Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2014. Том 55, № 3

УДК 517.5

О ВОССТАНОВЛЕНИИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУНКЦИЙ ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Е. Д. Нурсултанов, Н. Т. Тлеуханова

Аннотация. Построен оператор восстановления мультипликативных преобразований функций из анизотропных пространств по их значениям в заданном числе точек. Показано, что погрешность восстановления функции из W_p^α по порядку совпадает с соответствующим ортопоперечником.

Ключевые слова: оператор восстановления функций, пространство с доминирующей смешанной производной, ортопоперечник.

1. Введение. Пусть $f \in L_1[0,1]^n$, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in Z^n}$ — последовательность комплексных чисел. Определим мультипликативное преобразование в виде формального ряда

$$f_\lambda = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lambda_k \hat{f}(k) e^{2\pi ikx}. \tag{1}$$

Пусть (X, Y) — пара функциональных пространств 1-периодических функций, X вложено в $C[0,1]^n$, последовательность комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ является мультипликатором из пространства X в пространство Y, т. е.

$$\sup_{f\neq 0} \frac{\|f_\lambda\|_Y}{\|f\|_X} < \infty.$$

Задача заключается в нахождении узлов $\{t_k\}_{k=1}^M$ и функций $\{\phi_k(x,\lambda)\}_{k=1}^M$ таких, чтобы скорость убывания погрешности

$$\sup_{\|f\|_X=1} \|f_\lambda - \sum_{k=1}^M f(t_k)\phi_k(x,\lambda)\|_Y$$

в метрике Y была как можно большей при возрастании M к бесконечности.

Данная постановка задачи объединяет задачи приближенного восстановления интегралов, коэффициентов Фурье, функций, дробных производных и дробных интегралов. Так, если

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = (0,\dots,0); \\ 0 & \text{при } k \neq (0,\dots,0), \end{cases}$$

то получаем задачу численного интегрирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки РК (коды проектов 1412/ГФ, 0744/ГФ, 1504/ГФ).

Если

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = (\mu_1, \dots, \mu_n), \\ 0 & \text{при } k \neq (\mu_1, \dots, \mu_n), \end{cases}$$

то соответствующий оператор восстанавливает коэффициент Фурье $\hat{f}(\mu)$.

Если $\lambda = \{\bar{k}^\beta\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $\beta = 0$, то приходим к задаче восстановления функций, если $\beta > 0$ — дробной производной, если $\beta < 0$ — дробного интеграла.

Пусть $1 < p < \infty$, f — 1-периодическая функция из $L_p[0,1]^n$ с тригонометрическим рядом Фурье $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$. Будем считать, что $f \in W_p^\alpha[0,1]^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$, если найдется $f^\alpha \in L_p[0,1]^n$, ряд Фурье которой совпадает с рядом $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} \bar{k}^\alpha \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$, где $\mu x := \sum\limits_{j=1}^n \mu_j x_j$, $\bar{k}^\alpha = \prod\limits_{j=1}^n \bar{k}_j^{\alpha_j}$, $\bar{k}_j = \max\{|k_j|, 1\}$, $j = \overline{1,n}$,

$$\|f\|_{W_p^\alpha[0,1]^n} := \|f^\alpha\|_{L_p[0,1]^n},$$

и $f \in E^\alpha[0,1]^n$, если конечна величина

$$\|f\|_{E^\alpha} := \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \bar{k}^\alpha |\hat{f}(k)|.$$

Задача оптимального восстановления функционалов по конечной информации поставлена в [1, 2]. Эта постановка обобщалась и развивалась в различных направлениях [3–8].

Восстановлению функций из классов с доминирующей смешанной производной посвящены работы [9–16]. Соответствующие операторы восстановления строятся либо рекуррентным образом [13, 14], либо с использованием оптимальных сеток Коробова [9–12, 15, 16], нахождение которых является самостоятельной задачей.

Целью данной работы является построение оператора восстановления для анизотропных пространств в явном виде, для которого погрешность восстановления функций совпадает с порядком соответствующего ортопоперечника[1)]:

$$d_M^\perp(X, Y) = \inf_{\{g_j\}_{j=1}^M} \sup_{\|f\|_X = 1} \left\| f - \sum_{j=1}^M (f, g_j) g_j \right\|_Y,$$

здесь нижняя точная граница берется по всевозможным ортогональным системам $\{g_j\}_{j=1}^M$ из $L_\infty[0,1]^n$.

Мы рассматриваем задачу восстановления мультипликативных преобразований функций из классов $W_p^\alpha[0,1]^n$, $E^\alpha[0,1]^n$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$:

$$0 < \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_\tau < \alpha_{\tau+1} \le \dots \le \alpha_n. \qquad (2)$$

Пусть $\psi : \mathbb{Z}_+^n \to \mathbb{N}$ — неубывающая по каждой переменной функция, т. е.

$$\psi(k_1, \dots, k_i, \dots, k_n) \le \psi(k_1, \dots, k_i + 1, \dots, k_n), \quad i = \overline{1,n}.$$

Для функции f и последовательности комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ определим преобразование:

$$F_{m,\psi}(f, \lambda; x) = \sum_{\substack{\psi(k)=m,\\ k\in\mathbb{N}^n}} \frac{1}{2^{|k|}} \sum_{0\le r<2^k} f\left(\frac{r}{2^k}\right) \phi_{k,r}\left(x + \frac{r}{2^k}; \lambda\right)$$

$$= \sum_{\substack{\psi(k)=m,\\ k\in\mathbb{N}^n}} \frac{1}{2^{|k|}} \sum_{0\le r<2^k} f\left(\frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, \frac{r_n}{2^{k_n}}\right) \phi_{k,r}\left(x_1 + \frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, x_n + \frac{r_n}{2^{k_n}}; \lambda\right), \qquad (3)$$

[1)] Ортопоперчник введен В. Н. Темляковым в [17], см. также [18, 19].

$$\phi_{k,r}(x;\lambda) = \sum_{1\le\nu_j\le k_j} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{n-1}(r_j+1)\operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)} \sum_{\mu\in\rho(\nu)} \lambda_\mu e^{2\pi i\mu x}. \tag{4}$$

Здесь и далее $|k| := k_1 + \dots + k_n$,

$$\rho(\nu) = \{\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n : [2^{\nu_j-2}] \le |\mu_j| < 2^{\nu_j-1}\},$$

$[x]$ — целая часть числа x, а также $\nu \le \mu$ будет означать $\nu_j \le \mu_j$, $j = \overline{1, n}$.

Идея построения оператора $F_{m,\psi}$ основана на том факте, что в пространствах с доминирующей смешанной производной наилучшими аппроксимационными свойствами обладают тригонометрические полиномы со спектром из ступенчатых гиперболических крестов (см. [18, 20, 21]). Оператор (3), (4) построен так, что он точно восстанавливает тригонометрические многочлены с гармониками из соответствующих множеств, т. е. $F_{m,\psi}(f,\lambda)$ точное для

$$f(x) = \sum_{k\in G_m} a_k e^{2\pi ikx},$$

где

$$G_m = \bigcup_{\substack{\psi(\nu)\le m,\\ \nu\in\mathbb{N}^n}} \rho(\nu).$$

При $\psi(k) = k_1 + \dots + k_n$ оператор $F_{m,\psi}(f,\lambda)$ построен в работах [22–24], где решена задача построения в явном виде оператора восстановления функций из изотропных пространств $W_p^\alpha[0,1]^n$, $E^\alpha[0,1]^n$, $\alpha = (\alpha, \dots, \alpha)$. Кроме того, получено представление разности $f_\lambda(x) - F_{m,\psi}(f,\lambda;x)$ в явном виде в терминах тригонометрических коэффициентов Фурье функций f. Оценка погрешности совпадает с порядком ортопоперечника в степенной шкале.

В случае анизотропных пространств, как показано С. А. Теляковским [21], целесообразно использовать тригонометрические полиномы со спектром из специальных гиперболических крестов. Здесь этот эффект также имеет место. Для приближенного восстановления функций (мультипликативных преобразований функций) из анизотропных пространств W_p^α, E^α будем использовать оператор (3), (4) с

$$\psi_0(k) = k_1 + \dots + k_\tau + [\gamma(k_{\tau+1} + \dots + k_n)], \tag{5}$$

где $1 < \gamma < \frac{\alpha_{\tau+1}}{\alpha_0}$.

При $1 < p \le 2 \le q \le \infty$ показано, что

$$\sup_{\|f\|_{W_p^\alpha}=1} \|f - F_{m,\psi_0}(f,1)\|_{L_q} \sim d_M^\perp(W_p^\alpha, L_q),$$

здесь M — количество значений функции f, по которой строится оператор $F_{m,\psi_0}(f,1)$.

Также рассматриваем вопрос восстановления функций из пространства малой гладкости W_p^α при $\alpha \le 1/p$, т. е. когда нет вложения в пространство непрерывных функций. В этом случае восстанавливать по значениям функции не имеет смысла, так как функции из этих классов определены разве лишь почти всюду. Поэтому возникает следующая постановка, являющаяся в некотором смысле обратной к задаче, сформулированной выше.

Пусть функция f принадлежит $W_p^\alpha[0,1]^n$ и

$$f_\lambda = \sum_{k\in Z^n} \lambda_k \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

— ее мультипликативное преобразование, где $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ — мультипликатор из $W_p^\alpha[0,1]^n$ в $C[0,1]^n$ [25]. Нужно приближенно восстановить функцию f по значениям f_λ.

Порядок приближения оператора восстановления $F_{m,\psi_0}(f^{(-\beta)};\lambda)$ по значениям дробного интеграла $f^{(-\beta)}$ также достигает порядка ортопоперечника[2)] в паре пространств $\big(W_2^\alpha, L_2\big)$.

Оператор $F_{m,\psi}(f,\lambda)$ универсален. Выбор функции ψ диктуется выбором пространства X, а точнее линией уровня убывания тригонометрических коэффициентов Фурье функций из этого пространства. Поэтому полученные здесь результаты можно распространить, например, на пространства H_p^Ω [26], $E_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\alpha$ [27].

2. Восстановление коэффициентов Фурье функций. Пусть $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$, $m \ge \psi(\nu)$, f из $C[0,1]^n$. Определим функционал

$$T_{m,\psi}(f;\nu) = \sum_{\substack{\psi(k+\nu)=m,\\ k_j\ge 0}} \frac{1}{2^{|k+\nu|}} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1+\nu_1}-1} \cdots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n+\nu_n}-1} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{n-1}(r_j+1)\operatorname{sgn} k_j} \times f\left(\frac{r_1}{2^{k_1+\nu_1}}, \dots, \frac{r_n}{2^{k_n+\nu_n}}\right). \quad (6)$$

Данный функционал в случае $\nu = (0,\dots,0)$ реализует квадратурную формулу, точную для тригонометрических полиномов со спектром из соответствующего гиперболического креста [27, 28].

Лемма 1 [29]. *Пусть $d \in \mathbb{N}^n$, $B = B_1 \times \dots \times B_n$ — параллелепипед в $\mathbb{Z}^n$, $d_j > |B_j|$, $j = 1,\dots,n$,*

$$I = \bigcup_{r\in\mathbb{Z}^n} ((B_1 + r_1 d_1) \times \dots \times (B_n + r_n d_n)).$$

Если $f \in L_1[0,1]^n$, $f \sim \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$, то ряд $\sum\limits_{k\in I} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$ является рядом Фурье функции

$$\frac{1}{d} \sum_{0\le r\le d-1} f\left(x + \frac{r}{d}\right) D_B\left(\frac{r}{d}\right) = \frac{1}{d_1\dots d_n} \sum_{r_1=0}^{d_1-1} \cdots \sum_{r_n=0}^{d_n-1} f\left(x_1 + \frac{r_1}{d_1}, \dots, x_n + \frac{r_n}{d_n}\right) D_B\left(\frac{r_1}{d_1}, \dots, \frac{r_n}{d_n}\right),$$

где $D_B(x) = \sum\limits_{k\in B} e^{-2\pi i k x}$ — ядро Дирихле, соответствующее параллелепипеду B из $\mathbb{Z}^n$.

[2)] В этом случае порядок ортопоперечника совпадает с порядком поперечника Колмогорова.

Лемма 2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{N}^n$, $\psi(\nu) \le m$. Если ряд*

$$f = \sum_{r \in Z^n} \hat{f}(r) e^{2\pi i r x}$$

абсолютно сходится, то имеет место равенство

$$T_{m,\psi}(f;\nu) = \sum_{\substack{\psi(k+\nu)=m,\\ k_j \ge 0}} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn} k_j}$$

$$\times \sum_{r \in Z^n} \hat{f}(2^{k_1+\nu_1-1}(2r_1 + \operatorname{sgn} k_1), \dots, 2^{k_{n-1}+\nu_{n-1}-1}(2r_{n-1} + \operatorname{sgn} k_{n-1}), r_n 2^{k_n+\nu_n}).$$

Доказательство. Заметим,что

$$(-1)^r = e^{2\pi i \frac{2^{k-1} r}{2^k}}, \quad k \in \mathbb{N},\ r = 1, 2, \dots, 2^k - 1,$$

поэтому функционал $T_{m,\psi}(f;\nu)$ можно представить в виде

$$T_{m,\psi}(f;\nu) = \sum_{\substack{\psi(k+\nu)=m,\\ k_j \ge 0}} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn} k_j}$$

$$\times \frac{1}{2^{|k+\nu|}} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1+\nu_1}-1} \dots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n+\nu_n}-1} D_{k_1\dots k_n}\left(\frac{r_1}{2^{k_1+\nu_1}}, \dots, \frac{r_n}{2^{k_n+\nu_n}}\right) f\left(\frac{r_1}{2^{k_1+\nu_1}}, \dots, \frac{r_n}{2^{k_n+\nu_n}}\right),$$

где

$$D_{k_1\dots k_n}(y_1, \dots, y_n) = e^{-2\pi i \sum\limits_{j=1}^{n-1} 2^{k_j-1} y_j \operatorname{sgn} k_j}.$$

Воспользуемся леммой 1 и получим нужное утверждение. $\square$

Лемма 3. *Пусть $b = \{b_s\}_{s \in \mathbb{Z}} \in l_1$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда верно представление*

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{\operatorname{sgn} k} \sum_{r \in \mathbb{Z}} b_{2^{k-1}(2r+\operatorname{sgn} k)} = \sum_{r \in \mathbb{Z}} b_{2^m r}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} (-1)^{\operatorname{sgn} k} \sum_{r \in \mathbb{Z}} b_{2^{k-1}(2r+\operatorname{sgn} k)} &= \sum_{r \in \mathbb{Z}} b_r - \sum_{k=1}^{m} \sum_{r \in \mathbb{Z}} b_{2^{k-1}(2r+1)} \\
&= b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r \in \mathbb{Z}} b_{2^{k-1}(2r+1)} - \sum_{k=1}^{m} \sum_{r \in \mathbb{Z}} b_{2^{k-1}(2r+1)} \\
&= b_0 + \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{r \in \mathbb{Z}} b_{2^{k-1}(2r+1)} = b_0 + \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z},\\ r \ne 0}} b_{2^m r} = \sum_{r \in \mathbb{Z}} b_{2^m r}. \quad \square
\end{aligned}$$

Лемма 4. *Пусть* $\nu \in \mathbb{N}^n$ *и* $m \geq \psi(\nu)$. *Если ряд* $f(x) = \sum\limits_{r\in Z^n} \hat{f}(r)e^{2\pi irx}$ *абсолютно сходится, то для функционала (6) имеет место равенство*

$$T_{m,\psi}(f;\nu) = \hat{f}(0,\dots,0) + \sum_{l=1}^{n} \sum_{\substack{\psi(k+\nu)=m,\\ k_j\geq 0, k_{l+1}=\dots=k_n=0}} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{l-1}\operatorname{sgn} k_j}$$

$$\times \sum_{r\in\mathbb{Z}^l\, r_l\neq 0} \hat{f}(2^{k_1+\nu_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_{l-1}+\nu_{l-1}-1}(2r_{l-1}+\operatorname{sgn} k_{l-1}), r_l 2^{k_l+\nu_l}, 0,\dots,0).$$

Доказательство. Из утверждения леммы 2 следует, что

$$T_{m,\psi}(f;\nu) = \sum_{\substack{\psi(k+\nu)=m,\\ k_j\geq 0}} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{n-1}\operatorname{sgn} k_j}$$

$$\times \sum_{r\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(2^{k_1+\nu_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_{n-1}+\nu_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}), r_n 2^{k_n+\nu_n}).$$

Обозначим это выражение через $W_n(f)$. В сумме $W_n(f)$ выделим слагаемое с $r_n = 0$:

$$T_{m,\psi}(f;\nu) = W_n(f) = \sum_{\substack{\psi(k+\nu)=m,\\ k_j\geq 0}} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{n-1}\operatorname{sgn} k_j}$$

$$\times \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}^n,\\ r_n\neq 0}} \hat{f}(2^{k_1+\nu_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_{n-1}+\nu_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}), r_n 2^{k_n})$$

$$+ \sum_{\substack{\psi(k+\nu)\leq m,\\ k_j\geq 0, k_n=0}} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{n-1}\operatorname{sgn} k_j}$$

$$\times \sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}} \hat{f}(2^{k_1+\nu_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_{n-1}+\nu_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}), 0) = J_1 + J_2.$$

Преобразуем второе слагаемое J_2, выделив суммы, соответствующие индексу $n-1$:

$$J_2 = \sum_{\substack{\psi(k+\nu)\leq m,\\ k_j\geq 0, k_n=0}} d_{k_1,\dots,k_{n-1}} = \sum_{\substack{\psi(k+\nu)=m,\\ k_n=0}} \sum_{t_{n-1}=0}^{k_{n-1}} d_{k_1,\dots,k_{n-2},t_{n-1}}$$

$$= \sum_{\substack{\psi(k+\nu)=m,\\ k_j\geq 0, k_n=0}} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{n-2}\operatorname{sgn} k_j} \sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-2}} \sum_{t_{n-1}=0}^{k_{n-1}} (-1)^{\operatorname{sgn} k_{n-1}}$$

$$\times \sum_{r_{n-1}\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2^{k_1+\nu_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{t_{n-1}+\nu_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn} t_{n-1}), 0)$$

$$= \sum_{\substack{\psi(k+\nu)=m,\\ k_j\ge 0, k_n=0}} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{n-2}\operatorname{sgn} k_j} \sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}} \hat{f}(2^{k_1+\nu_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,r_{n-1}2^{k_{n-1}},0)$$

$$= W_{n-1}(f).$$

В последнем соотношении применили лемму 3.

Таким образом, получили рекуррентную формулу вида

$$W_n(f) = W_{n-1}(f) + \sum_{\substack{\psi(k+\nu)=m,\\ k_j\ge 0}} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{n-1}\operatorname{sgn} k_j}$$

$$\times \sum_{\substack{r\in Z^n,\\ r_n\ne 0}} \hat{f}(2^{k_1+\nu_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_{n-1}+\nu_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}), r_n 2^{k_n+\nu_n}),$$

из которой через $n-1$ шагов придем к утверждению леммы. $\square$

Пусть $\nu\in\mathbb{N}^n$, $m\ge\psi(\nu)$, $\mu\in\rho(\nu)$. Определим функционал

$$P_{m,\psi}(f;\mu) = T_{m,\psi}(e^{2\pi i\mu x}\cdot f;\nu)$$

$$= \sum_{\substack{\psi(k+\nu)=m,\\ k_j\ge 0}} \frac{1}{2^{|k+\nu|}} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1+\nu_1}-1}\cdots\sum_{r_n=0}^{2^{k_n+\nu_n}-1} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{n-1}(r_j+1)\operatorname{sgn} k_j}$$

$$\times f\left(\frac{r_1}{2^{k_1+\nu_1}},\dots,\frac{r_n}{2^{k_n+\nu_n}}\right) e^{2\pi i\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i\frac{r_i}{2^{k_i+\nu_i}}}. \quad (7)$$

Из определения $P_{m,\psi}(f;\mu)$ и леммы 4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\nu\in\mathbb{N}^n$, $\psi(\nu)\le m$. Если $\mu\in\rho(\nu)$, то для абсолютно сходящегося ряда*

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\hat{f}(k)e^{2\pi ikx}$$

верно равенство

$$P_{m,\psi}(f;\mu) = \hat{f}(\mu) + \sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{\psi(k+\nu)=m,\\ k_j\ge 0}} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{l-1}\operatorname{sgn} k_j}$$

$$\times \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}^l,\\ r_l\ne 0}} \hat{f}(2^{k_1+\nu_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1)+\mu_1,\dots,r_l 2^{k_l+\nu_l}+\mu_l,\mu_{l+1},\dots,\mu_n). \quad (8)$$

Замечание 1. Соотношение (8) показывает, что функционал $P_{m,\psi}(f,\mu)$ является аппаратом восстановления коэффициентов Фурье $\hat{f}(\mu)$, точным для полиномов со спектром из множества

$$G_\psi = \bigcup_{\psi(\nu)\le m}\rho(\nu).$$

Лемма 5. *Пусть* $\beta > 0$, $\nu \in \mathbb{N}^n$, $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_\tau < \alpha_{\tau+1} \le \cdots \le \alpha_n$, *и пусть* $1 < \gamma < \frac{\alpha_{\tau+1}}{\alpha_0}$, $\psi_0(k) = k_1 + \cdots + k_\tau + [\gamma(k_{\tau+1} + \cdots + k_n)]$ *и* $m \ge \psi_0(\nu)$. *Тогда*

$$\sum_{\psi_0(k+\nu)=m} 2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j(k_j+\nu_j)\beta} \asymp \frac{(m+1-\psi_0(\nu))^{\tau-1}}{2^{\alpha_0 m\beta}} \frac{1}{2^{\beta(\alpha_{\tau+1}-\gamma\alpha_0)\sum\limits_{j=\tau+1}^{n}\nu_j}} \tag{9}$$

и, следовательно,

$$\sum_{\psi_0(k+\nu)=m} 2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j(k_j+\nu_j)\beta} \le c\frac{(m+1-\psi_0(\nu))^{\tau-1}}{2^{\alpha_0 m\beta}}. \tag{10}$$

Доказательство. Учитывая определения чисел γ, α_0 и то, что количество решений из $\mathbb{Z}_+^r$ уравнения $x_1 + \cdots + x_r = N$ эквивалентно N^{r-1}, имеем

$$\sum_{\psi_0(k+\nu)=m} 2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j(k_j+\nu_j)\beta} \le \sum_{\psi_0(k+\nu)=m} 2^{-\left(\alpha_0 \sum\limits_{j=1}^{\tau}(k_j+\nu_j) + \alpha_{\tau+1}\sum\limits_{j=1}^{\tau}(k_j+\nu_j)\right)\beta}$$

$$\le 2^{-\alpha_0 m\beta} \sum_{\psi_0(k+\nu)=m} 2^{-(\alpha_{\tau+1}-\gamma\alpha_0)\left(\sum\limits_{j=\tau+1}^{n}(k_j+\nu_j)\right)\beta}$$

$$\le 2^{-\alpha_0 m\beta} \sum_{t=\sum\limits_{j=1}^{\tau}\nu_j}^{m-\left[\gamma\sum\limits_{j=\tau+1}^{n}\nu_j\right]} \sum_{\sum\limits_{j=1}^{\tau}k_j+\nu_j=t} \sum_{\left[\gamma\sum\limits_{j=\tau+1}^{n}k_j+\nu_j\right]=m-t} 2^{-\frac{m-t}{\gamma}(\alpha_{\tau+1}-\gamma\alpha_0)\beta}$$

$$\asymp 2^{-\alpha_0 m\beta} \sum_{t=\sum\limits_{j=1}^{\tau}\nu_j}^{m-\left[\gamma\sum\limits_{j=\tau+1}^{n}\nu_j\right]} \left(t+1-\sum_{j=1}^{\tau}\nu_j\right)^{\tau}$$

$$\times\left(\frac{m-t+1}{\gamma} - \sum_{j=\tau+1}^{n}\nu_j\right)^{n-\tau-1} 2^{-\frac{m-t}{\gamma}(\alpha_{\tau+1}-\gamma\alpha_0)\beta}$$

$$\asymp \frac{(m+1-\psi_0(\nu))^{\tau-1}}{2^{\alpha_0 m\beta}} \frac{1}{2^{(\alpha_{\tau+1}-\gamma\alpha_0)\sum\limits_{j=\tau+1}^{n}\nu_j}}. \quad \square$$

Приведем оценки погрешности восстановления тригонометрических коэффициентов Фурье функций из классов W_p^α, E^α, где α удовлетворяет (2).

Теорема 2. *Пусть* $P_{m,\psi_0}(f,\mu)$ — *функционал, определенный соотношениями* (7), (5), $\nu \in \mathbb{N}^n$, $m \ge \psi_0(\nu)$, $\mu \in \rho(\nu)$.

Если $1 < p \le \infty$, $\alpha_0 > \frac{1}{\tilde{p}} = \max\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\right)$, *то для* $f \in W_p^\alpha$

$$|\hat{f}(\mu) - P_{m,\psi_0}(f,\mu)| \le C\frac{(m+1-\psi_0(\nu))^{\frac{\tau-1}{\tilde{p}}}}{2^{m\alpha_0}}\|f\|_{W_p^\alpha}, \tag{11}$$

при $\alpha_0 > 1/2 \ge 1/p$ *оценка* (11) *точна по порядку.*

Если $\alpha_0 > 1$, то для $f \in E^\alpha$ верно

$$\sup_{\|f\|_{E^\alpha}=1} |\hat{f}(\mu) - P_{m,\psi_0}(f,\mu)| \asymp \frac{(m+1-\psi_0(\nu))^{\tau-1}}{2^{m\alpha_0}}. \tag{12}$$

Доказательство. Из теоремы 1 имеем

$$|\hat{f}(\mu) - P_{m,\psi_0}(f,\mu)|$$
$$\le \sum_{l=1}^{n} \sum_{\substack{\psi_0(k+\nu)=m,\\ k_{l+1}=\dots=k_n=0}} \sum_{\substack{r\in Z^l,\\ r_l\ne 0}} |\hat{f}(2^{k_1+\nu_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1)+\mu_1,\dots,2^{k_l+\nu_l}r_l+\mu_l,\mu_{l+1},\dots,\mu_n)|$$
$$= \sum_{k\in M_\mu} |\hat{f}(k)|,$$

где

$$M_\mu = \bigcup_{l=1}^{n} \bigcup_{\psi_0(k+\nu)=m} D_{kl},$$

$D_{kl} = \{(2^{k_1+\nu_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1)+\mu_1,\dots,2^{k_l+\nu_l}r_l+\mu_l,\mu_{l+1},\dots,\mu_n) : r\in Z^l, r_l\ne 0\}$. Применим неравенства Гёльдера и Хаусдорфа — Юнга:

$$|\hat{f}(\mu) - P_{m,\psi_0}(f,\mu)| \le \Big(\sum_{s\in M_\mu} (\bar{s}^\alpha|\hat{f}(s)|)^{\tilde{p}'}\Big)^{1/\tilde{p}'} \bigg(\sum_{s\in M_\mu}\Big(\frac{1}{\bar{s}^\alpha}\Big)^{\tilde{p}}\bigg)^{1/\tilde{p}}$$
$$= \Big(\sum_{s\in M_\mu} (|\hat{f^\alpha}(s)|)^{\tilde{p}'}\Big)^{1/\tilde{p}'} \bigg(\sum_{s\in M_\mu}\Big(\frac{1}{\bar{s}^\alpha}\Big)^{\tilde{p}}\bigg)^{1/\tilde{p}}$$
$$\le c\|f^\alpha\|_{L_{\tilde{p}}} \bigg(\sum_{s\in M_\mu}\Big(\frac{1}{\bar{s}^\alpha}\Big)^{\tilde{p}}\bigg)^{1/\tilde{p}} \le c\|f\|_{W^\alpha_p} \bigg(\sum_{s\in M_\mu}\Big(\frac{1}{\bar{s}^\alpha}\Big)^{\tilde{p}}\bigg)^{1/\tilde{p}}.$$

Аналогично

$$|\hat{f}(\mu) - P_{m,\psi_0}(f,\mu)| \le \bigg(\sum_{s\in M_\mu}\frac{1}{\bar{s}^\alpha}\bigg)\|f\|_{E^\alpha}.$$

Оценим суммы $\big(\sum_{s\in M_\mu}\big(\frac{1}{\bar{s}^\alpha}\big)^{\tilde{p}}\big)^{1/\tilde{p}}$ и $\sum_{s\in M_\mu}\frac{1}{\bar{s}^\alpha}$. Для выражения

$$\frac{1}{\bar{s}_i} = \frac{1}{\overline{|2^{k_i+\nu_i-1}(2r_i+\operatorname{sgn} k_i)+\mu_i|}}, \quad i=\overline{1,l},$$

выделим два случая: 1) $k_i \ge 1$, 2) $k_i = 0$.

В случае 1, учитывая, что числа μ_i удовлетворяют условию

$$[2^{\nu_i-2}] \le |\mu_i| < 2^{\nu_i-1},$$

имеем

$$\frac{1}{\overline{|2^{k_i+\nu_i-1}(2r_i+1)+\mu_i|}} \le \frac{1}{\overline{|2^{k_i+\nu_i-1}(2r_i+1)|-2^{\nu_i-1}}} \le \frac{1}{2^{k_i+\nu_i-2}\bar{r}_i},$$

в случае 2 при $k_i = 0$ —

$$\frac{1}{\overline{\overline{|2^{k_i+\nu_i-1}2r_i+\mu_i|}}} \le \min\bigg(\frac{1}{\overline{|2^{\nu_i-1}r_i|}}, \frac{1}{\overline{[2^{\nu_i-2}]}}\bigg).$$

Объединяя эти оценки, получим, что

$$\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{l-1}|2^{k_i+\nu_i-1}(2r_i+\operatorname{sgn}k_i)+\mu_i)|^{\alpha_i}|r_l 2^{k_l+\nu_l}+\mu_l|^{\alpha_l}} \le \frac{4^{\sum\limits_{i=1}^{l}\alpha_i}}{\prod\limits_{i=1}^{l}(2^{k_i+\nu_i}\bar r_i)^{\alpha_i}}$$

или для произвольного $s\in D_{kl}$ — что

$$\frac{1}{\bar s_1^{\alpha_1}\dots\bar s_n^{\alpha_n}} \le \frac{4^{\sum\limits_{1}^{l}\alpha_i}}{\prod\limits_{i=1}^{l}(2^{k_i+\nu_i}\bar r_i)^{\alpha_i}\prod\limits_{i=\tau+1}^{n}|\mu_i|^{\alpha_i}} \le \frac{c_1}{\left(\prod\limits_{i=1}^{l}\bar r_i^{\alpha_i}\right)2^{\sum\limits_{i=1}^{l}(k_i+\nu_i)\alpha_i+\sum\limits_{i=l+1}^{n}\nu_i\alpha_i}}.$$

Следовательно, при $\alpha_0>1/\tilde p$

$$\left(\sum_{s\in M_\mu}\left(\frac{1}{\bar s^\alpha}\right)^{\tilde p}\right)^{1/\tilde p} = \left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{\psi_0(k+\nu)=m,\\ k_{l+1}=\dots=k_n=0}}\sum_{s\in D_{kl}}\left(\frac{1}{\bar s_1^{\alpha_1}\cdots\bar s_n^{\alpha_n}}\right)^{\tilde p}\right)^{1/\tilde p}$$

$$\le c_1\left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{\psi_0(k+\nu)=m,\\ k_{l+1}=\dots=k_n=0}}\frac{1}{2^{\tilde p\left(\sum\limits_{i=1}^{l}(k_i+\nu_i)\alpha_i+\sum\limits_{i=l+1}^{n}\nu_i\alpha_i\right)}}\sum_{r\in\mathbb{Z}^l}\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{l}\bar r_i^{\alpha_i\tilde p}}\right)^{1/\tilde p}$$

$$\le c_2\left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{\psi_0(k+\nu)=m,\\ k_{l+1}=\dots=k_n=0}}\frac{1}{2^{\tilde p\left(\sum\limits_{i=1}^{l}(k_i+\nu_i)\alpha_i+\sum\limits_{i=l+1}^{n}\nu_i\alpha_i\right)}}\right)^{1/\tilde p}$$

$$\le c_2\left(n\sum_{\psi_0(k+\nu)=m,k_j\ge 0}\frac{1}{2^{\tilde p\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(k_i+\nu_i)\alpha_i\right)}}\right)^{1/\tilde p}.$$

Применяя лемму 5, имеем

$$\left(\sum_{s\in M_\mu}\left(\frac{1}{\bar s^\alpha}\right)^{\tilde p}\right)^{1/\tilde p} \le c_3\frac{(m+1-\psi_0(\nu))^{\frac{\tau-1}{\tilde p}}}{2^{m\alpha_0}}. \qquad (13)$$

Аналогично при $\alpha_0>1$

$$\sum_{s\in M_\mu}\left(\frac{1}{\bar s^\alpha}\right) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{\psi_0(k+\nu)=m,\\ k_{l+1}=\dots=k_n=0}}\sum_{s\in D_{kl}}\frac{1}{\bar s_1^{\alpha_1}\cdots\bar s_n^{\alpha_n}} \le c_4\frac{(m+1-\psi_0(\nu))^{\tau-1}}{2^{m\alpha_0}}.$$

Покажем точность полученных оценок (11), (12). Пусть

$$f_0(x) = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_\tau=m,\\ k_j\ge 0}} 2^{-\alpha_0 m}e^{2\pi i\sum\limits_{j=1}^{\tau}2^{k_j}x_j}.$$

Используя теорему Литтлвуда — Пэли [30, п. 1.5.2], получим

$$\|f_0\|_{W_p^\alpha} \asymp \left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{N}^n}\left|\sum_{\mu\in\rho(k)}\bar\mu^\alpha\hat f_0(\mu)e^{2\pi i\mu,x}\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{L_p} \asymp m^{\frac{\tau-1}{2}},$$

следовательно,

$$\sup_f \frac{|\hat{f}(\mu) - P_{m,\psi_0}(f,\mu)|}{\|f\|_{W_p^\alpha}} \ge cm^{-\frac{\tau-1}{2}} |P_{m,\psi_0}(f_0,\mu)| \ge cm^{-\frac{\tau-1}{2}} 2^{-\alpha_0 m} m^{\tau-1} = cm^{\frac{\tau-1}{2}} 2^{-\alpha_0 m}$$

и

$$\sup_f \frac{|\hat{f}(\mu) - P_{m,\psi_0}(f,\mu)|}{\|f\|_{E^\alpha}} \ge |P_{m,\psi_0}(f_0,\mu)| \ge 2^{-\alpha_0 m} m^{\tau-1}. \quad \square$$

3. Восстановление мультипликативных преобразований функций. Пусть для функции f и последовательности комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ определен оператор $F_{m,\psi}(f,\lambda;x)$ соотношениями (3), (4). Имеет место равенство

$$F_{m,\psi}(f,\lambda;x) = \sum_{\mu\in G_m} \lambda_\mu P_{m,\psi}(f,\mu) e^{2\pi i\mu x}. \tag{14}$$

Действительно, так как функция $\psi_0(k)$ монотонно не возрастает по каждому аргументу, из условий $k \ge 0$, $\nu \ge 1$, $\psi_0(k+\nu) = m$ следует, что $\psi_0(\nu) \le m$. Поэтому

$$\sum_{\nu:\psi_0(\nu)\le m,\nu\ge 1} \sum_{k:\psi_0(k+\nu)=m,k\ge 0} b_{k,\nu} = \sum_{(k,\nu):\psi_0(k+\nu)=m,k\ge 0,\nu\ge 1} b_{k,\nu}.$$

Обозначив $t = k+\nu$, получим

$$\sum_{(k,\nu):\psi_0(k+\nu)=m,k\ge 0,\nu\ge 1} b_{k,\nu} = \sum_{(t,\nu):\psi_0(t)=m,1\le\nu\le t} b_{t-\nu,\nu} = \sum_{\psi_0(t)=m,t\ge 0} \sum_{1\le\nu\le t} b_{t-\nu,\nu},$$

откуда следует соотношение (14).

Таким образом, $F_{m,\psi}(f,\lambda;x)$ — тригонометрический полином со спектром из $G_m = \bigcup_{\psi(\nu)\le m} \rho(\nu)$. Из представления (14) и замечания 1 имеем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $F_{m,\psi}(f,\lambda;x)$ — оператор, определенный равенствами (3), (4). Если $f(x) = \sum_{k\in G_m} \hat{f}(k)e^{2\pi ikx}$ — тригонометрический полином с гармониками из G_m, то*

$$f_\lambda(x) - F_{m,\psi}(f,\lambda;x) = 0.$$

Пусть $L_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$, $l_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$, $\mathbf{p} = (p_1,\dots,p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1,\dots,q_n)$ — анизотропные пространства Лоренца [31]. Пространства $W_{\mathbf{p}}^\alpha[0,1]^n$ определяются с помощью нормы

$$\|f\|_{W_{\mathbf{p}}^\alpha} := \|f^\alpha\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{p}}}.$$

Заметим, что при $\mathbf{p} = (p,\dots,p)$ верно $W_{\mathbf{p}}^\alpha = W_p^\alpha$. В то же время если $\mathbf{p} = (p,\dots,p) \ne \mathbf{q} = (q,\dots,q)$, то $L_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \ne L_{p,q}$, где $L_{p,q}$ — классическое пространство Лоренца. Приведем три факта, которые будем использовать для векторов вида $\mathbf{q} = (q,\dots,q)$.

Лемма 6 [32, теорема 4]. *Пусть $\beta \le \alpha$, $\boldsymbol{\alpha} - 1/p = \boldsymbol{\beta} - 1/r$. Тогда верно вложение*

$$W_{\mathbf{r}}^\beta \hookrightarrow W_{\mathbf{p}}^\alpha.$$

Лемма 7 [31, замечание 1]. *При* $0 < \mathbf{q} \le r \le \infty$ *имеет место вложение*

$$L_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \hookrightarrow L_{\mathbf{p},\mathbf{r}}.$$

Лемма 8 [31, теорема 7]. *При* $1 < \mathbf{p} < 2$, $0 < \mathbf{q} \le \infty$ *верно неравенство*

$$\|\hat{f}\|_{l_{\mathbf{p}',\mathbf{q}}} \le c\|f\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}}}.$$

Отметим, что утверждения лемм 6, 7, 8 являются аналогами классических теорем вложения Соболева [33], вложения пространства Лоренца [34] и неравенства Харди — Литтлвуда — Стейна [35] соответственно.

Для классов $W_p^\alpha[0,1]^n$, $E^\alpha[0,1]^n$ оценим погрешность восстановления сумм Фурье

$$S_{G_m}(f_\lambda, x) = \sum_{\mu \in G_m} \hat{\lambda}_\mu f(\mu) e^{2\pi i \mu x}$$

мультипликативного преобразования f_λ с помощью оператора $F_{2^m}(f,\lambda)$.

Теорема 4. *Пусть* $m \ge \psi_0(1)$, $F_{m,\psi_0}(f,\lambda)$ *определен соотношениями* (3)–(5). *Если* $1 < p \le 2 \le q \le \infty$, $\alpha_0 > \frac{1}{p}$, *то*

$$\sup_{\|f\|_{W_p^\alpha}=1} \|S_{G_m}(f_\lambda) - F_{m,\psi_0}(f,\lambda)\|_{L_q}$$
$$\le c2^{-\alpha_0 m} \max_{\psi_0(1)\le s\le m} \overline{(m-s)}^{\frac{\tau-1}{2}} \Big(\max_{\mu \in \bigcup\limits_{\psi_0(\nu)=s} \rho(\nu)} \bar{\mu}^{1/p-1/q} |\lambda_\mu| \Big). \quad (15)$$

Если $\alpha_0 > 1$, $q \ge 2$, *то*

$$\sup_{\|f\|_{E^\alpha}=1} \|S_{G_m}(f_\lambda) - F_{m,\psi_0}(f,\lambda)\|_{L_q}$$
$$\le c\frac{1}{2^{\alpha_0 m}} \left(\sum_{s=\psi_0(1)}^{m} \overline{(m-s)}^{(\tau-1)q} \sum_{\psi_0(\nu)=s} \sum_{\mu\in\rho(\nu)} \bar{\mu}^{q-2} |\lambda_\mu|^q \right)^{1/q}. \quad (16)$$

Доказательство. Докажем (15) для $p = 2$. Общий случай будет следовать из него и вложения из леммы 6.

Воспользуемся соотношением (14):

$$\|S_{G_m}(f_\lambda) - F_{m,\psi_0}(f,\lambda)\|_{L_q}$$
$$= \Big\| \sum_{\mu\in G_m} \lambda_\mu (\hat{f}(\mu) - P_{m,\psi_0}(f;\mu)) e^{2\pi i \mu x} \Big\|_{L_q} = \Big\| \sum_{\mu\in G_m} b_\mu e^{2\pi i\mu x} \Big\|_{L_q}.$$

Из лемм 7 и 8 получим

$$\Big\| \sum_{\mu\in G_m} b_\mu e^{2\pi i\mu x} \Big\|_{L_q} = \Big\| \sum_{\mu\in G_m} b_\mu e^{2\pi i\mu x} \Big\|_{L_{\mathbf{q},\mathbf{q}}} \le c_1 \Big\| \sum_{\mu\in G_m} b_\mu e^{2\pi i\mu x} \Big\|_{L_{\mathbf{q},2}}$$
$$\le c_2\|b\|_{l_{\mathbf{q}',2}} \le c_3 \Big(\sum_{r\in G_{m+1}} \bar{r}^{2/q'-1} \big(b^{*_1\cdots *_n}_{r_1\dots r_n}\big)^2 \Big)^{1/2}$$
$$\le c_4 \Big(\sum_{\mu\in G_m} \bar{\mu}^{2/q'-1} |b_{\mu_1\dots\mu_n}|^2 \Big)^{1/2},$$

где $\left\{b^{*_1\cdots *_n}_{r_1\dots r_n}\right\}_{r\in\mathbb{N}^n}$ — невозрастающая перестановка $\{|b_{\mu_1\dots\mu_n}|\}_{\mu\in\mathbb{Z}^n}$, взятая последовательно по каждому переменному индексу $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n$. В последнем неравенстве учитывалось, что $2/q'>1$.

Из теоремы 1 имеем

$$|\hat f(\mu)-P_{m,\psi_0}(f;\mu)|\le\sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{\psi_0(\nu+k)=m,\\ k_{l+1}=\dots=k_n=0}}\sum_{r\in D_{k,l}}|\hat f(r)|=\sum_{k\in M_\mu}|\hat f(k)|.$$

Применяя неравенство Гёльдера, используя $\alpha>1/p$ и неравенство (13), получим

$$\begin{aligned}|\hat f(\mu)-P_{m,\psi_0}(f;\mu)|&\le\Big(\sum_{k\in M_\mu}|\bar k^{\alpha}\hat f(k)|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k\in M_\mu}|\bar k^{-\alpha}|^2\Big)^{1/2}\\ &\le c_5\frac{(m+1-\psi_0(\nu))^{(\tau-1)/2}}{2^{m\alpha_0}}\Big(\sum_{k\in M_\mu}|\bar k^{\alpha}\hat f(k)|^2\Big)^{1/2}.\end{aligned}\tag{17}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}&\|S_{G_m}(f_\lambda)-F_{m,\psi_0}(f,\lambda)\|_{L_q}\\ &\le c_6\frac{1}{2^{m\alpha_0}}\left(\sum_{s=\psi_0(1)}^{m}\sum_{\psi_0(\nu)=s}\sum_{\mu\in\rho(\nu)}\bar\mu^{2/q'-1}|\lambda_\mu|^2(m+1-\psi_0(\nu))^{\tau-1}\sum_{k\in M_\mu}|\bar k^{\alpha}\hat f(k)|^2\right)^{1/2}\\ &\le c_6 2^{-\alpha_0 m}\max_{\psi_0(1)\le s\le m}\overline{(m-s)}^{\frac{\tau-1}{2}}\Big(\max_{\mu\in\bigcup\limits_{\psi_0(\nu)=s}\rho(\nu)}\bar\mu^{1/2-1/q}|\lambda_\mu|\Big)\Big(\sum_{\mu\in G_m}\sum_{k\in M_\mu}|\bar k^{\alpha}\hat f(k)|^2\Big)^{1/2}\\ &\qquad= c_6 2^{-\alpha_0 m}\max_{\psi_0(1)\le s\le m}\overline{(m-s)}^{\frac{\tau-1}{2}}\Big(\max_{\mu\in\bigcup\limits_{\psi_0(\nu)=s}\rho(\nu)}\bar\mu^{1/2-1/q}|\lambda_\mu|\Big)\|f\|_{W_2^\alpha}.\end{aligned}$$

Здесь использовано то, что $M_\mu\cap M_\eta=\oslash$ при $\mu\ne\eta$ и $\mu,\eta\in G_m$.

Далее, принимая во внимание лемму 8 и соотношение (12), получим

$$\begin{aligned}\|S_{G_m}(f_\lambda;.)-F_{m,\psi_0}(f,\lambda)\|_{L_q}&=\|S_{G_m}(f_\lambda;.)-F_{m,\psi_0}(f,\lambda)\|_{L_{\mathbf{q},\mathbf{q}}}\\ &\le\left(\sum_{s=\psi_0(1)}^{m}\sum_{\psi_0(\nu)=s}\sum_{\mu\in\rho(\nu)}\bar\mu^{p-2}|\lambda_\mu(\hat f(\mu)-P_{m,\psi_0}(f;\mu))|^q\right)^{1/q}\\ &\le c_7\frac{1}{2^{\alpha_0 m}}\left(\sum_{s=\psi_0(1)}^{m}(m+1-s)^{(\tau-1)q}\sum_{\psi_0(\nu)=s}\sum_{\mu\in\rho(\nu)}\bar\mu^{p-2}|\lambda_\mu|^q\right)^{1/q}\|f\|_{E^\alpha}.\quad\square\end{aligned}$$

Теорема 5. *Пусть $m\ge\psi_0(1), F_{m,\psi_0}(f,1)$ определен соотношениями (3)–(5) при $\lambda=\{1\}$, M — количество узлов в определении $F_{m,\psi_0}(f,1)$ ($M\asymp m^{\tau-1}2^m$).*

Если $1<p\le2\le q\le\infty,\alpha_0>\frac{1}{p}$, то

$$\sup_{\|f\|_{W_p^\alpha}=1}\|f-F_{m,\psi_0}(f,1)\|_{L_q}\asymp\left(\frac{(\ln M)^{\tau-1}}{M}\right)^{\alpha_0-1/p+1/q}.$$

Если $\alpha_0>1,q\ge2$, то

$$\sup_{\|f\|_{E^\alpha}=1}\|f-F_{m,\psi_0}(f,1)\|_{L_q}\asymp\frac{(\ln M)^{(\alpha+1/q-1/q')(\tau-1)}}{M^{\alpha_0-1/q'}}.$$

Доказательство. Из теоремы 4 имеем

$$\sup_{\|f\|_{W_p^\alpha}=1} \|f - F_{m,\psi_0}(f,1)\|_{L_q}$$

$$\le c2^{-\alpha_0 m} \max_{\psi_0(1)\le s\le m} (m+1-s)^{\frac{\tau-1}{2}} \max_{\psi_0(\nu)=s} \max_{\mu\in\rho(\nu)} \bar\mu^{1/p-1/q}$$

$$\asymp 2^{-(\alpha_0-1/p+1/q)m} \asymp \left(\frac{(\ln M)^{\tau-1}}{M}\right)^{\alpha-1/p+1/q}.$$

Обратно, принимая во внимание, что $F_{m,\psi_0}(f,1)$ есть тригонометрический полином со спектром из G_m, а количество элементов в множестве G_m не превосходит M, имеем

$$\sup_{\|f\|_{W_p^\alpha}=1} \|f - F_{m,\psi_0}(f,1)\|_{L_q} \ge d_M^\perp\big(W_p^\alpha, L_q\big).$$

Для ортопоперечника $d_M^\perp\big(W_p^\alpha, L_q\big)$ [22, теорема 3.1]

$$d_M^\perp\big(W_p^\alpha, L_q\big) \asymp \left(\frac{(\ln M)^{\tau-1}}{M}\right)^{\alpha-1/p+1/q}.$$

По теореме 4

$$\sup_{\|f\|_{E^\alpha}=1} \|f - F_{m,\psi_0}(f,1)\|_{L_q}$$

$$\le c\frac{1}{2^{\alpha_0 m}} \left(\sum_{s=\psi_0(1)}^{m} (m+1-s)^{(\tau-1)q} \sum_{\psi_0(\nu)=s} \sum_{\mu\in\rho(\nu)} \bar\mu^{q-2}\right)^{1/q}$$

$$\asymp 2^{-(\alpha_0-1/q')m} m^{(\tau-1)/q} \asymp \frac{(\ln M)^{(\alpha+1/q-1/q')(\tau-1)}}{M^{\alpha_0-1/q'}}.$$

Покажем обратную оценку. Пусть

$$f_0(x) = \sum_{k_1+\dots+k_\tau=m} 2^{-\alpha_0 m} \sum_{\mu\in\rho(k)} e^{2\pi i\mu x}.$$

Применив лемму $3.1'$ из [18], при $r>q$ получим

$$\sup_{\|f\|_{E^\alpha}=1} \|f - F_{m,\psi_0}(f,1)\|_{L_q} \ge c_1\|f_0 - F_{m,\psi_0}(f_0,1)\|_{L_q} = c_1\|f_0\|_{L_q}$$

$$\ge c_2\Big(\sum_{k_1+\dots+k_\tau=m} \Big(2^{(1/r-1/q-\alpha_0)m}\Big\|\sum_{\mu\in\rho(k)} e^{2\pi i\mu x}\Big\|_{L_r}\Big)^q\Big)^{1/q}$$

$$\asymp 2^{(\alpha_0-1/q')m} m^{(\tau-1)/q} \asymp \frac{(\ln M)^{(\alpha+1/q-1/q')(\tau-1)}}{M^{\alpha_0-1/q'}}. \qquad \square$$

Следствие 1. *Пусть* $F_{m,\psi_0}(f,\lambda)$ *определен соотношениями* (3)–(5). *Пусть* $1<p\le 2\le q\le\infty$, $\alpha_0>\frac{1}{p}$. *Тогда для* $f^{(\beta)} \asymp \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} \bar k^\beta \hat f(k) e^{2\pi ikx}$ *верны утверждения:*

если $-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\beta<\alpha_0-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, *то*

$$\|f^{(\beta)} - F_{m,\psi_0}(f,\bar k^\beta)\|_{L_q} \le C\frac{1}{2^{(\alpha_0-\beta-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})m}}\|f\|_{W_p^\alpha}; \tag{18}$$

если $\beta \le -\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, *то*

$$\|f^{(\beta)} - F_{m,\psi_0}(f, \bar{k}^{\beta})\|_{L_q} \le C \frac{m^{\frac{\tau-1}{2}}}{2^{\alpha_0 m}} \|f\|_{W_p^{\alpha}}. \tag{19}$$

Доказательство. Из теоремы 4 имеем

$$\sup_{\|f\|_{W_p^{\alpha}}=1} \|S_{G_m}(f^{\beta}) - F_{m,\psi_0}(f, \bar{k}^{\beta})\|_{L_q}$$
$$\le c 2^{-\alpha_0 m} \max_{\psi_0(1) \le s \le m} \overline{(m-s)}^{\frac{\tau-1}{2}} \Big(\max_{\mu \in \bigcup\limits_{\psi_0(\nu)=s} \rho(\nu)} \bar{\mu}^{1/p - 1/q + \beta} \Big).$$

Так как

$$\sup_{\|f\|_{W_p^{\alpha}}=1} \|f^{\beta} - F_{m,\psi_0}(f, k^{\beta})\|_{L_q}$$
$$\le \sup_{\|f\|_{W_p^{\alpha}}=1} \|S_{G_m}(f^{\beta}) - f^{\beta}\|_{L_q} + \sup_{\|f\|_{W_p^{\alpha}}=1} \|S_{G_m}(f^{\beta}) - F_{m,\psi_0}(f, k^{\beta})\|_{L_q}$$

и (см. [18])

$$\sup_{\|f\|_{W_p^{\alpha}}=1} \|S_{G_m}(f^{\beta}) - f^{\beta}\|_{L_q} \asymp \frac{1}{2^{(\alpha_0 - \beta - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})m}},$$

утверждение следует из подсчета выражения

$$\max_{\psi_0(1) \le s \le m} \overline{(m-s)}^{\frac{\tau-1}{2}} \Big(\max_{\mu \in \bigcup\limits_{\psi_0(\nu)=s} \rho(\nu)} \bar{\mu}^{1/p - 1/q + \beta} \Big). \quad \square$$

Следствие 2. *Пусть* $F_{m,\psi_0}(f, \lambda)$ *определен соотношениями* (3)–(5), *и пусть* $2 \le q \le \infty$, $\alpha_0 > 1$. *Тогда для* $f^{(\beta)} \asymp \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^n} \bar{k}^{\beta} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$ *верны утверждения:*

если $-\frac{1}{q'} < \beta < \alpha - \frac{1}{q'}$, *то*

$$\|f^{(\beta)} - F_{m,\psi_0}(f, \bar{k}^{\beta})\|_{L_q} \le C \frac{m^{\frac{\tau-1}{q}}}{2^{(\alpha_0 - \beta - \frac{1}{q'})m}} \|f\|_{E^{\alpha}}; \tag{20}$$

если $\beta < -\frac{1}{q'}$, *то*

$$\|f^{(\beta)} - F_{m,\psi_0}(f, \bar{k}^{\beta})\|_{L_q} \le C \frac{m^{\tau-1}}{2^{\alpha_0 m}} \|f\|_{E^{\alpha}}; \tag{21}$$

если $\beta = -\frac{1}{q'}$, *то*

$$\|f^{(\beta)} - F_{m,\psi_0}(f, \bar{k}^{\beta})\|_{L_q} \le C \frac{m^{\tau - 1 + \frac{\tau}{q}}}{2^{\alpha_0 m}} \|f\|_{E^{\alpha}}. \tag{22}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству следствия 1 с учетом неравенств (16), (10).

4. Восстановление функций из пространств малой гладкости. Будем рассматривать вопрос о восстановлении функций из класса $W_2^{\alpha}[0,1]^n$ при $\alpha_0 = \min\limits_j \alpha_j \le \frac{1}{2}$, т. е. когда нет вложения пространства $W_2^{\alpha}[0,1]^n$ в $C[0,1]^n$.

Пусть $0 < \alpha_0, \beta < \infty$, $\alpha_0 + \beta > \frac{1}{2}$ и $f \in W_2^{\alpha}[0,1]^n$. Тогда

$$f^{(-\beta)} = \sum_{k \in Z^n} \bar{k}^{-\beta} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} \in C[0,1]^n$$

и определен оператор

$$F_{m,\psi_0}(f^{(-\beta)}, \bar{k}^{\beta}) = \sum_{\substack{\psi_0(k)=m,\\ k_i \ge 1}} \frac{1}{2^{|k|}} \sum_{0 \le r < 2^k} f^{(-\beta)}\left(\frac{r}{2^k}\right)$$

$$\times \sum_{0 \le \nu_i \le k_i} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} (r_j+1)\operatorname{sgn}(k_j - \nu_j)} \sum_{\mu \in \rho(\nu)} \bar{\mu}^{\beta} e^{2\pi i \mu (x + \frac{r}{2^k})}.$$

Теорема 6. *Пусть* $0 < \alpha_0, \beta < \infty$, $\alpha_0 + \beta > \frac{1}{2}$. *Тогда*

$$\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha}}=1} \|f - F_{m,\psi_0}(f^{(-\beta)}, \bar{k}^{\beta})\|_{L_2} \asymp \frac{1}{2^{m\alpha_0}} \asymp d_M^{\perp}\big(W_2^{\alpha}, L_2\big). \tag{23}$$

Доказательство. Из (14) имеем

$$\|f - F_{m,\psi_0}(f^{(-\beta)}; \bar{k}^{\beta})\|_{L_2}^2 = \Big\| S_{G_m}(f) - \sum_{\mu \in G_m} \bar{\mu}^{\beta} P_{m,\psi_0}(f^{(-\beta)}; \mu) e^{2\pi i r x} \Big\|_{L_2}^2$$

$$+ \Big\| \sum_{\mathbb{R}^n \setminus G_m} \hat{f}(\mu) e^{2\pi i \mu x} \Big\|_{L_2}^2 = J_1^2 + J_2^2.$$

Используем равенство Парсеваля для слагаемого J_2:

$$J_2 = \left(\sum_{s=m+1}^{\infty} \sum_{\psi_0(\nu)=s} \sum_{\mu \in \rho(\nu)} |\hat{f}(\mu)|^2 \right)^{1/2} \le \frac{1}{2^{m\alpha}} \|f\|_{W_2^{\alpha}}.$$

Оценим слагаемое J_1. Используем (13) при $p = 2$:

$$J_1 = \left(\sum_{s=\psi_0(1)}^{m} \sum_{\substack{\psi_0(\nu)=s,\\ \nu_i \ge 1}} \sum_{\mu \in \rho(\nu)} |(\hat{f}(\mu) - \bar{\mu}^{\beta} P_{2^{m+n}}(f^{(-\beta)}, \mu))|^2 \right)^{1/2}$$

$$\le c_1 \left(\sum_{s=\psi_0(1)}^{m} \sum_{\substack{\psi_0(\nu)=s,\\ \nu_i \ge 0}} \sum_{\mu \in \rho(\nu)} \left(\bar{\mu}^{\beta} \frac{(m+1-s)^{\frac{\tau-1}{2}}}{2^{m(\alpha+\beta)}} \Big(\sum_{k \in M_\mu} |\bar{k}^{\alpha} \hat{f}(k)|^2 \Big)^{1/2} \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$\le c_2 \max_{\psi_0(1) \le s \le m} \frac{(m+1-s)^{\frac{\tau-1}{2}}}{2^{-s\beta}} \frac{1}{2^{m(\alpha+\beta)}} \|f\|_{W_2^{\alpha}} < c_3 \frac{1}{2^{m\alpha}} \|f\|_{W_2^{\alpha}}. \quad \square$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дис. … канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ. 1965.
2. *Шарыгин И. Ф.* Оценки снизу в теории интегрирования и приближения на классах функций: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1965.
3. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey on optimal recovery // Optimal estimation in approximation theory. New York: Plenum Press, 1977. P. 1–54.
4. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.

5. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on optimal recovery // Lect. Notes Math. Berlin: Springer-Verl., 1985. V. 1129 P. 21–93.

6. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 6. С. 85–93.

7. *Кудрявцев С. Н.* Восстановление функций вместе с их производными по значениям функций в заданном числе точек // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, № 6. С. 79–104.

8. *Osipenko K. Yu.* Optimal recovery of analytic functions. Huntington; New York: Nova Sci. Publ. Inc., 2000.

9. *Рябенький В. С.* О таблицах и интерполяции функций из некоторого класса // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131, № 5. С. 1025–1027.

10. *Смоляк С. А.* Интерполяционные и квадратурные формулы на классах W_s^α и E_s^α // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131, № 5. С. 1028–1031.

11. *Коробов Н. М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

12. *Hua Loo Keng, Wang Yuan.* Applications of number theory to numerical analysis. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1981.

13. *Смоляк С. А.* Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148, № 5. С. 1342–1045.

14. *Темляков В. Н.* Приближенное восстановление периодических функций нескольких переменных // Мат. сб. 1985. Т. 128, № 2. С. 256–268.

15. *Шерниязов К. Е.* Приближенное восстановление функций и решение уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E, SW и B: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Алматы, 1998.

16. *Ковалева И. М.* Восстановление и интегрирование функций из анизотропного класса Коробова // Сиб. журн. вычисл. математики. 2002. Т. 5, № 3. С. 255–266.

17. *Темляков В. Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 2. С. 314–317.

18. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та. им. В. А. Стеклова. 1986. Т. 178. С. 1–112.

19. *Галеев Э. М.* Порядки ортопроекционных поперечников классов периодических функций одной или нескольких переменных // Мат. заметки. 1988. Т. 43, № 2. С. 197–211.

20. *Бабенко К. И.* О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, № 5. С. 982–985.

21. *Теляковский С. А.* Об оценках производных тригонометрических полиномов многих переменных // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 6. С. 1404–1411.

22. *Тлеуханова Н. Т.* О приближенном вычислении мультипликативных преобразований функций из класса Коробова и Соболева // Мат. журн. 2002. Т. 2, № 3. С. 154–156.

23. *Тлеуханова Н. Т.* Интерполяционная формула для функций многих переменных // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 1. С. 154–156.

24. *Тлеуханова Н. Т.* Интерполяционная формула для мультипликативных преобразований функций многих переменных // Докл. АН. 2003. Т. 390, № 2. С. 169–171.

25. *Sarybekova L., Tararykova T., Tleukhanova N.* On a generalization of the Lizorkin theorem on Fourier multipliers // Math. Inequal. Appl. 2010. V. 13, N 3. P. 613–624.

26. *Пустовойтов Н. Н.* Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 1. С. 107–117.

27. *Тлеуханова Н. Т., Нурсултанов Е. Д.* Квадратурные формулы для классов функций малой гладкости // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 10. С. 133–160.

28. *Smailov E. S., Tleukhanova N. T.* Estimation of error of cubature formula in Besov space // Eurasian Math. J. 2010. V. 1, N 1. P. 131–141.

29. *Нурсултанов Е. Д.* О мультипликаторах рядов Фурье по тригонометрической системе // Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 2. С. 235–247.

30. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

31. *Нурсултанов Е. Д.* О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p-пространств // Изв. РАН. Сер. мат. 2000. Т. 64, № 1. С. 95–122.

32. *Нурсултанов Е. Д.* Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Докл. АН. 2004. Т. 394, № 1. С. 22–25.

33. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.
34. *Lorentz G. G.* Some new functional spaces // Ann. Math. 1950. V. 51, N 2. P. 37–55.
35. *Stein E. M.* Interpolation of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. V. 83. P. 482–492.

Статья поступила 2 апреля 2012 г., окончательный вариант — 2 июля 2013 г.

Нурсултанов Ерлан Даутбекович
Московский гос. университет имени М. В. Ломоносова (Казахстанский филиал),
Евразийский Национальный университет имени Л. Н. Гумилева,
ул. Мунайтпасова, 7, Астана 010010, Казахстан
er-nurs@yandex

Тлеуханова Назерке Тулековна
Евразийский Национальный университет имени Л. Н. Гумилева,
ул. Мунайтпасова, 7, Астана 010010, Казахстан
tleukhanova@rambler.ru