n K(s)$. Пусть $\mathbf{1}$ — матрица размера $n \times n$, все элементы которой равны 1. Имеем (по предположению $\boldsymbol{M}(\{0\}) = \boldsymbol{I}$)

$$\widehat{\boldsymbol{M}}(s) = \boldsymbol{I} + \int_0^\infty e^{sx}\,\boldsymbol{M}_c(dx) + \int_{0+}^\infty e^{sx}\,\boldsymbol{M}_s(dx).$$

По лемме Римана — Лебега второе слагаемое в правой части стремится к нулевой матрице при $s \to \infty$, $s \in \Pi(\gamma)$. Согласно условию $(\mathfrak{S})$ спектральный радиус третьего слагаемого меньше единицы:

$$\varrho\left[\int_{0+}^\infty e^{sx}\,\boldsymbol{M}_s(dx)\right] \le \varrho\left[\int_{0+}^\infty e^{\gamma x}\,|\boldsymbol{M}_s|(dx)\right] =: \varrho < 1.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $\varrho + \varepsilon < 1$. Выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, что

$$\varrho\left[\int_{0+}^\infty e^{\gamma x}\,|\boldsymbol{M}_s|(dx) + \delta\mathbf{1}\right] < \varrho + \varepsilon.$$

Это возможно в силу непрерывной зависимости спектрального радиуса матрицы от ее элементов. Очевидно, что $|\widehat{\boldsymbol{N}}(s)/s| \le \widehat{|\boldsymbol{N}|}(\gamma)/|s|$. Выберем $\beta > 0$ так, что при $|s| \ge \beta$

$$\widehat{|\boldsymbol{N}|}(\gamma)/|s| \le (\delta/2)\mathbf{1}, \quad \left|\int_0^\infty e^{sx}\,\boldsymbol{M}_c(dx)\right| \le (\delta/2)\mathbf{1}.$$

Полагая в лемме 1 $\theta = s$, $\Theta = \Pi(\gamma) \cap \{s \in \mathbb{C} : |s| \ge \beta\}$,

$$\boldsymbol{A}(s) = \widehat{\boldsymbol{N}}(s)/s - \int_{0+}^\infty e^{sx}\,\boldsymbol{M}(dx), \quad \boldsymbol{A}_0 = \int_{0+}^\infty e^{\gamma x}\,|\boldsymbol{M}_s|(dx) + \delta\mathbf{1},$$

приходим к соотношению

$$|K(s)| = \left|\det\left[\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{N}}(s)/s + \int_{0+}^\infty e^{sx}\,\boldsymbol{M}(dx)\right]\right| \ge \Delta > 0$$

при всех $s \in \Pi(\gamma) \cap \{s \in \mathbb{C} : |s| \geq \beta\}$.

Следовательно, $|L(s_k)| \geq |s_k|^n \Delta \to \infty$ при $k \to \infty$, что приводит к противоречию с предположением $L(s_k) = 0$. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Продолжим функцию $\varphi(x)$ с сохранением полумультипликативности на всю прямую $\mathbb{R}$ равенством $\varphi(x) := \exp(\gamma x)$, $x < 0$. Имеем

$$\int_0^\infty \varphi(x) \left| \int_x^\infty g(x-u)\,\mu(du) \right| dx \leq \int_0^\infty \int_x^\infty \varphi(x-u)|g(x-u)|\varphi(u)|\mu|(du)\,dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_{-u}^0 \varphi(v)|g(v)|\,dv \right) \varphi(u)\,|\mu|(du) \leq \int_{-\infty}^0 e^{\gamma v}|g(v)|\,dv \int_0^\infty \varphi(u)\,|\mu|(du) < \infty,$$

так как в произведении интегралов первый интеграл конечен по предположению, а конечность второго вытекает из предположения относительно меры μ, соотношений (7) и того факта, что полумультипликативные функции, продолжаемые на всю вещественную прямую $\mathbb{R}$, ограничены на ограниченных интервалах (см. [7, теорема 7.4.1]). Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Оно практически совпадает с доказательством леммы 4 в [1]. Укажем лишь на незначительные изменения, которые необходимо внести в доказательство леммы 4 в [1], так как в формулировке леммы 4 в [1] присутствует условие $\xi > \max(0, \gamma)$, в то время как в доказываемой лемме $\xi > \gamma$. Итак, чтобы доказать лемму 4, достаточно в доказательстве леммы 4 в [1] заменить оценку (26) для $\Delta(x)$ и константу C_1 следующим текстом:

$$\Delta(x) = \int_x^{[x]+1} \frac{\tau(x-y)}{\varphi(x-y)} \frac{\varphi(x)}{\tau(x)} g_\mu(y)\,dy \leq \frac{\tau(0)e^{|\gamma|}\varphi(x)\mu([[x],[x]+1))}{\tau(x)}.$$

Представляя $[x]$ в виде $[x] = x - \theta$, где $\theta \in [0,1)$, и разбирая отдельно случаи $\xi \geq 0$ и $\xi < 0$, приходим к оценке

$$\mu([[x],[x]+1)) \leq e^{|\xi|} e^{-\xi x} \int_{[x]}^{[x]+1} e^{\xi y}\,\mu(dy).$$

Следовательно,

$$\Delta(x) \leq C_1 \frac{e^{-\xi x}\varphi(x)}{\tau(x)},$$

где

$$C_1 = \tau(0)e^{|\gamma|+|\xi|} \int_0^\infty e^{\xi y}\,\mu(dy) < \infty$$

по предположению. Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 5. Обозначим

$$f(t) = \int_t^\infty g(t-y)\,\mu(dy), \quad t \geq 0.$$

По лемме 3 $f \in \widetilde{S}_{\varphi+}$. Продолжим функцию $\varphi(x)$ с сохранением полумультипликативности на всю прямую $\mathbb{R}$, полагая $\varphi(x) := \exp(\gamma x)$, $x < 0$. Так как

$$\left| \int_x^\infty g(x-y)\,\mu(dy) \right| \le \int_x^\infty |g(x-y)|\,|\mu|(dy),$$

можно, не ограничивая общности, считать, что $g(x) \ge 0$ п. в. и $\mu \ge 0$. Кроме того, изменение функции $g(x)$ на множестве лебеговой меры нуль приводит к изменению функции $f(x)$ самое большее на множестве меры нуль, т. е. эта процедура не выводит функцию $f(x)$ из класса эквивалентных функций, поэтому можно также предположить, что $c(g) = \sup\limits_{x \le 0} e^{\gamma x} g(x) < \infty$. Имеем

$$\frac{\varphi(x) f(x)}{\tau(x)} = \frac{\varphi(x)}{\tau(x)} \int_x^\infty g(x-y)\,\mu(dy)$$
$$\le \frac{1}{\tau(x)} \int_x^\infty \varphi(x-y) g(x-y) \varphi(y)\,\mu(dy) \le \frac{c(g)}{\tau(x)} \int_x^\infty \varphi(y)\,\mu(dy).$$

Из соотношений (7) и (9) вытекает, что правая часть стремится к 0 при $x \to \infty$. Действительно,

$$\frac{1}{x} \ln(e^{-\xi x} \varphi(x)) \to -\xi + \gamma < 0, \quad x \to \infty,$$

т. е. $e^{-\xi x} \varphi(x) \le e^{-\delta x}$ при достаточно больших x, здесь $\delta \in (0, \xi - \gamma)$. Таким образом, справедлива оценка

$$\frac{c(g)}{\tau(x)} \int_x^\infty \varphi(y)\,\mu(dy) = \frac{c(g)}{\tau(x)} \int_x^\infty \frac{\varphi(y)}{e^{\xi y}} e^{\xi y}\,\mu(dy)$$
$$\le \frac{c(g)}{\tau(x)} \left(\sup_{y \ge x} \frac{\varphi(y)}{e^{\xi y}} \right) \int_x^\infty e^{\xi y}\,\mu(dy) \le \frac{c(g) e^{-\delta x}}{\tau(x)} \int_x^\infty e^{\xi y}\,\mu(dy) \to 0, \quad x \to \infty,$$

так как дробь в правой части стремится к 0 в силу первого из соотношений (9), а интеграл есть $o(1)$ при $x \to \infty$. Итак, показали, что $\mathscr{L}(f) = 0$. В частности, $\sup\limits_{x \ge B} \varphi(x) f(x)/\tau(x) < \infty$ при достаточно большом B. Представляя $1/\tau(x)$ и $\varphi(x)$ в виде

$$\frac{1}{\tau(x)} = \frac{1}{\tau(0)} \frac{\tau(0)}{\tau(1)} \frac{\tau(1)}{\tau(2)} \dots \frac{\tau([x]-1)}{\tau([x])} \frac{\tau([x])}{\tau(x)}, \quad \varphi(x) = \frac{\varphi(1)}{\varphi(0)} \dots \frac{\varphi([x])}{\varphi([x]-1)} \frac{\varphi(x)}{\varphi([x])}$$

и применяя соотношения (9) и (8), получаем

$$\sup_{x \in [0,B]} \frac{\varphi(x) f(x)}{\tau(x)}$$
$$\le \frac{M_\tau^{[B]+1} \max\{1, \varphi^{[B]}(1)\} M_\varphi}{\tau(0)} \sup_{x \in [0,B]} \frac{1}{e^{\gamma x}} \int_x^\infty e^{\gamma(x-y)} g(x-y) e^{\gamma y}\,\mu(dy)$$
$$\le \frac{M_\tau^{[B]+1} \max\{1, \varphi^{[B]}(1)\} M_\varphi}{\tau(0)} e^{|\gamma| B} c(g) \int_0^\infty e^{\gamma y}\,\mu(dy) < \infty.$$

Таким образом, $P_\tau(f) < \infty$, и, следовательно, $f \in \mathscr{A}_\mathscr{L}$. Лемма 5 доказана.

Замечание 1. Как отметил рецензент в отзыве на первоначальную рукопись статьи, можно отказаться от требования непрерывной стыковки решения и начальной функции (см. определение 2) и считать начальную функцию нулевой, что упростит формулировки и доказательство. Эти вопросы подробно обсуждаются в [14].

Замечание 2. По недосмотру автора в работе [1] допущена опечатка в комментарии к условию ($\mathfrak{S}$): вместо неравенства $|a_{0m}| > \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{km}|$ следует читать $|a_{0m}| > \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{km}| e^{\gamma h_k}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сгибнев М. С.* Поведение на бесконечности решения дифференциально-разностного уравнения // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1413–1432.
2. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
4. *Власов В. В., Иванов С. А.* Оценки решений неоднородных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Изв. вузов. Математика. 2006. № 3. С. 24–30.
5. *Лесных А. А.* Оценки решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Мат. заметки. 2007. Т. 81, № 4. С. 569–585.
6. *Власов В. В., Медведев Д. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Современная математика. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, , 2008. Т. 30. С. 3–173. (Итоги науки и техники).
7. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
8. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. Т. 2.
9. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982.
10. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. М.: Физматгиз, 1960.
11. *Рогозин Б. А., Сгибнев М. С.* Банаховы алгебры мер на прямой // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 2. С. 160–169.
12. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
13. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М.: Наука, 1967. Т. 1.
14. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.

Статья поступила 18 июня 2013 г.

Сгибнев Михаил Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sgibnev@math.nsc.ru