Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2014. Том 55, № 3

УДК 517.518+517.518.23

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ И ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С МЕРОЙ

Н. Н. Романовский

Аннотация. Новым методом доказаны теоремы вложения Соболева для функций, заданных на метрических пространствах. Также изучены некоторые другие вопросы теории пространств Соболева на метрических пространствах. Доказаны существование и единственность решения одной вариационной задачи.

Ключевые слова: классы Соболева, классы Никольского, функции на метрическом пространстве, теоремы вложения, компактность оператора вложения, вариационная задача.

Введение

В работе изучаются свойства пространств соболевского типа, состоящих из функций, заданных на произвольном метрическом пространстве с мерой. В последнее время появилось много работ, обобщающих результаты классической теории пространств Соболева (см., например, [1, 2]) и других пространств обобщенно дифференцируемых функций (см. [3–5]) на случай, когда область определения рассматриваемых функций лежит в абстрактном метрическом пространстве с мерой (см. [6–17]). Мы используем новый подход [18] (см. также [19, 20]) для описания таких пространств, позволяющий рассматривать случай, когда не выполняется условие удвоения. Кроме того, наш подход удобен для исследования свойств операторов вложения (см., например, [18, 21, 22]). Более того, он позволяет упростить доказательства некоторых оценок даже в классическом случае, в частности, когда рассматриваемые функции заданы в нерегулярной области евклидова пространства с мерой Лебега.

Определение рассматриваемых в настоящей работе функциональных пространств дано в [18]. Обозначаем эти пространства через $S^r_p(U)$ ($1 \le p < \infty$, $0 < r \le 1$). Предполагаем, что область определения рассматриваемых функций представляет собой вполне ограниченное открытое множество в полном сепарабельном метрическом пространстве (X, d) с борелевской мерой μ. При этом для любых $x \in X$, $R > 0$ мера шара с центром в точке x радиуса R больше нуля ($\mu(B(x,R)) > 0$), для любого $x \in X$ функция $r \mapsto \mu(B(x,r))$ непрерывна. Последнее условие эквивалентно тому, что мера любой сферы равна нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН–ДВО РАН № 56, Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российский ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ–921.2012.1).

Везде далее, где будут использованы обозначения X и μ, будем предполагать, что метрическое пространство X и мера μ удовлетворяют сформулированным условиям.

В [18] предложен подход, позволяющий исследовать компактность операторов вложения исходя из предложенного определения, не используя свойств интегральных операторов. Это актуально в особенности для метрических пространств с мерой, не удовлетворяющей условию удвоения, поскольку в этом случае классические методы доказательства теорем вложения, адаптируемые для различных обобщений соболевских пространств на метрический случай (см., например, [6–11]), как правило, не работают.

Доказываемые результаты имеют приложения как в теории классических пространств Соболева, так и в теории пространств функций, имеющих суммируемые (в степени $1 < p < \infty$) обобщенные производные вдоль выделенного семейства направлений. Такие функциональные пространства играют значительную роль в теории вырожденных уравнений в частных производных, описывающих многие важные прикладные модели (см., например, [23–25]).

Отметим также, что теория пространств Соболева на абстрактных метрических пространствах без структуры гладкого многообразия (например на фрактальных множествах) имеет приложения к некоторым задачам математической физики и других областей (см., например, [14–17]).

В разд. 1 настоящей работы изучается вопрос о том, какими свойствами должна обладать область $U \subset \mathbb{R}^n$ для того, чтобы пространства $S_p^1(U)$ и $W_p^1(U)$ совпадали и соответствующие нормы были эквивалентны (см. теорему 1). Мы описываем широкий класс таких областей. Этому классу принадлежат области с особенностью, например, в виде пика или гребня с нулевым углом, направленным наружу.

Далее изучаем операторы вложения из $S_p^r(U,\mu)$ в $L_q(U,\nu)$, где μ и ν, вообще говоря, различные меры в отличие от [18] (см. теорему 2). Это позволяет, в частности, изучать оператор вложения классических пространств Соболева для областей с особенностью в весовые пространства L_q, а также операторы следа.

В условиях теорем 3 и 4 предполагаем, что для любой точки $x \in U$ выполняется $\mu(B(x,r)\cap U) \gtrsim r^s$. Обозначение $\mu(B(x,r)\cap U) \gtrsim r^s$ означает, что для некоторой положительной постоянной C выполняется неравенство $\mu(B(x,r)\cap U) \geq Cr^s$. Для краткости в дальнейшем будем использовать обозначения $\gtrsim$, $\lesssim$.

В теореме 3 доказываем важную оценку

$$\mu(\{x \in U \mid |f(x)| \geq A\} \leq C \left(\frac{\|f\|_{S_p^r(U)}}{A} \right)^{\frac{sp}{s-rp}} \qquad (f \in S_p^r(u)).$$

В классическом случае эта оценка играет решающую роль при доказательстве ограниченности оператора вложения $W_p^1(U)$ в $L^{\frac{np}{n-p}}(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$.

В теореме 4 доказываем, что для любого $t > s - rp$ из сходящейся по норме пространства $S_p^r(U)$ последовательности функций можно выбрать подпоследовательность, которая сходится всюду, за исключением множества, имеющего t-вместимость нуль.

В теореме 5 исследуем ограниченность и компактность операторов вложения пространств $S_p^r(U,\mu)$ в пространства с нормой

$$\|f\|_{L_{\infty-\gamma}(U)} = \sup_{p\in[1,\infty)} \frac{\|f\|_{L_p(U)}}{p^\gamma}, \tag{1}$$

где $\gamma > 0$, U — открытое множество конечной меры, функция f принадлежит пространствам $L_p(U)$ для всех $p < \infty$ (см. [18]). Эти пространства являются аналогами пространств Орлича с экспоненциально растущей порождающей функцией. С помощью таких пространств Орлича в работе С. И. Похожаева [26] были уточнены классические теоремы вложения пространств W_p^l в случае $pl = n$.

В разд. 3 (см. теорему 6) рассматриваем задачу о минимизации функционала $u \mapsto [u]^p_{S_p^r}$ при условии $R(u) = v$, где R — линейный ограниченный оператор, действующий из пространства S_p^r в некоторое линейное нормированное пространство V, причем имеет место оценка $\|u\|_{L_p} \lesssim [u]_{S_p^r} + R(u)$. Доказываем существование и единственность решения этой вариационной задачи в классе S_p^r. В доказательстве используем подход, предложенный С. Л. Соболевым (см. [1]). В классическом случае в качестве оператора R рассматривается оператор следа на границе. Наше обобщение состоит в том, что мы, во-первых, рассматриваем функции, заданные на произвольном метрическом пространстве, во-вторых, — произвольный показатель обобщенной дифференцируемости $r \in (0, 1]$ и, в-третьих, — произвольный линейный ограниченный оператор R, для которого имеет место оценка $\|u\|_{L_p} \lesssim [u]_{S_p^r} + R(u)$. Отметим, что возможны и другие обобщения (см., например, [23]).

1. Определение и свойства пространств $S_p^r(U)$

Определение 1. Будем говорить, что открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* C, если любая точка x границы множества U имеет окрестность V_x, для которой найдутся непрерывная функция f от $n-1$ переменных и подходящая декартова система координат $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ такие, что $U \cap V_x$ совпадает с пересечением подграфика функции f (т. е. множества $\tilde{x}_n < f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1})$) и окрестности V_x.

Определение 2. Пусть U — вполне ограниченное открытое подмножество метрического пространства (X, d). Обозначим через Σ_δ множество всевозможных конечных разбиений U на непересекающиеся измеримые множества E_i, диаметр которых не превосходит $\delta > 0$. Рассмотрим $\sigma \in \Sigma_\delta$. Обозначим через G_σ множество функций, постоянных на любом множестве E_i из разбиения σ. Фиксируем борелевскую меру μ на U и числа $p \in [1, \infty)$, $r \in (0, 1]$. Будем говорить, что функция $f \in L_p(U, \mu)$ *принадлежит соболевскому классу* $S_p^r(U, \mu)$, если конечна величина

$$[f]_{S_p^r(U)} = \sup_{\delta > 0} \left(\sup_{\sigma \in \Sigma_\delta} \inf_{g \in G_\sigma} \frac{\|f - g\|_{L_p(U)}}{\delta^r} \right).$$

В качестве нормы в линейном пространстве $S_p^r(U)$ будем рассматривать величину $\|f\|_{S_p^r(U)} = \|f\|_{L_p(U)} + [f]_{S_p^r(U)}$, величину $[f]_{S_p^r(U)}$ будем называть *полунормой в пространстве* $S_p^r(U)$.

Отметим, что в силу конечномерности G_σ вместо $\inf\limits_{g \in G_\sigma}$ можно писать $\min\limits_{g \in G_\sigma}$.

Очевидно, из $f \in S_p^r(U)$ следует, что $|f| \in S_p^r(U)$, причем $\|(|f|)\|_{S_p^r(U)} \leq \|f\|_{S_p^r(U)}$. Соответственно из $f \in S_p^r(U)$ вытекает, что $f_+ \in S_p^r(U)$ и $f_- \in S_p^r(U)$ ($\|f_+\|_{S_p^r(U)} \leq \|f\|_{S_p^r(U)}$, $\|f_-\|_{S_p^r(U)} \leq \|f\|_{S_p^r(U)}$), а из $f, g \in S_p^r(U)$ — что $\max(f, g) \in S_p^r(U)$, $\min(f, g) \in S_p^r(U)$.

Отметим, что легко привести примеры, когда имеет место строгое неравенство $\|(|f|)\|_{S_p^r(U)} < \|f\|_{S_p^r(U)}$. Достаточно рассмотреть функцию $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$

в пространстве $S_1^r((-1,1))$ для $0 < r < 1$ либо функцию $f(x,y) = \operatorname{sgn}(x)$ в пространстве $S_1^1(U)$, где $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, -x^2 < y < x^2\}$ (в определении 2 открытое множество U не обязано быть связным).

Лемма 1. *Функционал «энергии» $f \mapsto [f]_{S_p^r(U)}$ полунепрерывен снизу в смысле сходимости в $L_p(U)$, т. е. если имеется последовательность функций $f_n \in S_p^r(U)$ таких, что $[f_n]_{S_p^r(U)} \le C$, постоянная C не зависит от n и $f_n \to f \in L_p(U)$ по норме пространства $L_p(U)$, то $f \in S_p^r(U)$, причем $[f]_{S_p^r(U)} \le C$.*

Доказательство. Фиксируем $\delta > 0$, разбиение $\sigma \in \Sigma_\delta$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ подберем $g \in G_\sigma$ так, что $\frac{\|f-g\|_{L_p(U)}}{\delta^r} < C + \varepsilon$. Для этого выберем достаточно большое n так, что $\|f - f_n\|_{L_p(U)} \le \frac{\delta^r \varepsilon}{2}$. В силу соотношения $[f_n]_{S_p^r(U)} \le C$ найдется функция $g \in G_\sigma$ такая, что $\frac{\|f_n-g\|_{L_p(U)}}{\delta^r} < C + \frac{\varepsilon}{2}$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем $\inf\limits_{g\in G_\sigma} \frac{\|f-g\|_{L_p(U)}}{\delta^r} \le C$. В силу того, что $\delta > 0$ и разбиение $\sigma \in \Sigma_\delta$ были выбраны произвольно, из последнего неравенства вытекает требуемая оценка $[f]_{S_p^r(U)} \le C$.

Следствие. *Пространство $S_p^r(U)$ полно.*

Замечание 1. Пусть $p > 1$. Легко видеть, что

$$[f]^p_{S_p^r(U)} \ge \limsup_{\delta\to+0} \left(\sup_{\sigma\in\Sigma_\delta} \inf_{g\in G_\sigma} \frac{\|f-g\|^p_{L_p(U)}}{\delta^{rp}} \right).$$

Обозначим через $h(x) \in L_p(U)$ слабый предел подпоследовательности последовательности функций $\frac{|f-g_n|}{(\delta_n)^r}$, где кусочно постоянная функция g_n минимизирует функционал $\frac{\|f-g_n\|_{L_p(U)}}{(\delta_n)^r}$ на множестве G_{σ_n}, $\sigma_n \in \Sigma_{\delta_n}$, $\delta_n \to 0$. Имеет место неравенство

$$\limsup_{\delta\to+0} \left(\sup_{\sigma\in\Sigma_\delta} \inf_{g\in G_\sigma} \frac{\|f-g\|^p_{L_p(U)}}{\delta^{rp}} \right) \ge \int\limits_U h^p(x)\, d\mu(x).$$

В общем случае эти три величины могут быть не эквивалентны. Однако для многих важных частных случаев, например для регулярных областей $\mathbb{R}^n$, гладких компактных римановых многообразий, стратифицированных групп Ли с метрикой Карно и мерой Хаара, метрических пространств Карно — Каратеодори с подходящей мерой [23–25] и метрических пространств с внутренней метрикой с ограниченной сверху кривизной Риччи, выполняется оценка

$$[f]^p_{S_p^1(U)} := \sup_{\delta>0} \left(\sup_{\sigma\in\Sigma_\delta} \inf_{g\in G_\sigma} \frac{\|f-g\|^p_{L_p(U)}}{\delta^p} \right) \lesssim \limsup_{\delta\to+0} \left(\sup_{\sigma\in\Sigma_\delta} \inf_{g\in G_\sigma} \frac{\|f-g\|^p_{L_p(U)}}{\delta^p} \right).$$

Если дополнительно предположить, что последовательность разбиений σ_n выбрана таким образом, что $\inf\limits_{g\in G_{\sigma_n}} \frac{\|f-g\|_{L_p(U)}}{(\delta_n)^r}$ отличается от $\sup\limits_{\sigma\in\Sigma_{\delta_n}} \inf\limits_{g\in G_\sigma} \frac{\|f-g\|_{L_p(U)}}{(\delta_n)^r}$ на величину, стремящуюся к нулю при $n \to \infty$, то

$$[f]^p_{S_p^1(U)} \lesssim \int\limits_U h^p(x)\, d\mu(x).$$

Это позволяет сравнивать определение 2 с другими имеющимися метрическими определениями пространств Соболева (см., например, [6–12, 15–17]).

Замечание 2. Легко видеть, что для $r < 1$ величины

$$[f]_{S_p^r((0,1))}, \quad \limsup_{\delta\to+0} \sup_{\sigma\in\Sigma_\delta} \inf_{g\in G_\sigma} \frac{\|f-g\|_{L_p((0,1))}}{\delta^r}$$

не эквивалентны, а функции множеств

$$E \subset (0,1) \mapsto [f]^p_{S_p^r(E)}, \quad E \subset (0,1) \mapsto \limsup_{\delta\to+0} \sup_{\sigma\in\Sigma_\delta} \inf_{g\in G_\sigma} \frac{\|f-g\|^p_{L_p(E)}}{\delta^{rp}}$$

не аддитивны. Для $r = 1$, если рассмотреть в качестве метрики на отрезке $(0,1)$ $d(x,y) = |x-y|^\theta$ $(0 < \theta < 1)$, также будем иметь неаддитивность и неэквивалентность этих величин.

Более того, если рассмотреть ограничение функции $f(x,y) := \operatorname{sgn}(x)$ на несвязное открытое множество $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, -x^2 < y < x^2\}$, то нетрудно заметить, что функции множеств

$$E \mapsto [f]^p_{S_p^r(E)}, \quad E \mapsto \liminf_{\delta\to+0} \sup_{\sigma\in\Sigma_\delta} \inf_{g\in G_\sigma} \frac{\|f-g\|^p_{L_p((0,1))}}{\delta^{rp}}$$

не аддитивны даже в случае, когда $r = 1$, d — евклидова метрика.

Замечание 3. Пусть $r = 1$, $p = 1$, $U \subset \mathbb{R}^n$, μ — мера Лебега. Тогда сформулированное выше определение не эквивалентно классическому определению пространства Соболева. В этом случае пространство $S_1^1(U)$ совпадает с пространством функций ограниченной вариации $BV(U)$. Однако если для фиксированной $f \in S_1^1(U)$ функция множеств $E \mapsto [f]_{S_1^1(E)}$ абсолютно непрерывна, то $f \in W_1^1(U)$ и $[f]_{W_1^1(U)} \le [f]_{S_1^1(U)}$. Аналогичная ситуация описана, например, в [23].

Прежде всего изучим вопрос о совпадении пространства $S_p^1(U)$ с классическим пространством Соболева $W_p^1(U)$ в случае, когда (X, d, μ) есть $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой и мерой Лебега. В [18] показано, что для $p > 1$ пространство $S_p^1(U)$ вкладывается в $W_p^1(U)$ для любой области U (см. также [19, 20, 23, 27]). Также в [18] показано, что для $p \ge 1$ имеет место обратное вложение в том случае, если существует ограниченный оператор продолжения $W_p^1(U)$ в $W_p^1(\mathbb{R}^n)$. Последнее условие выполняется, в частности, если ограниченная область U принадлежит классу C^1.

Далее покажем, что вложение $W_p^1(U)$ в $S_p^1(U)$ имеет место для многих областей U класса C, в том числе ряда областей U класса C, для которых не существует ограниченного оператора продолжения $W_p^1(U)$ в $W_p^1(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1. *Пусть область $U \subset \mathbb{R}^n$ ограничена и принадлежит классу C. Предположим, что соответствующие локально заданные функции g (в силу компактности замыкания области U можно считать, что их конечное число), которые зависят от $n-1$ переменных и определяют локально область U в подходящих ортонормированных системах координат неравенством $\tilde{x}_{n+1} < g(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1})$, удовлетворяют соотношениям*

$$\left[\frac{g(x+he_i) - 2g(x) + g(x-he_i)}{h}\right]_+ \le \kappa, \quad i = 1, \dots, n-1. \tag{2}$$

Пусть $1 < p < \infty$. Тогда любая функция $f \in W_p^1(U)$ принадлежит также пространству $S_p^1(U)$, причем $[f]_{S_p^1(U)} \le A\|f\|_{W_p^1(U)}$, где A зависит только от n, p и κ.

Замечание 4. Отметим, что сформулированное в теореме условие на функцию g более слабое, чем условие Липшица, даже если заменить в неравенстве (2) положительную часть $[\cdot]_+$ модулем $|\cdot|$. С учетом того, что в правой части неравенства (2) содержится $[\cdot]_+$, это условие существенно более слабое, чем условие Липшица, и соответствующий класс областей включает в себя области с особенностями типа пика или гребня с нулевым углом, направленным наружу области.

Нетрудно видеть, что условие на область может быть переформулировано следующим образом: найдется постоянная $\Lambda \geq 1$ такая, что для любого достаточно малого куба K с ребрами, параллельными базисным векторам $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$, для некоторого $1 \leq \lambda \leq \Lambda$ пересечение $\lambda K \cap U$ является связным множеством, где λK — куб, концентрический кубу K и растянутый в λ раз, предполагаем, что $\Lambda K \cap U$ лежит в окрестности, в которой область U в системе координат $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ определяется неравенством $\tilde{x}_{n+1} < g(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1})$. При этом Λ зависит только от κ.

Доказательство. Известно (см. например [2]), что в предположениях теоремы множество функций из $C^1(\overline{U})$ плотно в $W_p^1(U)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что для любой функции f из $C^1(\overline{U})$ выполняется неравенство $[f]_{S_p^1(U)} \leq A\|f\|_{W_p^1(U)}$.

Для простоты изложения будем рассматривать двумерный случай, все приведенные ниже рассуждения могут быть практически дословно перенесены на многомерный случай.

В силу компактности $\overline{U}$ и определения области класса C имеем $U = \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$, где $V_i = U \cap K_i = \{\tilde{x}_1 \in (a_i, a_i + h_i),\ \tilde{x}_2 \in (b_i, \min[g_i(\tilde{x}_1), b_i + h])\}$, стороны квадрата K_i параллельны координатным направлениям $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, функция g_i удовлетворяет неравенству

$$\left[\frac{g_i(t+h) - 2g_i(t) + g_i(t)}{h}\right]_+ \leq \kappa.$$

Искомое неравенство $[f]_{S_p^1(U)} \leq A\|f\|_{W_p^1(U)}$ будет вытекать из неравенств $[f]_{S_p^1(V_i)} \leq C\|f\|_{W_p^1(V_i)}$, $i = 1, \dots, m$. Следовательно, можно опустить индекс i и рассматривать область V вида $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,1), y \in (0, g(x))\}$, где функция g удовлетворяет неравенствам

$$\left[\frac{g(x+h) - 2g_i(x) + g(x)}{h}\right]_+ \leq \kappa, \quad 0 \leq g(x) \leq 1.$$

Фиксируем $\delta > 0$. Фиксируем произвольное конечное разбиение σ рассматриваемой области V на непересекающиеся измеримые множества положительной меры E_l, $l = 1, \dots, M$, диаметра, не превосходящего δ. Пусть N — наименьшее целое число, большее либо равное $\frac{1}{\delta}$, $k_{ij} = \left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right) \times \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right)$, $i, j = 1, \dots, N$. Каждое из множеств E_l имеет непустое пересечение по крайней мере с одним из квадратов k_{ij}. Обозначим через I_{ij} множество индексов $l \in \{1, \dots, M\}$ таких, что $E_l \cap k_{ij} \neq \varnothing$. Эти множества индексов могут пересекаться между собой, однако очевидно, что можно выбрать подмножества $I'_{ij} \subset I_{ij}$ такие, что

$$\bigcup_{ij} I'_{ij} = \bigcup_{ij} I_{ij} = \{1, \dots, M\}, \quad I'_{i_1 j_1} \cap l'_{i_2 j_2} = \varnothing, \text{ если } (i_1, j_1) \neq (i_2, j_2).$$

Обозначим $R_{ij} = \bigcup\limits_{l\in I_{ij}} E_l$. Совокупность множеств R_{ij} является разбиением множества V на непересекающиеся измеримые множества, обозначим его через σ'. Учитывая, что σ является измельчением σ' и $R_{ij} \subset 3k_{ij} \cap V$ для всех $i, j = 1, \dots, N$, получаем

$$\inf_{h\in G_\sigma} \frac{\|f-h\|_{L_p(V)}}{\delta} \le \inf_{h\in G_{\sigma'}} \frac{\|f-h\|_{L_p(V)}}{\delta} \le \left(\sum_{i,j} \inf_{A_{ij}\in\mathbb{R}} \int\limits_{3k_{ij}\cap V} \left(\frac{|f-A_{ij}|}{\delta}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

Отметим, что для любого $C > 1$ кратность покрытия области V квадратами Ck_{ij} зависит только от величины C и не зависит от δ. В силу замечания 4 для некоторого $C \in [3, 3\Lambda]$ множество $Ck_{ij} \cap V$ связно, т. е. оно представимо в виде

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{ij} < x < b_{ij},\, a^{ij} < y < g(x) \le b^{ij}\},$$

где $g(x) > a^{ij}$ для всех $x \in (a_{ij}, b_{ij})$ (если это множество было бы несвязно, то оно состояло бы из нескольких таких компонент, иначе говоря, $g(x)$ в некоторых точках принимала бы значения, меньшие либо равные a^{ij}). Обозначим это множество через V_{ij}.

Будем считать, что множество $(a_{ij}, b_{ij}) \times (a^{ij} - (b^{ij} - a^{ij}), a^{ij}]$ содержится в области U. В противном случае $a^{ij} - (b^{ij} - a^{ij}) < 0$. В силу $b^{ij} - a^{ij} \le 3\Lambda\delta$, малости δ и произвола в выборе подобласти V этот случай можно проигнорировать.

Обозначим $b^{ij} - a^{ij} = H^{ij}$. По построению $3\delta \le H^{ij} \le 3\Lambda\delta$. Отметим, что кратность покрытия области V множествами вида

$$\widetilde{V}_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{ij} < x < b_{ij},\, a^{ij} - H^{ij} < y < g(x) \le b^{ij}\}$$

может быть оценена сверху постоянной, не зависящей от δ. Поэтому из (3) следует, что для получения требуемой оценки достаточно доказать неравенство

$$\inf_{A_{ij}\in\mathbb{R}} \int\limits_{V_{ij}} \left(\frac{|f-A_{ij}|}{\delta}\right)^p \le C \int\limits_{\tilde{V}_{ij}} |\nabla f|^p. \tag{4}$$

Легко видеть, что для функции одной переменной $\varphi \in C^1[y_0, y_2]$, $y_0 < y_1 \le y_2$, выполняется неравенство

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} \left|\varphi(y) - \frac{1}{y_1 - y_0} \int\limits_{y_0}^{y_1} \varphi(x)\,dx\right|^p dy \le \frac{(y_2 - y_0)^p}{p} \int\limits_{y_0}^{y_2} |\varphi'(y)|^p\,dy. \tag{5}$$

Действительно, воспользовавшись неравенством Гёльдера, взяв q так, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, для любого $t \in [y_0, y]$ получим

$$|\varphi(y) - \varphi(t)| = \left|\int\limits_t^y \varphi'(x)\,dx\right| \le \left(\int\limits_{y_0}^y 1^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{y_0}^y |\varphi'(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= (y - y_0)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{y_0}^y |\varphi'(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Поскольку правая часть последнего неравенства не зависит от t, из него следует, что

$$\left|\varphi(y) - \frac{1}{y_1 - y_0}\int\limits_{y_0}^{y_1}\varphi(t)\,dt\right| \le (y-y_0)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{y_0}^{y}|\varphi'(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{где } y \ge y_1.$$

Далее,

$$\int\limits_{y_1}^{y_2}\left|\varphi(y) - \frac{1}{y_1 - y_0}\int\limits_{y_0}^{y_1}\varphi(x)\,dx\right|^p dy \le \int\limits_{y_1}^{y_2}(y-y_0)^{\frac{p}{q}}\int\limits_{y_0}^{y}|\varphi'(x)|^p\,dxdy$$
$$\le \left(\frac{(y_2-y_0)^{\frac{p+q}{q}} - (y_1-y_0)^{\frac{p+q}{q}}}{\frac{p+q}{q}}\right)\int\limits_{y_0}^{y_2}|\varphi'(y)|^p\,dy.$$

Поскольку $\frac{p+q}{q} = p\bigl(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\bigr) = p$, из последнего неравенства вытекает (5).

Воспользуемся оценкой (5) для ограничения на прямую $\{x = \mathrm{const}\}$ функции $f(x,y)$. Принимая во внимание $g(x) - (a_{ij} - H_{ij}) \le 2H_{ij} \le 6\Lambda\delta$, получаем

$$\int\limits_{a_{ij}}^{g(x)}|f(x,y) - F(x)|^p\,dy \le \frac{(6\Lambda\delta)^p}{p}\int\limits_{a_{ij}-H_{ij}}^{g(x)}\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|^p dy,$$

где

$$F(x) := \frac{1}{H^{ij}}\int\limits_{a^{ij}-H^{ij}}^{a^{ij}} f(x,y)\,dy.$$

После интегрирования по переменной x от a_{ij} до b_{ij} имеем

$$\int\limits_{V_{ij}}\left(\frac{|f(x,y) - F(x)|}{\delta}\right)^p dxdy \le C(p,\Lambda)\int\limits_{\tilde{V}_{ij}}\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|^p dxdy. \tag{6}$$

По предположению $f \in C^1([a_{ij}, b_{ij}] \times [a^{ij} - H^{ij}, a^{ij}])$, следовательно, $F \in C^1[a_{ij}, b_{ij}]$. Применив одномерное неравенство Пуанкаре, получим

$$\int\limits_{a_{ij}}^{b_{ij}}\left|F(x) - \frac{1}{b_{ij} - a_{ij}}\int\limits_{a_{ij}}^{b_{ij}}F(t)\,dt\right|^p dx$$
$$\le C_1(p)(b_{ij} - a_{ij})^p\int\limits_{a_{ij}}^{b_{ij}}|F'(x)|^p\,dx \le C_2(p)\delta^p\int\limits_{a_{ij}}^{b_{ij}}|F'(x)|^p\,dx.$$

Подставляя результат последнего неравенства в (6), приходим к (4), где

$$A_{ij} = \frac{1}{(b_{ij} - a_{ij})(b^{ij} - a^{ij})}\int\limits_{(x,y)\in[a_{ij},b_{ij}]\times[a^{ij}-H^{ij},a^{ij}]} f(x,y)\,dy,$$

постоянная C зависит только от p и Λ (в общем случае она зависит также от размерности пространства n).

Из (4) следует неравенство $[f]_{S_p^1(V)} \le A(p,\Lambda)\|f\|_{W_p^1(V)}$, откуда $[f]_{S_p^1(U)} \le A(p,\Lambda)\|f\|_{W_p^1(U)}$.

Окончательно, воспользовавшись плотностью $C^1\overline{U}$ в $W_p^1(U)$ и леммой 1, избавляемся от предположения $f \in C^1(\overline{U})$. Теорема доказана.

Приведем пример, когда пространства $S_p^1(U)$ и $W_p^1(U)$ $(p > 1)$ не совпадают. В качестве области U рассмотрим полукруг с вырезанным отрезком

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, x^2 + y^2 < 9\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y \in [0,2]\}.$$

Естественно, что область U не удовлетворяет условию теоремы. В качестве функции f возьмем функцию, равную 0, когда $x \le 0$, и $(1-y)_+$, когда $x > 0$. Легко видеть, что $f \in W_p^1(U)$ для любого $p \ge 1$. Однако для любого $p > 2$ можно построить последовательности $\delta_n > 0$ и разбиений $\sigma_n \in \Sigma_{\delta_n}$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{g \in G_{\sigma_n}} \frac{\|f-g\|_{L_p(U)}}{\delta_n} = \infty.$$

Действительно, возьмем $\delta_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$ и предположим, что для каждого n разбиение σ_n содержит квадраты

$$K_i^n := \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right] \times \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\inf_{g \in G_{\sigma_n}} \frac{\|f-g\|_{L_p(U)}}{\delta_n} \ge \frac{n}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{n} \left\| f - \frac{1}{2} \right\|_{L_p(K_i^n)} = \frac{n}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \|\chi_{K_i^n}\|_{L_p(K_i^n)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} n^{1-\frac{2}{p}}.$$

Приведем пример, когда $C(U) \cap S_p^1(U)$ не плотно в $S_p^1(U)$, где $C(U)$ обозначает множество непрерывных на U функций. Пусть $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -|x| \le y \le |x|\}$, d — евклидова метрика, μ — мера Лебега, $U = X \cap B(0,1)$ — открытый шар радиуса 1 с центром в $(0,0)$. Положим $p = 2$. Рассмотрим функцию $f(x)$ равную -1, если $x \le 0$, и 1, если $x > 0$. Фиксируем произвольное $\delta \in (0,1)$. Пусть разбиение $\sigma \in \Sigma_{2\sqrt{2}\delta}$ содержит множество $E_\delta := \{(x,y) \in X \mid -\delta \le x \le \delta\}$. Предположим, что φ — произвольная непрерывная на U функция. Имеем при $\delta \to 0$

$$\begin{aligned}
[f-\varphi]_{S_2^1(U)} &\ge \inf_{a \in \mathbb{R}} \frac{\|f-\varphi-a\|_{L_2(E_\delta)}}{2\sqrt{2}\delta} = \inf_{a \in \mathbb{R}} \frac{\|f-\varphi(0,0)+O(1)-a\|_{L_2(E_\delta)}}{2\sqrt{2}\delta} \\
&\ge \inf_{a \in \mathbb{R}} \frac{\|f-a\|_{L_2(E_\delta)}}{2\sqrt{2}\delta} - \frac{\|O(1)\|_{L_2(E_\delta)}}{2\sqrt{2}\delta} = \frac{\|f\|_{L_2(E_\delta)}}{2\sqrt{2}\delta} - \frac{\|O(1)\|_{L_2(E_\delta)}}{2\sqrt{2}\delta} \\
&= (1-O(1)) \frac{|E_\delta|^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}\delta} = \frac{1-O(1)}{2}.
\end{aligned}$$

В силу произвольности δ получаем $[f-\varphi]_{S_2^1(U)} \ge \frac{1}{2}$. Аналогичный пример можно построить для любого $p \in (1,\infty)$.

Также легко показать, что даже в том случае, когда область U лежит в евклидовом пространстве, $C(U) \cap S_p^r(U)$ не плотно в $S_p^r(U)$ для $p \in \left[1, \frac{1}{r}\right]$.

2. Ограниченность и компактность операторов вложения

Теорема 2. *Пусть U — вполне ограниченное открытое множество в метрическом пространстве (X,ρ), на X заданы меры μ, ν. Предположим, что можно построить последовательность разбиений σ_k, каждое из которых является измельчением предыдущего, множества U на измеримые (одновременно относительно мер μ и ν) непересекающиеся множества E_i^k такие, что для некоторого $\tau<1$*

$$\operatorname{diam}\bigl(E_i^k\bigr)\le C_1\tau^k,\qquad \frac{\bigl(\nu\bigl(E_i^k\bigr)\bigr)^{\frac1q}}{\bigl(\mu\bigl(E_i^k\bigr)\bigr)^{\frac1p}}\le C_2\frac{a_k}{\tau^{rk}},$$

где $a_k\ge 0$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится, $1\le p\le q<\infty$, $0<r\le 1$. Тогда оператор вложения функционального пространства $S_p^r(U,d\mu)$ в пространство $L_q(U,d\nu)$ ограничен и компактен.

Замечание 5. Если взять $\mu=\nu$, в качестве a_k — геометрическую прогрессию, то из (8) получим условие $\mu\bigl(E_i^k\bigr)^{\frac1p-\frac1q}\ge C\tau^{(r-\lambda)k}$ для некоторого $\lambda>0$. Если, кроме того, известно, что $\mu\bigl(E_i^k\bigr)\gtrsim\bigl(\operatorname{diam}\bigl(E_i^k\bigr)\bigr)^s\approx\tau^{sk}$, то получаем $\frac1p-\frac1q<\frac rs$, что эквивалентно $q<\frac{sp}{s-rp}$.

Доказательство. В силу определения 2 для каждого разбиения σ_k найдется функция g_k, постоянная на каждом множестве E_i^k из этого разбиения, такая, что выполняется неравенство

$$\|f-g_k\|_{L_p(U,d\mu)}\le C_1^r\tau^{rk}[f]_{S_p^r(U,d\mu)}.$$

Обозначим $h_k:=g_{k+1}-g_k$, $k=1,2,\dots$. Имеем

$$\|h_k\|_{L_p(U,d\mu)}\le\|f-g_k\|_{L_p(U,d\mu)}+\|f-g_{k+1}\|_{L_p(U)}\le 2C_1^r\tau^{rk}[f]_{S_p^r(U,d\mu)}.$$

С другой стороны, в силу того, что функция h_k постоянна на каждом множестве из разбиения σ_{k+1}, получаем

$$\frac{\|h_k\|_{L_q(U,d\nu)}}{\|h_k\|_{L_p(U,d\mu)}}\le\max_i\frac{\bigl(\nu\bigl(E_i^{k+1}\bigr)\bigr)^{\frac1q}}{\bigl(\mu\bigl(E_i^{k+1}\bigr)\bigr)^{\frac1p}}\le C_2\frac{a_{k+1}}{\tau^{r(k+1)}}.$$

Таким образом,

$$\|h_k\|_{L_q(U,d\nu)}\le\left(\frac{2C_1^rC_2}{\tau}\right)a_{k+1}[f]_{S_p^r(U,d\mu)}:=Ca_{k+1}[f]_{S_p^r(U,d\mu)}. \tag{7}$$

Далее, для $k=2,3,\dots$ имеем $g_k=g_1+\sum\limits_{i=1}^{k-1}h_i$.

Из сходимости ряда a_k и неравенства (7) следует сходимость по норме пространства $L_q(U,d\nu)$ последовательности g_k. Из последовательности g_k можно выделить подпоследовательность, которая сходится почти всюду в смысле мер μ и ν. Функция f μ-п.в. совпадает с пределом последовательности g_k. Естественно доопределить функцию f таким образом, чтобы она совпадала с указанным пределом также ν-п.в. Следовательно, можно считать, что $f\in L_q(U,d\nu)$, причем

$$\|f\|_{L_q(U,d\nu)}\le\|g_1\|_{L_q(U,d\nu)}+C[f]_{S_p^r(U,d\mu)}\sum_{k=1}^{\infty}a_k,$$

$$\|f-g_k\|_{L_q(U,d\nu)} \le C[f]_{S_p^r(U,d\mu)} \sum_{i=k}^{\infty} a_i.$$

Далее,

$$\|g_1\|_{L_q(U,d\nu)} \le C_3\|g_1\|_{L_p(U,d\mu)} \le C_3(\|f\|_{L_p(U,d\mu)} + \|f-g_1\|_{L_p(U,d\mu)}) \le C_4\|f\|_{S_p^r(U,d\mu)}.$$

Таким образом, $\|f\|_{L_q(U,d\nu)} \le C_5\|f\|_{S_p^r(U,d\mu)}$, т. е. оператор вложения ограничен. Более того, имеем неравенство

$$\inf_{g\in G_{\sigma_k}} \|f-g\|_{L_q(U,d\nu)} \le C[f]_{S_p^r(U,d\mu)} \sum_{i=k}^{\infty} a_i. \tag{8}$$

Покажем, что оператор вложения вполне непрерывен. Для этого достаточно доказать, что шар по норме пространства $S_p^r(U,d\mu)$ вполне ограничен по норме пространства $L_q(U,d\nu)$. Достаточно рассмотреть шар с центром в нуле произвольного радиуса $R>0$. Обозначим его через B_R. Фиксируем $\varepsilon>0$. Построим конечную ε-сеть, т. е. конечный набор функций $F_1,\dots,F_m$ из $L_q(U,d\nu)$ таких, что для любой функции $f\in B_R$ выполняется $\min\limits_{i\in 1,2,\dots,m(\varepsilon)} \|f-F_i\|_{L_q(U,d\nu)} < \varepsilon$.

В силу сходимости ряда a_k можно выбрать k такое, что

$$CR\sum_{i=k}^{\infty} a_i \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Множество G_{σ_k} является линейным конечномерным подпространством $L_q(U,d\nu)$.

Рассмотрим множество функций из G_{σ_k} удаленных от B_R по метрике $L_q(U,d\nu)$ на расстояние, не большее, чем ε. Обозначим его через $G_{k,\varepsilon}$. Множество $G_{k,\varepsilon}$ вполне ограничено в пространстве $(G_{\sigma_k}, \|\cdot\|_{L_q(U)})$. Следовательно, найдется конечный набор функций $g_k^1,\dots,g_k^{m(k,\varepsilon)}$ таких, что для любой функции $g\in G_{k,\varepsilon}$

$$\min_{i\in 1,2,\dots,m(k,\varepsilon)} \left\|g-g_k^i\right\|_{L_q(U,d\nu)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что набор функций g_k^i является ε-сетью для множества B_R в $L_q(U,d\nu)$. Действительно, в силу (8), (9) для $f\in B_R$

$$\min_{i\in 1,2,\dots,m(\varepsilon)} \left\|f-g_k^i\right\|_{L_q(U,d\nu)} \le CR\sum_{i=k}^{\infty} a_i + \sup_{g\in G_{k,\varepsilon}} \min_{i\in 1,2,\dots,m(k,\varepsilon)} \left\|g-g_k^i\right\|_{L_q(U,d\nu)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Предположим, что область U удовлетворяет условиям теоремы 1 и условиям теоремы 2 для меры Лебега μ, $r=1$, фиксированной меры ν и некоторых значений p и q. Тогда оператор вложения пространства $W_p^1(U)$ в пространство $L_q(U,d\nu)$ вполне ограничен.*

Пример 1. Рассмотрим область $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in(0,1), y\in(0,x^\lambda)\}$, где $\lambda>1$. Очевидно, что она удовлетворяет условиям теоремы 1 и при этом имеет особенность в точке $(0,0)$. Построим весовую меру ν так, чтобы для $q<\frac{2p}{2-p}$ оператор вложения $W_p^1(U)$ в $L_q(U,d\nu)$ был вполне ограничен. Обозначим через K_{ij}^l квадрат со сторонами, параллельными координатным осям, длины 2^{-l}, и с верхней правой вершиной в точке $(i2^{-l}, j2^{-l})$, где $i,j\in\{1,2,\dots,2^l\}$.

Рассмотрим разбиение σ_l области U, которое содержит квадраты K_{ij}^l в случае, если $K_{i(j+1)}^l \subset U$, множества $K_{ij}^l \cup \big(K_{i(j+1)}^l \cap U\big)$ в случае, когда квадрат K_{ij}^l содержится в U, а квадрат $K_{i(j+1)}^l$ не содержится полностью в U, и наконец множества $K_{i1} \cap U$ в случае, когда K_{i1} не содержится полностью в U. Для множеств первого и второго типа имеем $\big|E_k^l\big| \geq 2^{-2l}$, для всех множеств разбиения σ_l выполняется $\operatorname{diam}\big(E_k^l\big) \leq 2^{2-l}$. Очевидно, что худшая оценка меры среди всех множеств из σ_l имеет место для множества

$$E_1^l := K_{11}^l \cap U = \{(x,y) \mid x \in (0,2^{-l}), y \in (0,x^\lambda)\}.$$

Пусть $d\nu = x^\tau\, dxdy$. Имеем

$$\big|E_1^l\big| \approx 2^{-(1+\lambda)l}, \quad \nu\big(E_1^l\big) \approx 2^{-(1+\lambda+\tau)l}.$$

Для того чтобы для множества E_1^l выполнялось неравенство из условия теоремы 2, должно выполняться $q < \frac{p(1+\lambda+\tau)}{1+\lambda-p}$. Кроме того, рассмотрев остальные множества из σ_l, получаем неравенство $q < \frac{2p}{2-p}$. Таким образом, оптимальный показатель $\tau_{\rm opt}$ равен $-1-\lambda+\frac{2(1+\lambda-p)}{2-p}$. Для $\tau \geq \tau_{\rm opt}$ и $q < \frac{2p}{2-p}$ оператор вложения $W_p^1(U)$ в $L_q(U, x^\tau\, dxdy)$ вполне ограничен.

Пример 2. Пусть U — достаточно регулярная область в $\mathbb{R}^n$, V — пересечение k-мерной плоскости с U. Пусть μ — n-мерная мера Лебега, мера $\nu(E)$ множества $E \subset U$ равна k-мерной мере Лебега от пересечения $E \cap V$. Предположим, что $1 \leq q < \frac{pk}{n-rp}$. Тогда оператор вложения пространства $W_p^1(U)$ в пространство $L_q(V)$ ограничен и компактен.

Замечание 6. Как отмечено в доказательстве теоремы, в случае, когда из $\mu(E) = 0$ не следует $\nu(E) = 0$, естественным образом доопределяем рассматриваемую функцию, которая изначально определена μ-п.в. В этом случае оператор вложения можно называть также *оператором следа.*

Следствие 2. *Предположим, что для любого $x \in U$ и $\rho \in (0,R]$, где R — некоторая положительная постоянная, выполняется*

$$\mu(B(x,\rho)) \gtrsim \rho^{s_1}, \quad \nu(B(x,\rho)) \lesssim \rho^{s_2}.$$

Пусть $r \in (0,1]$, $1 \leq p \leq q < \frac{s_2 p}{s_1 - rp}$. Тогда оператор вложения $S_p^r(U,d\mu)$ в $L_q(U,d\nu)$ вполне ограничен. Если дополнительно предположить, что

$$\mu(B(x,\rho)) \lesssim \rho^{s_1}, \quad 0 < r_2 < r_1,\ 1 \leq p \leq q < \frac{s_2 p}{s_1 - (r_1 - r_2)p},$$

то вполне ограничен также оператор вложения $S_p^{r_1}(U,d\mu)$ в $S_q^{r_2}(U,d\nu)$.

Доказательство. Согласно построению из [18] найдутся число $\tau \in (0,1)$ и последовательность разбиений $\sigma_k \in \Sigma_{\tau^k}$ такие, что для любого k разбиение σ_{k+1} является измельчением разбиения σ_k и для каждого множества E_i^k из разбиения σ_k выполняется $U \cap B(x_{ik}, C_1\tau^k) \subset E_i^k \subset B(x_{ik}, C_2\tau^k)$, где C_1, C_2 — положительные постоянные, $x_{ik} \in U$ (в дальнейшем будем обозначать эти условия через $(*)$). Для доказательства компактности оператора вложения $S_p^r(U,d\mu)$ в $L_q(U,d\nu)$ остается воспользоваться теоремой 2 для последовательности разбиений σ_k, взяв в качестве a_k подходящую геометрическую прогрессию со знаменателем, меньшим единицы. Для доказательства компактности оператора вложения $S_p^{r_1}(U,d\mu)$ в $S_q^{r_2}(U,d\nu)$ достаточно дополнительно отметить, что последовательность разбиений σ_k удовлетворяет следующему условию:

$$\inf_{g \in G_{\sigma_k}} \|f-g\|_{L_p(U)} \geq C \sup_{\sigma \in \Sigma_{\tau^k}} \inf_{g \in G_{\sigma_k}} \|f-g\|_{L_p(U)},$$

где $C > 0$ не зависит от k и от f. Следствие доказано.

В связи с рядом вопросов важны оценки меры множества точек $x \in U$ таких, что для фиксированной функции $f \in S_p^r(U)$ и постоянной $A > 0$ выполняется неравенство $|f(x)| \geq A$.

Теорема 3. *Пусть $p \in [1, \infty)$, $r \in (0, 1]$, для любой точки $x \in U$ и положительного числа $\rho \leq R < \infty$ выполняется $\mu(B(x, \rho) \cap U) \gtrsim \rho^s$. Предположим, что $rp < s$. Тогда для произвольной функции $f \in S_p^r(U)$ и постоянной $A \in (0, \infty)$ верна оценка*

$$\mu(\{x \in U \mid |f(x)| \geq A\}) \leq C \left(\frac{\|f\|_{S_p^r(U)}}{A} \right)^{\frac{sp}{s-rp}}, \tag{10}$$

где C не зависит от f и A.

Доказательство. Фиксируем $f \in S_p^r(U)$. Рассмотрим $\tau \in (0, 1)$ и последовательность $\sigma_k \in \Sigma_{\tau^k}$, удовлетворяющую условиям $(*)$. Кроме того, рассмотрим последовательность кусочно постоянных функций $g_k \in G_{\sigma_k}$, наилучшим образом приближающих функцию f (среди всех функций из G_{σ_k}) по норме $L_p(U)$.

Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\mu(\{x \in U \mid |g_k(x)| \geq A/2\}) \leq \left(\frac{C\|f\|_{S_p^r(U)}}{A} \right)^p.$$

С другой стороны, из условия доказываемой теоремы и свойств разбиений σ_k следует, что для любого множества $E_i^k \in \sigma_k$ выполняются неравенства

$$\mu\big(E_i^k\big) \geq \mu(B(x_{ik}, C_1\tau^k) \cap U) \geq \widetilde{C}\tau^{ks}.$$

Возьмем в качестве k максимальное натуральное число, для которого

$$\tau^k > \left(\frac{1}{\widetilde{C}} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{C\|f\|_{S_p^r(U)}}{A} \right)^{\frac{p}{s}}.$$

Имеем

$$\tau^{k+1} \leq \left(\frac{1}{\widetilde{C}} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{C\|f\|_{S_p^r(U)}}{A} \right)^{\frac{p}{s}} \Rightarrow \tau^k \leq \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\widetilde{C}} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{C\ |f\|_{S_p^r(U)}}{A} \right)^{\frac{p}{s}}.$$

Учитывая, что доказываемое соотношение инвариантно относительно умножения функции f на $\lambda > 0$, т. е.

$$\frac{\|\lambda f\|_{S_p^r(U)}}{\lambda A} = \frac{\|f\|_{S_p^r(U)}}{A}, \quad \{x \in U \mid |\lambda f(x)| \geq \lambda A\} = \{x \in U \mid |f(x)| \geq A\},$$

будем предполагать, что

$$\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\widetilde{C}} \right)^{\frac{1}{s}} (C\|f\|_{S_p^r(U)})^{\frac{p}{s}} \leq 1, \quad 8\|f\|_{S_p^r(U)} \leq \widetilde{C}^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно,

$$\tau^k \leq \left(\frac{1}{A} \right)^{\frac{p}{s}}.$$

По построению функции g_k множество $\{x \in U \mid |g_k(x)| \geq A/2\}$ пусто. Далее,

$$f = g_k + f - g_k, \quad \{x \in U \mid |f(x)| \geq A\} \subset \{x \in U \mid |f(x) - g_k(x)| \geq A/2\}.$$

Стало быть,

$$\mu(\{x \in U \mid |f(x)| \geq A\}) \leq \mu(\{x \in U \mid |f(x) - g_k(x)| \geq A/2\}) \leq \left(\frac{2\|f - g_k\|_{L_p(U)}}{A}\right)^p.$$

В силу определения 2 получаем

$$2\|f - g_k\|_{L_p(U)} \leq 2\tau^{rk}[f]_{S_p^r(U)} \leq 2\tau^{rk}\|f\|_{S_p^r(U)} \leq \frac{\widetilde{C}^{\frac{1}{p}}}{4}\tau^{rk} \leq \frac{\widetilde{C}^{\frac{1}{p}}}{4A^{\frac{rp}{s}}},$$

откуда

$$\mu(\{x \in U \mid |f(x)| \geq A\}) \leq \left(\frac{\widetilde{C}^{\frac{1}{p}}}{4A^{1+\frac{rp}{s}}}\right)^p.$$

Аналогично для $n \geq k$

$$\mu(\{x \in U \mid |g_n(x)| \geq A\}) \leq \mu(\{x \in U \mid |g_n(x) - g_k(x)| \geq A/2\})$$
$$\leq \left(\frac{2\|g_n - g_k\|_{L_p(U)}}{A}\right)^p \leq \left(\frac{2(\|f - g_n\|_{L_p(U)} + \|f - g_k\|_{L_p(U)})}{A}\right)^p \leq \left(\frac{\widetilde{C}^{\frac{1}{p}}}{2A^{1+\frac{rp}{s}}}\right)^p.$$

Для $n < k$ оцениваемое множество пусто, т. е. неравенство выполняется для всех n. Далее,

$$\mu(\{x \in U \mid |g_n(x)| \geq A/2\}) \leq \left(\frac{\widetilde{C}^{\frac{1}{p}}}{2(A/2)^{1+\frac{rp}{s}}}\right)^p \leq \left(\frac{\widetilde{C}^{\frac{1}{p}}}{A^{1+\frac{rp}{s}}}\right)^p.$$

Ранее мы использовали утверждение

$$\tau^k > \frac{1}{A^{\frac{p}{s}}} \Rightarrow \{x \in U \mid |g_k(x)| \geq A/2\} = \varnothing.$$

Неравенство

$$\mu(\{x \in U \mid |g_k(x)| \geq A/2\}) \leq \frac{\widetilde{C}}{A^{p+\frac{p^2 r}{s}}}$$

позволяет усилить это утверждение и показать, что

$$\tau^k > \frac{1}{A^{\frac{p}{s}+\frac{p^2 r}{s^2}}} \Rightarrow \{x \in U \mid |g_k(x)| \geq A/2\} = \varnothing.$$

Таким образом, имеем рекурсию. Повторяя предыдущие рассуждения, получаем

$$\mu(\{x \in U \mid |f(x)| \geq A\}) \leq \left(\frac{\widetilde{C}^{\frac{1}{p}}}{4A^{1+\frac{pr}{s}+\frac{p^2r^2}{s^2}}}\right)^p,$$

т. е. для любого k выполняется

$$\mu(\{x \in U \mid |f(x)| \geq A\}) \leq \left(\frac{\widetilde{C}^{\frac{1}{p}}}{4A^{1+\frac{pr}{s}+\frac{p^2r^2}{s^2}+\dots+\frac{p^k r^k}{s^k}}}\right)^p.$$

Очевидно, что можно перейти к пределу при $k \to \infty$ и получить

$$\mu(\{x \in U \mid |f(x)| \geq A\}) \leq \left(\frac{C_1}{A^{\frac{1}{1-\frac{pr}{s}}}}\right)^p = \left(\frac{C_2}{A}\right)^{\frac{sp}{s-rp}}.$$

Для произвольной функции f без условия нормировки имеем

$$\mu(\{x \in U \mid |f(x)| \geq A\}) \leq \left(\frac{C_3 \|f\|_{S_p^r(U)}}{A}\right)^{\frac{sp}{s-rp}}.$$

Теорема доказана.

При доказательстве (10) использовано неравенство

$$\mu(\{x \in U \mid |f(x)| \geq A\}) \leq \frac{\int\limits_U |f(x)|\, d\mu(x)}{A}.$$

Очевидно, что оно может быть усилено до следующего неравенства: если множество E измеримо, то

$$\mu(\{x \in U \mid |f(x)| \in E\}) \leq \frac{\int\limits_E |f(x)|\, d\mu(x)}{\inf E}.$$

Для того чтобы по аналогии усилить (10), необходимо придать смыслы выражению $[f]_{S_p^r(E)}$, $E \subset U$. Исходя из логики доказательства теоремы 3, можем рассматривать не произвольное измеримое множество E, а только множества, представляющие собой конечные объединения множеств, принадлежащих разбиениям σ_k.

Обозначим через Ξ_k набор множеств из σ_k вместе с их объединениями, $\Xi = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Xi_k$. Для любого $s \geq k$ произвольное множество $E \subset \Xi_k$ может быть однозначно представлено в виде объединения множеств из σ_s. Соответствующий набор индексов обозначим через $I_{k,s,E}$. Рассмотрим функцию множеств

$$m_{r,p,f}(E) = \sup_{s \geq k} \sum_{i \in I_{k,s,E}} \min_{a_{is} \in \mathbb{R}} \int\limits_{E_{is}} \frac{|f(x) - a_{is}|^p}{\tau^{rps}}\, ds.$$

Следствие. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 3. *Пусть* $\tau < 1$, *последовательность разбиений* σ_k *удовлетворяет условиям* $(*)$. *Предположим, что заданная на* Ξ *функция множеств* $m_{r,p,f}(E)$ *мажорируется заданной на* Ξ *супераддитивной функцией множеств* $\tilde{m}(E)$, *т. е. для любого множества* $E \in \Xi$ *выполняется* $m_{r,p,f}(E) \leq \tilde{m}(E)$ *и для любых непересекающихся множеств* $E_1, \ldots, E_n \in \Xi$ *справедливо*

$$\tilde{m}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \tilde{m}(E_i).$$

Пусть $\tilde{m}(U) < \infty$. *Тогда функция* f *принадлежит пространству* $L_{\frac{sp}{s-rp}}(U)$.

Доказательство. Обозначим через g_k функцию из G_{σ_k}, наилучшим образом приближающую функцию $f \in S_p^r(U)$ по норме $L_p(U)$. Легко видеть, что для доказательства требуемого утверждения достаточно получить равномерную по k оценку L_q-нормы функций g_k. Фиксируем k. Представим множество U в виде объединения непересекающихся множеств

$$V_i^k := \{x \in U \mid |g_k(x)| \in [2^{i-1}, 2^i)\},\ i = 1, 2, \ldots, \quad V_0^k := \{x \in U \mid |g_k(x)| \in [0, 1)\}.$$

Практически дословно повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3, получаем, что для достаточно больших i ($i \geq i_0$, i_0 не зависит от k) выполняется

$$\mu\big(V_i^k\big) \leq C\bigg(\frac{\big(m_{r,p,f}\big(V_i^k\big)\big)^{\frac{1}{p}}}{2^i}\bigg)^{\frac{sp}{s-rp}}.$$

Отсюда, обозначив $q := \frac{sp}{s-rp}$, имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_U |g_k(x)|^q\,d\mu(x) &\leq \widetilde{C}\int\limits_U |g_k(x)|^p\,d\mu(x) + \sum_{i=i_0}^{\infty}\mu\big(V_i^k\big)2^{iq} \\ &\leq \widetilde{\widetilde{C}}\int\limits_U |f(x)|^p\,d\mu(x) + C\sum_{i=1}^{\infty}\big(m_{r,p,f}\big(V_i^k\big)\big)^{\frac{q}{p}},\end{aligned}$$

где C и $\widetilde{\widetilde{C}}$ не зависят от k. Остается оценить величину $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\big(m_{r,p,f}\big(V_i^k\big)\big)^{\frac{q}{p}}$. В силу $\frac{q}{p} \geq 1$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\big(m_{r,p,f}\big(V_i^k\big)\big)^{\frac{q}{p}} &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}m_{r,p,f}\big(V_i^k\big)\right)^{\frac{q}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{m}\big(V_i^k\big)\right)^{\frac{q}{p}} \leq \left(\tilde{m}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}V_i^k\right)\right)^{\frac{q}{p}} < \infty.\end{aligned}$$

Следствие доказано.

Будем называть *t-вместимостью множества $E \subset U$* величину

$$c_t^*(E) := \liminf_{\rho\to 0}\left(\inf\left\{m\rho^t \mid E \subset \bigcup_{i=1}^{m}B(x_i,\rho)\right\}\right).$$

Ввиду того, что $\|f\|_{L_p(U)} \leq \|f\|_{S_p^r(U)}$, из сходящейся по норме пространства $S_p^r(U)$ последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся μ-п.в. Усилим это утверждение, показав, что для подходящих t из сходящейся по норме пространства $S_p^r(U)$ последовательности можно выделить подпоследовательность, которая сходится всюду, за исключением множества, имеющего нулевую t-вместимость.

Теорема 4. *Пусть $p \in [1,\infty)$, $r \in (0,1)$, для любой точки $x \in U$ и положительного числа $\rho \leq R < \infty$ выполняется $\mu(B(x,\rho)\cap U) \gtrsim \rho^s$. Предположим, что $rp \leq s$, $t > s - rp$. Пусть последовательность функций f_n сходится по норме пространства $S_p^r(U)$ к нулю. Тогда из последовательности f_n можно выделить подпоследовательность, которая сходится к нулю всюду, за исключением множества E такого, что $c_t^*(E) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим $\tau \in (0,1)$ и последовательность разбиений σ_k, удовлетворяющую условиям $(*)$. Каждой функции f_n сопоставим последовательность кусочно постоянных функций g_n^k, наилучшим образом приближающих функцию f_n по норме пространства $L_p(U)$ среди всех кусочно постоянных функций, подчиненных покрытию σ_k.

Поскольку $\|f_n\|_{S_p^r(U)} \to 0$ и

$$\mu\Big(\Big\{x \in U \mid \big|g_n^k(x)\big| \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big\}\Big) \leq \left(\frac{\big\|g_n^k\big\|_{L_p(U)}}{\frac{\varepsilon}{2}}\right)^p \lesssim \left(\frac{\|f_n\|_{S_p^r(U)}}{\frac{\varepsilon}{2}}\right)^p,$$

для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n \geq N$ имеет место равенство $\big\{x \in U \mid \big|g_n^k(x)\big| \geq \frac{\varepsilon}{2}\big\} = \varnothing$. Действительно, функция g_n^k принимает конечное число значений, причем каждое значение она принимает на множестве, мера которого не меньше $C\tau^{ks}$. Следовательно, если в правой части приведенного выше неравенства стоит число, меньшее, чем $C\tau^{ks}$, то множество $\big\{x \in U \mid \big|g_n^k(x)\big| \geq \frac{\varepsilon}{2}\big\}$ должно быть пусто.

Как и выше, положим $h_n^k := g_n^{k+1} - g_n^k$, $k = 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$. Имеем

$$\big\|h_n^k\big\|_{L_p(U)} \leq 2\tau^{kr}[f_n]_{S_p^r(U)},$$

откуда

$$\mu\big(\big\{x \in U \mid \big|h_n^k(x)\big| \geq \xi\big\}\big) \leq \left(\frac{\big\|h_n^k\big\|_{L_p(U)}}{\xi}\right)^p \leq \left(\frac{2\tau^{kr}[f_n]_{S_p^r(U)}}{\xi}\right)^p.$$

Принимая во внимание то, что функция h_n^k кусочно постоянна и подчинена покрытию σ_{k+1}, состоящему из множеств, каждое из которых содержит пересечение U с шаром радиуса $C_1\tau^{k+1}$ и содержится в шаре радиуса $C_2\tau^{k+1}$, получаем, что множество $\big\{x \in U \mid \big|h_n^k(x)\big| \geq \xi\big\}$ может быть покрыто набором шаров радиуса $C_2\tau^{k+1}$, число которых не превосходит величины $C_3\tau^{k(rp-s)}\big(\frac{[f_n]_{S_p^r(U)}}{\xi}\big)^p$. Обозначим

$$c^*_{t,\rho}(E) := \inf_{\tilde\rho \geq \rho}\left(\inf\left\{m\tilde\rho^t \mid E \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \tilde\rho)\right\}\right).$$

Тогда

$$c^*_{t,C_2\tau^{k+1}}\big(\big\{x \in U \mid \big|h_n^k(x)\big| \geq \xi\big\}\big) \leq C_4\tau^{k(rp-s+t)}\left(\frac{[f_n]_{S_p^r(U)}}{\xi}\right)^p.$$

С другой стороны, для любого $n \geq N(k)$ выполняется

$$\{x \in U \mid |f_n(x)| \geq \varepsilon\} \subset \Big\{x \in U \mid \big|f - g_n^k(x)\big| \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big\} \subset \left\{x \in U \mid \sum_{j=k}^{\infty}\big|h_n^j(x)\big| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Обозначим $\lambda := rp - s + t$, по условию $\lambda > 0$. Имеем

$$c^*_{t,C_2\tau^{k+1}}\big(\big\{x \in U \mid \big|h_n^k(x)\big| \geq \tau^{\frac{k\lambda}{2p}}\big\}\big) \leq C_4\tau^{\frac{k\lambda}{2}}([f_n]_{S_p^r(U)})^p.$$

Найдется натуральное число k_0 такое, что для всех $k \geq k_0$

$$\sum_{j=k}^{\infty}\tau^{\frac{j\lambda}{2p}} = \frac{\tau^{\frac{k\lambda}{2p}}}{1 - \tau^{\frac{\lambda}{2p}}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Соответственно для любого $k \geq k_0$ и любого n

$$\bigcup_{j=k}^{\infty}\big\{x \in U \mid \big|h_n^j(x)\big| \geq \tau^{\frac{j\lambda}{2p}}\big\} \supset \left\{x \in U \mid \sum_{j=k}^{\infty}\big|h_n^j(x)\big| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Функция множеств $c^*_{t,\rho}$ монотонна и субаддитивна. В итоге получаем, что при любом $k \geq k_0(\varepsilon)$ для $n \geq N(k)$ выполняется

$$c^*_{t,C_2\tau^{k+1}}(\{x \in U \mid |f_n(x)| \geq \varepsilon\}) \leq C_4 \frac{\tau^{\frac{k\lambda}{2p}}}{1-\tau^{\frac{\lambda}{2p}}}([f_n]_{S^r_p(U)})^p \leq C_5([f_n]_{S^r_p(U)})^p.$$

Рассмотрим последовательность положительных чисел ε_m, монотонно сходящуюся к нулю. Положим $k^1_1 = k_0(\varepsilon_1)$, $n^1_1 := N(k^1_1)$. В силу последнего неравенства из последовательности $f_{n^1_1}, f_{n^1_1+1}, f_{n^1_1+2}, \dots$ можно выбрать подпоследовательность $f_{n^1_i}$ такую, что $\limsup\limits_{i\to\infty} |f_{n^1_i}(x)| < \varepsilon_1$ для всех $x \in U$, не принадлежащих множеству $\widetilde{E}_1$, которое удовлетворяет соотношению $c^*_{t,C_2\tau^{k^1_1+1}}(\widetilde{E}_1) = 0$.

Для $m = 2$ из этой подпоследовательности можно, в свою очередь, выбрать подпоследовательность, удовлетворяющую $\limsup\limits_{i\to\infty} |f_{n^2_i}(x)| < \varepsilon_2$ для всех $x \in U$, не принадлежащих множеству $\widetilde{E}_2$, для которого выполняется $c^*_{t,C_2\tau^{k^2_1+1}}(\widetilde{E}_2) = 0$.

Этот процесс можно продолжить. Подпоследовательности с номером j будет соответствовать набор индексов $n^j_1 < n^j_2 < n^j_3 < \dots$.

Рассмотрим набор индексов $n^1_1 < n^2_2 < n^3_3 < \dots < n^j_j < \dots$.

Нетрудно видеть, что для соответствующей подпоследовательности $f_{n_i} := f_{n^i_i}$ имеет место соотношение $\lim\limits_{i\to\infty} |f_{n_i}(x)| = 0$ для всех $x \in U$, не принадлежащих множеству $\widetilde{E}$, удовлетворяющему $c^*_{t,\rho}(\widetilde{E}) = 0$ для любого $\rho > 0$. Теорема доказана.

В статье [18] были рассмотрены функциональные классы, аналогичные пространствам Орлича и Соболева — Орлича. Шкала пространств Орлича расширяет шкалу пространств L_p, соответственно пространства Соболева — Орлича состоят из функций, которые имеют обобщенные производные, принадлежащие пространствам Орлича. В некоторых случаях использование пространств Орлича или Соболева — Орлича позволяет уточнять теоремы вложения, например, в работе С. И. Похожаева [26] получен точный результат о вложении пространства $W^1_n(U)$, где U — достаточно регулярная область $\mathbb{R}^n$. В случае, рассмотренном в [18], шкала функциональных классов, аналогичных пространствам Соболева — Орлича, актуальна в связи с рассмотрением метрических пространства бесконечной размерности. В самом деле, согласно классическим теоремам вложения $W^1_p(U) \hookrightarrow L_{\frac{np}{n-p}}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем тривиальное вложение в L_p. Для того чтобы получить содержательный результат в бесконечномерном случае, можно рассмотреть пространство Соболева — Орлича (см. [18]).

Далее изучаем случай, когда пространство $S^r_p(U)$ вкладывается в любое пространство $L_q(U)$, но не вкладывается в пространство непрерывных функций. Этот промежуточный случай не был затронут в [18]. Он аналогичен случаю, рассмотренному С. И. Похожаевым в [26] (см. также [28–30]).

Напомним, что

$$\|f\|_{L_{\infty-\gamma}(U)} = \sup_{p\in[1,\infty)} \frac{\|f\|_{L_p(U)}}{p^\gamma}.$$

Пространство $L_{\infty-\gamma}(U)$ состоит из функций f таких, что $\|f\|_{L_{\infty-\gamma}(U)} < \infty$.

Функциональные пространства $L_{\infty-\gamma}(U)$ являются аналогами пространств Орлича, порождаемых экспоненциально растущими функциями. Норма (1) более удобна по сравнению с нормой Орлича для получения интересующих нас оценок.

Отметим, что $L_{\infty-\gamma}(U)$ сепарабельны, поскольку $\|\chi(E)\|_{L_{\infty-\gamma}(U,d\mu)} \to 0$, когда $\mu(E) \to 0$. Кроме того, для любых двух функций f и g, принадлежащих $L_{\infty-\gamma}(U)$, их произведение принадлежит $L_{\infty-2\gamma}(U)$. Последнее утверждение доказывается простым применением неравенства Гёльдера. Действительно,

$$\frac{\|fg\|_{L_p(U)}}{p^{2\gamma}} \le 2^{2\gamma} \frac{\|f\|_{L_{2p}(U)}}{(2p)^{\gamma}} \frac{\|g\|_{L_{2p}(U)}}{(2p)^{\gamma}} \le 2^{2\gamma} \|f\|_{L_{\infty-\gamma}(U)} \|g\|_{L_{\infty-\gamma}(U)}.$$

Теорема 5. *Пусть U — вполне ограниченное открытое множество в метрическом пространстве (X,ρ), на X задана мера μ. Пусть $p \in [1,\infty)$, $0 < r \le 1$. Предположим, что можно построить последовательность разбиений σ_k, каждое из которых является измельчением предыдущего, множества U на измеримые (относительно меры μ) непересекающиеся множества E_i^k такие, что для некоторого $\tau < 1$*

$$\operatorname{diam}\bigl(E_i^k\bigr) \le C_1 \tau^k, \quad \frac{1}{\bigl(\mu\bigl(E_i^k\bigr)\bigr)^{\frac{1}{p}}} \le \frac{C_2}{\tau^{rk}}. \tag{11}$$

Тогда пространство $S_p^r(U)$ вкладывается в пространство $L_{\infty-\gamma}(U)$ (см. (1)) для любого $\gamma \ge 1$, причем оператор вложения ограничен для всех $\gamma \ge 1$ и компактен для $\gamma > 1$.

Доказательство. В силу определения 2 для каждого разбиения σ_k найдется функция g_k, постоянная на каждом множестве E_i^k из этого разбиения, такая, что

$$\|f - g_k\|_{L_p(U,d\mu)} \le C_1^r \tau^{rk} [f]_{S_p^r(U,d\mu)}.$$

Обозначим $h_k := g_{k+1} - g_k$, $k = 1, 2, \dots$. Имеем

$$\|h_k\|_{L_p(U,d\mu)} \le \|f - g_k\|_{L_p(U,d\mu)} + \|f - g_{k+1}\|_{L_p(U)} \le 2C_1^r \tau^{rk} [f]_{S_p^r(U,d\mu)}. \tag{12}$$

В силу неравенств (11) и (12) для $q > p$ имеем

$$\|h_k\|_{L_q(U)} \lesssim \max_i \frac{\tau^{rk}[f]_{S_p^r(U,d\mu)}}{\bigl(\mu\bigl(E_i^k\bigr)\bigr)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \lesssim \frac{\tau^{rk}[f]_{S_p^r(U,d\mu)}}{(\tau^{rkp})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} = \tau^{\frac{rkp}{q}} [f]_{S_p^r(U,d\mu)}. \tag{13}$$

Суммируя (13) по k, получаем

$$\|f\|_{L_q(U)} \lesssim \frac{1}{1 - \tau^{\frac{rp}{q}}} \|f\|_{S_p^r(U)}. \tag{14}$$

Это означает, что для любого $q \in (p,\infty)$ оператор вложения $S_p^r(U)$ в $L_q(U)$ ограничен и его норма не превосходит $\frac{C}{1-\tau^{\frac{rp}{q}}}$, где C не зависит от q.

Напомним, что согласно (1)

$$\|f\|_{L_{\infty-1}(U)} = \sup_{q\in[1,\infty)} \frac{\|f\|_{L_q(U)}}{q}.$$

В силу (14) получаем

$$\|f\|_{L_{\infty-1}(U)} \lesssim \sup_{q\in[1,\infty)} \frac{1}{q(1-\tau^{\frac{rp}{q}})} \|f\|_{S_p^r(U)} \lesssim \|f\|_{S_p^r(U)}.$$

Таким образом, оператор вложения $S_p^r(U)$ в $L_{\infty-1}(U)$ ограничен. Пространство $L_{\infty-1}(U)$ является аналогом пространства Орлича с экспоненциально растущей порождающей функцией. Соответственно этот результат можно рассматривать как обобщение на метрический случай результата С. И. Похожаева [26], доказанного для функций, заданных в области $\mathbb{R}^n$ (см. также [28–30]).

Покажем, что оператор вложения $S_p^r(U)$ в $L_{\infty-\gamma}(U)$ компактен для $\gamma > 1$. Просуммировав (13) по k от m до бесконечности, получим

$$\|f - g_m\|_{L_q(U)} \lesssim \frac{\tau^{\frac{rpm}{q}}}{1 - \tau^{\frac{rp}{q}}} \|f\|_{S_p^r(U)}.$$

Далее,

$$\|f - g_m\|_{L_{\infty-\gamma}(U)} \lesssim \sup_{q \in [1,\infty)} \frac{\tau^{\frac{rpm}{q}}}{q^{\gamma-1}} \frac{1}{q(1 - \tau^{\frac{rp}{q}})} \|f\|_{S_p^r(U)} \lesssim \sup_{q \in [1,\infty)} \frac{\tau^{\frac{rpm}{q}}}{q^{\gamma-1}} \|f\|_{S_p^r(U)}.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{q \in [1,\infty)} \frac{\tau^{\frac{rpm}{q}}}{q^{\gamma-1}} = 0.$$

Таким образом, $\|f - g_m\|_{L_{\infty-\gamma}(U)} \lesssim a_m \|f\|_{S_p^r(U)}$, где $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = 0$. Последняя оценка позволяет практически дословно перенести рассуждения из доказательства теоремы 1. Теорема доказана.

3. Вариационная задача

Пусть $1 < p < \infty$, $0 < r \leq 1$. Рассмотрим линейный ограниченный оператор R, заданный на пространстве $S_p^r(U)$, со значениями в некотором линейном нормированном пространстве V. Будем предполагать, что для любой функции $f \in S_p^r(U)$ выполняется следующее соотношение:

$$\|f\|_{L_p(U)} \lesssim [f]_{S_p^r(U)} + \|R(f)\|_F. \tag{15}$$

В этой части работы будем изучать задачу об отыскании функции, минимизирующей функционал «энергии» $E_{p,r}(u) := [u]^p_{S_p^r(U)}$ на множестве всех функций из $S_p^r(U)$, удовлетворяющих условию $R(u) = v$ для фиксированного $v \in V$.

Ясно, что минимизация функционала «энергии» $E_{p,r}(u)$ эквивалентна минимизации полунормы $[u]_{S_p^r(U)}$.

Будем использовать неравенства Кларксона (см., например, [1, 31]), которые выполняются для произвольного пространства с мерой и имеют следующий вид:

$$\left\|\frac{f_1+f_2}{2}\right\|^p_{L_p} + \left\|\frac{f_1-f_2}{2}\right\|^p_{L_p} \leq \frac{1}{2}\big(\|f_1\|^p_{L_p} + \|f_2\|^p_{L_p}\big), \quad p \in [2,\infty);$$

$$\left\|\frac{f_1+f_2}{2}\right\|^q_{L_p} + \left\|\frac{f_1-f_2}{2}\right\|^q_{L_p} \leq \left(\frac{1}{2}\|f_1\|^p_{L_p} + \frac{1}{2}\|f_2\|^p_{L_p}\right)^{\frac{q}{p}}, \quad p \in (1,2),\ q = \frac{p}{p-1}.$$

Покажем сначала, что решение поставленной задачи единственно. Будем рассуждать от противного. Предположим, что есть две различные функции $f_1, f_2 \in S_p^r(U)$ такие, что $R(f_1) = R(f_2) = v$ и для любой функции $f \in S_p^r(U)$, удовлетворяющей $R(f) = v$, выполняется неравенство $E_{p,r}(f) \geq E_{p,r}(f_1) = E_{p,r}(f_2) := E_{\min}$.

Положим $\tilde f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$. Тогда $\tilde f \in S_p^r(U)$, $R(\tilde f) = \frac{1}{2}(R(f_1) + R(f_2)) = v$.

Оценим $E_{p,r}(\tilde f)$. Пусть сначала $p \geq 2$. Рассмотрим произвольное число $\delta > 0$ и произвольное разбиение $\sigma \in \Sigma_\delta$. Предположим, что кусочно постоянные функции $g_1, g_2 \in G_\sigma$ наилучшим образом приближают по норме пространства $L_p(U)$ функции f_1 и f_2 соответственно. Обозначим $\tilde g := \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$, $h_1 := \frac{f_1 - g_1}{\delta^r}$, $h_2 := \frac{f_2 - g_2}{\delta^r}$, $\tilde h := \frac{\tilde f - \tilde g}{\delta^r}$.

В силу первого неравенства Кларксона имеем

$$\|\tilde h\|^p_{L_p(U)} \leq \frac{1}{2}\big(\|h_1\|^p_{L_p} + \|h_2\|^p_{L_p}\big) - \left\|\frac{h_1 - h_2}{2}\right\|^p_{L_p}.$$

Из определения полунормы в пространстве $S_p^r(U)$ следует, что выполняются неравенства $\|h_1\|^p_{L_p} \leq E_{p,r}(f_1)$, $\|h_2\|^p_{L_p} \leq E_{p,r}(f_2)$.

Ввиду произвольности $\delta > 0$ и $\sigma \in \Sigma_\delta$ получаем

$$E_{p,r}(\tilde f) = [\tilde f]^p_{S_p^r(U)} \leq E_{\min} - \left[\frac{f_1 - f_2}{2}\right]^p_{S_p^r(U)}.$$

По предположению $\|f_1 - f_2\|_{S_p^r(U)} > 0$. Далее, из (15) и равенства $R(f_1 - f_2) = 0$ вытекает, что $[f_1 - f_2]_{S_p^r(U)} > 0$. В итоге $E_{p,r}(\tilde f) < E_{\min}$, что противоречит предположению и завершает доказательство единственности в случае $p \geq 2$.

В случае $p \in (1, 2]$ следует использовать второе неравенство Кларксона, которое можно переписать в виде

$$\left\|\frac{f_1 + f_2}{2}\right\|^p_{L_p} \leq \left(\left(\frac{1}{2}\|f_1\|^p_{L_p} + \frac{1}{2}\|f_2\|^p_{L_p}\right)^{\frac{q}{p}} - \left\|\frac{f_1 - f_2}{2}\right\|^q_{L_p}\right)^{\frac{p}{q}}, \; p \in (1, 2), \; q = \frac{p}{p-1}.$$

Остальные рассуждения останутся прежними.

Отметим, что при доказательстве единственности использовали более слабое, чем соотношение (15), условие на оператор R, а именно то, что из равенств $[f]_{S_p^r(U)} = 0$ и $R(f) = 0$ следует $\|f\|_{L_p}(U) = 0$.

Легко видеть, что из $[f]_{S_p^r(U)} = 0$ вытекает равенство функции f константе. Действительно, возьмем $\delta = \operatorname{diam}(U)$, $\sigma = \{U\}$. Из определения полунормы $[\cdot]_{S_p^r(U)}$ следует $\min\limits_{C \in \mathbb{R}} \|f - C\|_{L_p(U)} \lesssim [f]_{S_p^r(U)}$. В нашем случае $\min\limits_{C \in \mathbb{R}} \|f - C\|_{L_p(U)} = 0$, т. е. функция f равна некоторой константе почти всюду. Обозначим эту константу через $\widetilde C$. Имеем

$$\|f - \widetilde C\|_{S_p^r(U)} = \|f - \widetilde C\|_{L_p(U)} + [f]_{S_p^r(U)} = 0.$$

Следовательно, можно говорить, что $f = \widetilde C$ как элемент пространства $S_p^r(U)$.

Таким образом, для доказательства единственности решения рассматриваемой вариационной задачи достаточно наложить на оператор R следующее условие: если функция f равна константе C и $R(f) = 0$, то $C = 0$. Этому условию удовлетворяют, например, операторы следа.

Перейдем к доказательству существования решения вариационной задачи. Будем предполагать, что оператор R сюръективен, т. е. множество $\big\{f \in S_p^r(U) \mid R(f) = v\big\}$ непусто для любого $v \in V$.

Рассмотрим последовательность $f_k \in S_p^r(U)$ такую, что $R(f_k) = v$ для всех k и

$$\lim_{k \to \infty} E_{p,r}(f_k) = E_{\min} := \inf_{f \in S_p^r(U), R(f) = v} E_{p,r} f,$$

т. е. последовательность, минимизирующую функционал $f \mapsto E_{p,r}(f)$ при условии $R(f) = v$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Предположим, что для любого $l \geq k$ выполняется $E_{p,r}(f_l) < E_{\min} + \varepsilon$. Фиксируем $i, j \geq k$. Пусть $p \geq 2$. Используя те же рассуждения, что и при доказательстве единственности, получаем

$$\left[\frac{f_j - f_i}{2}\right]^p_{S_p^r(U)} \leq E_{\min} - E_{p,r}\left(\frac{f_j + f_i}{2}\right) + \varepsilon. \tag{16}$$

Очевидно, что

$$E_{\min} - E_{p,r}\left(\frac{f_j + f_i}{2}\right) + \varepsilon \leq \varepsilon.$$

В силу (15) имеем $\|f_j - f_i\|_{S_p^r(U)} \lesssim [f_j - f_i]_{S_p^r(U)} \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Таким образом, последовательность f_k фундаментальна. Она имеет предел, поскольку пространство $S_p^r(U)$ полно. Обозначим этот предел через $\tilde{f}$. Очевидно, что $E_{p,r}(\tilde{f}) = E_{\min}$. В силу ограниченности оператора R имеем $R(\tilde{f}) = \lim\limits_{k\to\infty} R(f_k) = v$, т. е. $\tilde{f}$ является решением рассматриваемой задачи. В случае $p \in (1, 2)$ рассуждения аналогичны. Отличие состоит только в том, что вместо неравенства (16) следует использовать неравенство

$$\left[\frac{f_j - f_i}{2}\right]^p_{S_p^r(U)} \leq \left((E_{\min} + \varepsilon)^{\frac{q}{p}} - \left(E_{p,r}\left(\frac{f_j + f_i}{2}\right)\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}} \lesssim \varepsilon^{\frac{p}{q}} = \varepsilon^{p-1}.$$

В итоге доказали следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < r \leq 1$, *линейный оператор* $R : S_p^r(U) \to V$ *ограничен, сюръективен и удовлетворяет* (15). *Тогда решение вариационной задачи*

$$E_p^r(u) \mapsto \min \ \textit{при ограничении } R(u) = v \in V$$

существует и единственно.

Автор выражает благодарность рецензенту за ряд полезных замечаний и предложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
2. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
4. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
5. *Triebel H.* Limits of Besov norms // Arch. Math. 2011. V. 96, N 2. P. 169–175.
6. *Bojarski B., Hajlasz P.* Pointwise inequalities for Sobolev functions and some applications // Studia Math. 1993. V. 106, N 1. P. 77–92.
7. *Hajlasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces // Potential Anal. 1996. V. 5, N 4. P. 403–415.
8. *Franchi B., Hajlasz P., Koskela P.* Definitions of Sobolev classes on metric spaces // Ann. Inst. Fourier. 1999. V. 49, N 6. P. 1903–1924.
9. *Hajlasz P., Koskela P.* Sobolev met Poincaré // Mem. Amer. Math. Soc. 2000. V. 145, N 688. P. 1–101.
10. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. Berlin: Springer-Verl., 2001.
11. *Gol'dshtein V. M., Troyanov M.* Axiomatic theory of Sobolev spaces // Expo. Math. 2001. V. 19, N 4. P. 289–336.

12. *Bojarski B.* Pointwise characterization of Sobolev classes // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2006. V. 255, N 1. P. 71-87.
13. *Johnsson A.* Brownian motion on fractals and function spaces // Math. Z. 1996. Bd 222, Heft 3. S. 495–504.
14. *Barlow M. T.* Diffusions on fractals. Lectures on probability theory and statistics. Berlin: Springer-Verl., 1998. (Lecture Notes Math.; V. 1690).
15. *Lott J., Villani C.* Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport // Ann. Math. 2009. V. 169, N 3. P. 903–991.
16. *Ambrosio L., Gigli N., Savare G.* Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures. Basel: Birkhauser-Verl., 2008. (Lectures in Mathematics ETH Zurich).
17. *Kuwada K.* Duality on gradient estimates and Wasserstein controls // J. Funct. Anal. 2010. V. 258, N 11. P. 3758–3774.
18. *Романовский Н. Н.* Классы Соболева на произвольном метрическом пространстве с мерой. Компактность операторов вложения // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 2. С. 450–457.
19. *Дезин А. А.* К теоремам вложения и задаче о продолжении функций // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88, № 5. С. 741–743.
20. *Брудный Ю. А.* Критерии существования производных в L_p // Мат. сб. 1967. Т. 73, № 1. С. 42–65.
21. *Иванишко И. А., Кротов В. Г.* Компактность вложений соболевского типа // Мат. заметки. 2009. Т. 86, № 6. С. 829–844.
22. *Кротов В. Г.* Критерии компактности в пространствах L_p, $p > 0$ // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 7. С. 129–148.
23. *Водопьянов С. К., Романовский Н. Н.* Классы отображений Соболева на пространствах Карно — Каратеодори. Различные нормировки и вариационные задачи // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1028–1045.
24. *Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F.* Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2007.
25. *Jerison D.* The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander′s condition // Duke Math. J. 1986. V. 53, N 2. P. 503–523.
26. *Похожаев С. И.* О теореме вложения С. Л. Соболева в случае $pl = n$ // Докл. науч.-техн. конф., секция мат. М.: МЭИ, 1965. С. 158–170.
27. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals I // Math. Z. 1928. Bd 27. S. 565–606.
28. *Trudinger N. S.* On embeddings into Orlicz spaces and some applications // J. Math. Mech. 1967. V. 17, N 5. P. 473–483.
29. *Cianchi A. A.* Sharp embedding theorem for Orlicz–Sobolev spaces // Indiana Univ. Math. J. 1996. V. 45, N 1. P. 39–65.
30. *Трушин Б. В.* Вложение пространства Соболева в пространства Орлича для области с нерегулярной границей // Мат. заметки. 2006. Т. 79, № 5. С. 767–778.
31. *Clarkson J. A.* Uniformly convex spaces // Trans Amer. Math. Soc. 1936. V. 40, N 3. P. 396–414.

Статья поступила 6 августа 2013 г.

Романовский Николай Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
nnrom@math.nsc.ru