Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2014. Том 55, № 3

УДК 512.54+510.5

ВЫЧИСЛИМЫЕ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

М. К. Нуризинов,
Р. К. Тюлюбергенев, Н. Г. Хисамиев

Аннотация. Найдены критерии вычислимости (конструктивизируемости) нильпотентных групп без кручения конечных размерностей. Доказано существование главной вычислимой нумерации класса всех вычислимых нильпотентных групп без кручения конечных размерностей. Построен пример подгруппы группы всех унитреугольных матриц размерности 3 над полем рациональных чисел, которая не вычислима, но секции любого ее центрального ряда вычислимы.

Ключевые слова: размерность группы, нильпотентная группа без кручения конечной размерности, унитреугольная группа матриц над полем рациональных чисел, центральный ряд, секции центрального ряда, вычислимая группа, главная вычислимая нумерация.

Введение

Изучение вычислимых групп начато в [1], где А. И. Мальцев поставил общую задачу: *определить, какие конструктивные нумерации допускают те или иные абстрактно заданные группы.* В этой же работе дано описание вычислимых абелевых групп без кручения. Данная проблема исследовалась Ю. Л. Ершовым, С. С. Гончаровым и другими математиками (см. [2]). Относительно результатов, касающихся конструктивизаций нильпотентных групп, см., например, [3], где доказано, что любая конструктивизация локально нильпотентной группы без кручения продолжается естественным образом до конструктивизации ее пополнения; [4, 5], где для любого $n > 0$ построена нильпотентная группа, алгоритмическая размерность которой равна n, и приведены достаточные условия для автоустойчивости таких групп; [6], где построен пример вычислимой нильпотентной группы, фактор-группа которой по периодической части невычислима. Связи между конструктивизируемостью коммутативного ассоциативного кольца K с единицей и матричных групп над ним изучались в [7, 8]. В [7] доказано, что матричные группы $GL_n(K)$, $SL_n(K)$ и $UT_n(K)$ при $n \geq 3$ конструктивизируемы тогда и только тогда, когда кольцо K конструктивизируемо. В [8] построен пример неконструктивизируемого кольца K, для которого конструктивизируема группа $GL_2(K)$. В [9–13] получены критерии существования позитивной (конструктивной) нумерации нильпотентной группы без кручения.

В § 1 данной работы получены критерии вычислимости (конструктивизируемости) нильпотентных групп без кручения конечных размерностей как на

Работа выполнена при финансовой поддержке грантового финансирования МОН РК (гранты № 0726/ГФ, № 0929/ГФЗ).

языке подгрупп унитреугольной группы матриц $UT_n(Q)$ над полем рациональных чисел Q, так и на языке фактор-групп и функции выбора. Как следствие получено существование главной вычислимой нумерации класса всех вычислимых нильпотентных групп без кручения конечных размерностей. В § 2 построен пример подгруппы группы $UT_3(Q)$, которая невычислима, но секции любого ее центрального ряда вычислимы.

Все используемые, но не определяемые понятия теории конструктивных групп см. в [2], а теории абстрактных групп — в [14]. Напомним лишь некоторые из них.

Через γ_n обозначим некоторую геделеву нумерацию группы $UT_n(Q)$. Тогда по данному числу m эффективно определяется матрица $\gamma_n m$ и, наоборот, по данной матрице — ее γ_n-номер. Когда из контекста значение n не вызывает двусмысленности, индекс n опускается. Максимальная система линейно независимых элементов абелевой группы без кручения называется ее *базисом.* Мощность базиса называется *размерностью* абелевой группы. Будем говорить, что размерность нильпотентной группы без кручения G *конечна*, если существует центральный ряд, все секции которого имеют конечную размерность. Центр группы G обозначается через $Z(G)$, а коммутант — через G'.

Пусть ω — множество всех натуральных чисел, G — некоторая группа и $\nu : \omega \to G$ — отображение ω на G. Пара (G, ν) называется *нумерованной группой.* Нумерованная группа называется *конструктивной*, если существует алгоритм, который по любым натуральным числам n, m и s определяет справедливость равенств $\nu n = \nu m$ и $\nu n \cdot \nu m = \nu s$. Группа G называется *вычислимой* (или *конструктивизируемой*), если существует нумерация $\nu : \omega \to G$ группы G такая, что (G, ν) — конструктивная группа. Подгруппа H нумерованной группы (G, ν) называется *вычислимой* (*вычислимо перечислимой*) в (G, ν), если множество $\nu^{-1}H$ вычислимо (вычислимо перечислимо). Если (G, ν) — конструктивная группа, то ν называется *вычислимой нумерацией* группы G. Если ν_1 и ν_2 — нумерации группы G и существует вычислимая функция $f(n)$ такая, что $\nu_1 n = \nu_2 f(n)$ для любого n, то говорят, что ν_1 *m-сводится* к ν_2, и пишут $\nu_1 \leq_m \nu_2$.

§ 1. Нильпотентные группы без кручения конечных размерностей

Пусть Z — кольцо целых чисел. Известно (см., например, [14]), что любая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения изоморфно вложима в группу $UT_n(Q)$ при некотором n. Следующее утверждение является более общим.

Предложение 1. *Нильпотентная группа G без кручения конечной размерности изоморфно вложима в группу $UT_n(Q)$ при некотором n.*

Доказательство. Пусть
$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{k-1} = G \tag{1}$$
— центральный ряд группы G такой, что
$$\bar{g}_{i0}, \bar{g}_{i1}, \ldots, \bar{g}_{in_i-1} \tag{2}$$
является базисом секции $\overline{G}_i = G_i/G_{i-1}$, $0 < i < k$. Подгруппа H, порожденная всеми базисными элементами, конечно порождена. Поэтому по упомянутой выше теореме группа H вложима в группу $UT_n(Q)$ при некотором n. Отсюда и из полноты группы $UT_n(Q)$ получаем требуемое утверждение. $\square$

Следствие 1. *Нильпотентная группа без кручения имеет конечную размерность тогда и только тогда, когда она изоморфна подгруппе $UT_n(Q)$ при некотором n.*

Далее будет доказан аналог (следствие 4) этого следствия для вычислимых нильпотентных групп без кручения конечных размерностей.

Теорема 1. *Пусть (G,ν) — вычислимо нумерованная нильпотентная группа конечной размерности и (1) — ее центральный ряд, секции $\overline{G}_i = G_i/G_{i-1}$ которого не имеют кручения, $i < k$. Тогда для любого i подгруппа G_i вычислима в (G,ν).*

Доказательство. Сначала докажем индукцией по i, что все подгруппы G_i вычислимо перечислимы в (G,ν). В каждой секции $\overline{G}_j$, $j < n_i$, зафиксируем базис (2). Тогда для любого $g \in G$ справедлива следующая эквивалентность:

$$\begin{gathered}\text{элемент } g \text{ принадлежит } G_i, \text{ если и только если существуют целые}\\ \text{числа } r, s_0, \dots, s_{n_i-1} \text{ и элемент } h \in G_{i-1} \text{ такие, что справедливо}\\ \text{равенство } g_{i0}^{s_0} \cdot \ldots \cdot g_{in_i-1}^{s_{n_i-1}} h = g^r.\end{gathered} \tag{3}$$

Из эквивалентности (3) и индукционного предположения следует вычислимая перечислимость подгруппы G_i в (G,ν). Индукционный шаг доказан. Поэтому все подгруппы G_i вычислимо перечислимы при $0 < i < k$.

Докажем, что дополнение $G \setminus G_i$ также вычислимо перечислимо. Действительно, справедлива эквивалентность:

$$\begin{gathered}\text{элемент } g \text{ не принадлежит } G_i \text{ тогда и только тогда, когда}\\ \text{существуют } j,\ i < j < k, r, s_0, \dots, s_{n_j-1} \text{ и } h \in G_{j-1} \text{ такие, что}\\ g_{j0}^{s_0} \cdot \ldots \cdot g_{jn_j-1}^{s_{n_j-1}} h = g^r, \quad \sum_{k<n_j} |s_k| \neq 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Отсюда и из вычислимой перечислимости G_{j-1} следует, что дополнение G/G_i также вычислимо перечислимо. Следовательно, по теореме Поста подгруппа G_i вычислима в (G,ν). $\square$

Пусть G — нильпотентная группа без кручения конечной размерности, (1) — ее центральный ряд, секции которого не имеют кручения, и, как выше, (2) — базис секции $\overline{G}_i$. *Характеристикой* $\chi(\overline{G}_i)$ группы $\overline{G}_i$ назовем множество наборов целых чисел

$$\chi(\overline{G}_i) = \Bigg\{(m, s_{i0}, \dots, s_{in_i-1}) \mid \exists g \in G_i \exists h \in G_{i-1}, \\ g_{i0}^{s_{i0}} \cdot \ldots \cdot g_{in_i-1}^{s_{in_i-1}} h = g^m, \ \sum_{j<n_i} |s_{ij}| \neq 0\Bigg\}. \tag{5}$$

Как известно, секция $\overline{G}_i$ как абелева группа без кручения однозначно с точностью до изоморфизма определяется своей характеристикой.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 2. *Если G — вычислимая нильпотентная группа без кручения конечной размерности и (1) — ее центральный ряд, все секции $\overline{G}_i = G_i/G_{i-1}$ которого не имеют кручения, то $\overline{G}_i$ вычислима, а потому ее характеристика $\chi(\overline{G}_i)$ — вычислимо перечислимое множество.*

Теорема 2. *Пусть подгруппа $G \leq UT_n(Q)$ вычислима, ν — некоторая ее вычислимая нумерация и (1) — ее центральный ряд, секции которого не имеют кручения. Тогда каждая подгруппа G_i вычислимо перечислима в $(UT_n(Q), \gamma)$ и $\nu \leq_m \gamma$, где γ — геделева нумерация группы $UT_n(Q)$.*

Доказательство. Пусть ν — вычислимая нумерация группы G. По теореме 1 множество $\nu^{-1}G_i$ вычислимо в (G, ν), $i < k$. Пусть (2) — базис секции $\overline{G}_i = G_i/G_{i-1}$. В каждом классе $\bar{g}_{ij}$, $j < n_i$, зафиксируем матрицу A_{ij}. Так как множество таких матриц конечно, можно считать, что их γ-номера известны. Индукцией по i докажем, что подгруппа G_i вычислимо перечислима в $(UT_n(Q), \gamma)$ и для каждого числа $s \in \nu^{-1}G_i$ можно эффективно найти такое t, что $\nu s = \gamma t$. Для $i = 0$ это очевидно. Предположим, что для $i-1$ это доказано, т. е. $\gamma^{-1}G_{i-1}$ — вычислимо перечислимое подмножество и существует частично вычислимая функция f_{i-1} с областью определения $\delta f_{i-1} = \nu^{-1}G_{i-1}$ такая, что $\nu s = \gamma f_{i-1}(s)$ для всех $s \in \nu^{-1}G_{i-1}$.

Из определения матриц A_{ij} следует, что для любого s справедлива эквивалентность:

$$\begin{gathered}\nu s \in G_i \text{ тогда и только тогда, когда существуют целые числа} \\ r, r_0, \ldots, r_{n_i-1} \text{ и } t \in \nu^{-1}G_{i-1} \text{ такие, что } (\nu s)^r = A_{i0}^{r_0} \cdot \ldots \cdot A_{in_i-1}^{r_{n_i-1}} \nu t.\end{gathered} \tag{6}$$

Если для s имеет место (6), то $\nu s \in A_i$. По индукционному предположению $\nu t = \gamma f_{i-1}(t)$. Из определения нумерации γ группы $UT_n(Q)$ вытекает, что по числу $f_{i-1}(t)$ можно эффективно найти матрицу $B = \gamma f_{i-1}(t)$. Отсюда по числам $r_0, \ldots, r_{n_i-1}$ эффективно находим матрицу

$$C = A_{i0}^{r_0} \cdot \ldots \cdot A_{in_i-1}^{r_{n_i-1}} \cdot B.$$

Так как $UT_n(Q)$ — полная нильпотентная группа без кручения, можно эффективно найти матрицу D и число m такие, что $D^r = C$ и $\gamma m = D$.

Отсюда и из (6) следует, что существует алгоритм, перечисляющий γ-номера матриц из подгруппы G_i, и для любого s можно эффективно найти γ-номер элемента νs, и тем самым индукционный шаг доказан. Таким образом, все подгруппы G_i вычислимо перечислимы в $(UT_n(Q), \gamma)$ и $\nu \leq_m \gamma$. $\square$

Следствие 3. *Подгруппа $G \leq UT_n(Q)$ вычислима тогда и только тогда, когда она вычислимо перечислимая подгруппа в $(UT_n(Q), \gamma)$.*

Действительно, пусть ν — вычислимая нумерация подгруппы G. По теореме 2 ν m-сводится к γ. Следовательно, G — вычислимо перечислимая подгруппа.

Из этого и следствия 1 вытекает

Следствие 4. *Нильпотентная группа без кручения конечной размерности вычислима тогда и только тогда, когда она изоморфна вычислимо перечислимой подгруппе $(UT_n(Q), \gamma)$ при некотором n.*

Напомним [2], что некоторый счетный класс групп K называется *вычислимым*, если существует класс $L = \{\langle G_n, \nu_n \rangle \mid n \in \omega\}$ нумерованных групп такой, что множество

$$D(L) = \{(n, k, l, m) \mid \nu_n k \cdot \nu_n l = \nu_n m\}$$

— вычислимое множество, и классы K и L совпадают с точностью до изоморфизма групп. Нумерация $\alpha : \omega \to K$, где $\alpha n = (G_n, \nu_n)$, называется *вычислимой нумерацией* класса K. Вычислимая нумерация π класса K называется *главной*, если любая вычислимая нумерация любого подкласса класса K m-сводится к π.

Теорема 3. *Существует главная вычислимая нумерация семейства всех вычислимых нильпотентных групп без кручения конечных размерностей.*

Доказательство. Пусть дана последовательность

$$\alpha = (\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{nn+1}, \alpha_{13}, \alpha_{24}, \dots, \alpha_{n-1n+1}, \dots, \alpha_{1n+1})$$

рациональных чисел длины $n^* \leftrightharpoons C_n^2$, $n > 0$, где C_n^2 — число сочетаний из n по 2. По ней однозначно определяется унитреугольная матрица $\bar{\alpha}$ размером $n+1$, элементами которой являются α_{ij}. Поэтому существует эффективное взаимно однозначное отображение φ_n множества Q^{n^*} на $UT_{n+1}(Q)$, где $\varphi_n \alpha = \bar{\alpha}$. Если $S \subseteq Q^{n^*}$, то через $\overline{S}$ обозначим подгруппу, порожденную матрицами $\bar{\alpha}$, $\alpha \in S$. Отметим, что если S — вычислимо перечислимое подмножество, то $\overline{S}$ — вычислимо перечислимая подгруппа. Верно и обратное: если G — вычислимо перечислимая подгруппа группы $(UT_{n+1}(Q), \gamma_{n+1})$, то $\varphi_n^{-1} G$ также вычислимо перечислимое подмножество в Q^{n^*}.

Как известно [15], существует главная вычислимая нумерация π_n семейства K_n всех вычислимо перечислимых подмножеств Q^{n^*}. По ней определим нумерацию $\bar{\pi}_n$ семейства L_n всех вычислимо перечислимых подгрупп группы $(UT_{n+1}(Q), \gamma_{n+1})$, положив $\bar{\pi}_n(m) = \overline{\pi_n(m)}$. По следствию 4 $\bar{\pi}_n$ является нумерацией семейства всех вычислимых нильпотентных групп без кручения размерностей не более C_{n+1}^2. Докажем, что $\bar{\pi}_n$ — главная вычислимая нумерация семейства L.

Пусть μ — вычислимая нумерация некоторого семейства R вычислимо перечислимых подгрупп группы $(UT_{n+1}(Q), \gamma_{n+1})$. По нему определим нумерованное семейство (F, ν) вычислимо перечислимых подмножеств Q^{n^*}, положив $F = \{B \subseteq Q^{n^*} \mid \varphi_n^{-1} G = B, G \in R\}$, $\nu m = \varphi_n^{-1} \mu m$. Тогда нумерация ν будет вычислимой нумерацией семейства вычислимо перечислимых подмножеств Q^{n^*}. Так как π_n — главная нумерация семейства, существует вычислимая функция $g(n)$ такая, что $\nu m = \pi_n g(m)$. Тогда $\mu m = \overline{\pi_n g(m)} = \bar{\pi}_n(g(m))$, т. е. $\mu \leq_m \bar{\pi}_n$.

Таким образом, доказано, что существует главная вычислимая (равномерная по n) нумерация семейства L_n всех вычислимо перечислимых подгрупп группы $(UT_{n+1}(Q), \gamma_{n+1})$. Отсюда и из равномерной по n вычислимости семейства $(UT_{n+1}(Q), \gamma_{n+1})$ получаем требуемое. $\square$

Пусть дана группа G и $H \lhd G$, где G/H — абелева группа без кручения конечной размерности. Пусть $\bar{g}_0, \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{n-1}$ — базис фактор-группы G/H. Тогда для любой последовательности

$$\varkappa = (m, s_0, \dots, s_{n-1}) \in \chi(G/H),$$

где $\chi(G/H)$ — характеристика фактор-группы G/H, существуют элементы $h_\varkappa \in H$ и $g_\varkappa \in G$ такие, что

$$g_0^{s_0} \cdot \ldots \cdot g_{n-1}^{s_{n-1}} h_\varkappa = g_\varkappa^m.$$

Если каждой последовательности $\varkappa \in \chi(G/H)$ каким-то способом сопоставлен однозначно определенный элемент $h_\varkappa$, то будем говорить, что определена *функция выбора* $ch : \chi(G/H) \to H$.

Теорема 4. *Пусть G — подгруппа группы $(UT_n(Q), \gamma)$, (1) — ее центральный ряд, секции которого без кручения, и (2) — базис для $\overline{G}_i = G_i/G_{i-1}$, $0 < i < k$. Тогда G вычислима, если и только если выполняются следующие условия:*

1) *характеристика $\chi(\overline{G}_i)$ вычислимо перечислима,*

2) *существует частично вычислимая функция выбора $ch_i^* : \chi(\overline{G}_i) \to \gamma^{-1}G_{i-1}$ такая, что для любой последовательности $\varkappa = (m, s_{i0}, \dots, s_{in_i-1}) \in \chi(\overline{G}_i)$ существует элемент $g \in G_i$, для которого*

$$g_{i0}^{s_{i0}} \cdot \ldots \cdot g_{in_i-1}^{s_{in_i-1}} \cdot \gamma ch_i^*(\varkappa) = g^m, \quad \text{где } ch_1^* \equiv 1.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть группа G вычислима. По теореме 2 каждая подгруппа G_i вычислимо перечислима в $(UT_n(Q), \gamma)$. По следствию 2 характеристика $\chi(\overline{G}_i)$ — вычислимо перечислимое множество. Пусть $\varkappa = (m, s_{i0}, \dots, s_{in_i-1}) \in \chi(\overline{G}_i)$. Тогда семейство множеств $P_\varkappa$, $\varkappa \in \chi(\overline{G}_i)$, определенное как

$$P_\varkappa = \bigl\{(r, n) \mid \gamma r \in G_{i-1},\ \gamma n \in G_i,\ g_{i0}^{s_{i0}} \cdot \ldots \cdot g_{in_i-1}^{s_{in_i-1}} \cdot \gamma r = \gamma n^m\bigr\},$$

вычислимо перечислимо равномерно по $\varkappa$. Зафиксируем некоторое эффективное перечисление элементов этого семейства.

Пусть (r, n) — 1-я пара из $P_\varkappa$ в этом перечислении. Тогда полагаем $ch_i^*(\varkappa) = r$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть справедливы условия теоремы, т. е. для центрального ряда (1) справедливы условия 1, 2. Индукцией по $i < k$ докажем вычислимую перечислимость подгруппы G_i в $(UT_n(Q), \gamma)$. Для $i = 0$ это очевидно. Пусть G_{i-1} — вычислимо перечислимая подгруппа в $(UT_n(Q), \gamma)$ и дана характеристика

$$\varkappa = (m, s_{i0}, \dots, s_{in_i-1}) \in \chi(\overline{G}_i), \quad ch_i^*(\varkappa) = r, \quad \gamma r \in G_{i-1}.$$

Так как $(UT_n(Q), \gamma)$ — полная нильпотентная группа без кручения, эффективно находим элемент $g \in UT_n(Q)$ такой, что

$$g_{i0}^{s_{i0}} \cdot \ldots \cdot g_{in_i-1}^{s_{in_i-1}} \cdot \gamma r = g^m, \quad \gamma r \in G_{i-1}. \tag{7}$$

Поскольку элемент из левой части этого равенства (7) принадлежит G_i и секция G_i/G_{i-1} без кручения, по определению функции ch_i^* имеем $g \in G_i$. Легко проверить, что семейство множеств

$$H_\varkappa = \bigl\{h \in UT_n(Q) \mid \exists b \in G_{i-1}\bigl(g_{i0}^{s_{i0}} \cdot \ldots \cdot g_{in_i-1}^{s_{in_i-1}} \cdot b = h^m\bigr)\bigr\}$$

вычислимо перечислимо равномерно по $\varkappa$. Для доказательства теоремы нужно построить алгоритм, определяющий принадлежность элемента h из $H_\varkappa$ подгруппе G_i.

Пусть

$$g_{i0}^{s_{i0}} \cdot \ldots \cdot g_{in_i-1}^{s_{in_i-1}} \cdot b = h^m, \quad b \in G_{i-1}. \tag{8}$$

Для простоты записи введем следующие обозначения:

$$s_{ik} \leftrightharpoons s_k, \quad n_i \leftrightharpoons n, \quad \gamma r \leftrightharpoons a.$$

Тогда (7), (8) перепишутся в виде

$$g_0^{s_0} \cdot \ldots \cdot g_{n-1}^{s_{n-1}} \cdot a = g^m, \quad a \in G_{i-1},\ g \in G_i, \tag{9}$$

$$g_0^{s_0} \cdot \ldots \cdot g_{n-1}^{s_{n-1}} \cdot b = h^m, \quad b \in G_{i-1},\ h \in H_\varkappa. \tag{10}$$

Отсюда следует, что

$$\xi = g^m h^{-m} = ab^{-1}c, \tag{11}$$

где c — произведение коммутаторов вида $\left[a^{\varepsilon_0}, b^{\varepsilon_1}, g_{i_0}^{\varepsilon_2}, \dots, g_{i_{s-1}}^{\varepsilon_{s+2}}\right]$, $\varepsilon_k = \pm 1$, т. е. $c \in G_{i-2}$. Тогда в силу (9) и (10)

$$\xi = (gh^{-1})^m \eta \in G_{i-1}, \tag{12}$$

где η — произведение коммутаторов от g и h.

Докажем, что справедлива эквивалентность

$$h \in G_i \Leftrightarrow \eta \in G_{i-1}, \quad \sqrt[m]{\xi\eta^{-1}} \in G_{i-1}. \tag{13}$$

Действительно, пусть $h \in G_i$. Тогда согласно (11) и (12) получим $\eta \in G_{i-1}$. Отсюда и из (12) следует $(gh^{-1})^m \in G_{i-1}$. Так как $\overline{G}_i$ не имеет кручения, $gh^{-1} \in G_{i-1}$, т. е. $gh^{-1} = \sqrt[m]{\xi\eta^{-1}} \in G_{i-1}$.

Пусть η, $\sqrt[m]{\xi\eta^{-1}} \in G_{i-1}$. Отсюда и из (12) ввиду однозначности извлечения корней в $UT_n(Q)$ имеем $gh^{-1} = \sqrt[m]{\xi\eta^{-1}} \in G_i$, т. е. $h \in G_i$. Эквивалентность (13) доказана.

Приведем алгоритм перечисления элементов подгрупп G_i в $(UT_n(Q), \gamma)$. Пусть даны последовательность $\varkappa = (m, s_{i0}, \dots, s_{in_i-1}) \in \chi(\overline{G}_i)$ и элемент $\gamma ch_i^*(\varkappa) = a$. По ним эффективно находим элемент $g \in UT_n(Q)$ такой, что справедливо (9).

По определению функции ch_i элемент g принадлежит G_i. Пусть для элемента $h \in H_i$ справедливо (10). В силу (11) и (12) по элементам g и h эффективно определяем элементы ξ и η. Так как по индукционному предположению подгруппа G_{i-1} вычислимо перечислима, множество пар (ξ, η), для которых справедлива правая часть (13), вычислимо перечислимо. Отсюда и из (13) следует вычислимая перечислимость подгруппы G_i. Индукционный шаг доказан. Следовательно, подгруппа $G_{k-1} = G$ вычислимо перечислима в $(UT_n(Q), \gamma)$, а потому G вычислима. $\square$

§ 2. Пример невычислимой нильпотентной группы без кручения, секции любого центрального ряда которой вычислимы

Здесь будет доказана независимость условия 2 от условия 1 теоремы 4.

В дальнейшем матрицу $M \in UT_3(Q)$ будем записывать так:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_M & z_M \\ 0 & 1 & y_M \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Напомним следующие известные формулы:

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & nx_M & nz_M + C_n^2 x_M y_M \\ 0 & 1 & ny_M \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x_M & -z_M + x_M y_M \\ 0 & 1 & -y_M \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Если $M_0, \dots, M_{n-1} \in UT_n(Q)$, то

$$M_0 M_1 \cdot \ldots \cdot M_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & \sum x_i & \sum z_i + \sum\limits_{i<n} \bigl(\sum\limits_{k<i} x_k y_i \bigr) \\ 0 & 1 & \sum y_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $x_i = x_{M_i}$, $y_i = y_{M_i}$, $z_i = z_{M_i}$.

Пусть P — бесконечное вычислимо перечислимое множество простых чисел, $2 \notin P$, $r : P \to \omega$, $s : P \to \omega$ — функции, где s вычислима, а r — нет, $3 < r_p < s_p - 2$ для любого $p \in P$, $r_p \leftrightharpoons r(p)$, $s_p \leftrightharpoons s(p)$. Функции r и s с заданными свойствами и ограничениями существуют и будут построены в лемме 5. По ним зададим группу $G \leq UT_3(Q)$ с порождающими

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$R_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{p^{r_p}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

и матрицами A_p, $p \in P$, определенными формулой

$$B_0^p B_1^p R_p = A_p^{p^{s_p}}, \tag{19}$$

где $p \in P$.

Прямые вычисления с использованием формулы (14) показывают, что справедлива

Лемма 1. *Для любого $p \in P$ имеем*

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{p^{s_p-1}} & \frac{p^{s_p}+2p^{s_p-r_p+2}+1}{2p^{2s_p-2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{p^{s_p-1}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Лемма 2. *Коммутант G' группы G порождается матрицами вида*

$$S_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{p^{s_p-1}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p \in P. \tag{21}$$

Доказательство. Справедливы следующие равенства:

$$[B_0, B_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$[B_0, A_p]^{p^{s_p}} = \left[B_0, A_p^{p^{s_p}}\right] = \left[B_0, B_0^p B_1^p R_p\right] = [B_0, B_1]^p.$$

Отсюда и из (22) получим

$$[B_0, A_p] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{p^{s_p-1}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p \in P. \tag{23}$$

Аналогично

$$[B_1, A_p] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{p^{s_p-1}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$[A_p, A_q]^{p^{s_p+s_q}} = \left[A_p^{p^{s_p}}, A_q^{p^{s_q}}\right] = \left[B_0^p, B_1^p R_p, B_0^q, B_1^q R_p\right][B_0, B_1]^{pq}[B_0, B_1]^{-pq} = E,$$

т. е.

$$A_p A_q = A_q A_p. \tag{25}$$

Из (23)–(25) непосредственно следует утверждение леммы. $\square$

Из этой леммы, вычислимой перечислимости множества P и вычислимости функции s вытекает

Следствие 5. *Коммутант G' вычислим, так как он является вычислимой перечислимой подгруппой группы $(UT_n(Q), \gamma)$.*

Лемма 3. *Центр $Z(G)$ совпадает с коммутантом G'.*

Доказательство. Из (17) легко следует, что центр $Z(G)$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in Q. \tag{26}$$

Из определения группы G вытекает, что любая матрица $M \in G$ лежит в смежном классе по G', содержащем некоторую матрицу вида

$$L = B_0^{\alpha_0} B_1^{\alpha_1} A_0^{\beta_0} \cdot \ldots \cdot A_{k-1}^{\beta_{k-1}}, \quad \alpha_0, \alpha_1, \beta_i \in Z, \ i < k, \tag{27}$$

где $A_i = A_{p_i}$, т. е.

$$M = LC, \quad C \in G'. \tag{28}$$

Следовательно, $M \in Z(G)$ тогда и только тогда, когда $L \in Z(G)$. Допустим, $L \in Z(G)$. Тогда в силу (14)–(17), (26), (27) имеем

$$x_L = \alpha_0 + \frac{\beta_0}{p_0^{s_0-1}} + \dots + \frac{\beta_{k-1}}{p_{k-1}^{s_{k-1}-1}} = 0,$$

$$y_L = \alpha_1 + \frac{\beta_0}{p_0^{s_0-1}} + \dots + \frac{\beta_{k-1}}{p_{k-1}^{s_{k-1}-1}} = 0,$$

где $s_i = s_{p_i}$, т. е.

$$\alpha \leftrightharpoons \alpha_0 = \alpha_1 = -\frac{\beta_0}{p_0^{s_0-1}} - \dots - \frac{\beta_{k-1}}{p_{k-1}^{s_{k-1}-1}}. \tag{29}$$

Если положить

$$\bar{s} = p_0^{s_0-1} \cdot \ldots \cdot p_{k-1}^{s_{k-1}-1}, \quad \bar{s}_i = \frac{\bar{s}}{p_i^{s_i-1}}, \tag{30}$$

то (29) перепишется в виде

$$-\alpha\bar{s} = \beta_0\bar{s}_0 + \dots + \beta_{k-1}\bar{s}_{k-1}. \tag{31}$$

Из (30) следует, что $\bar{s}$ и $\bar{s}_j$, $j \neq i$, делятся на $p_i^{s_i-1}$. Отсюда и из (31) вытекает делимость $\beta_i\bar{s}_i$ на $p_i^{s_i-1}$, но в силу (30) $\bar{s}_i$ не делится на p_i. Следовательно,

$$\beta_i = \gamma_i p_i^{s_i-1} \tag{32}$$

для некоторого $\gamma_i \in Z$. Вычислим матрицу $A_i^{\gamma_i p_i^{s_i-1}}$ по формулам (14), (20). Получим

$$x_{A_i^{\beta_i}} = y_{A_i^{\beta_i}} = \gamma_i p_i^{s_i-1} \frac{1}{p_i^{s_i-1}} = \gamma_i, \tag{33}$$

$$\begin{aligned} z_{A_i^{\beta_i}} &= \gamma_i p_i^{s_i-1} \frac{p_i^{s_i} + 2p_i^{s_i-r_i+2} + 1}{2p_i^{2s_i-2}} + \gamma_i p_i^{s_i-1} \frac{\gamma_i p_i^{s_i-1} - 1}{2p_i^{2s_i-2}} \\ &= \frac{\gamma_i\big(p_i^{s_i} + 2p_i^{s_i-r_i+2} + 1 + \gamma_i p_i^{s_i-1} - 1\big)}{2p_i^{s_i-1}} = \frac{\gamma_i p_i^{s_i-r_i+2}\big(p_i^{r_i-2} + \gamma_i p_i^{r_i-3} + 2\big)}{2p_i^{s_i-1}} \\ &= \frac{\gamma_i\big(p_i^{r_i-2} + \gamma_i p_i^{r_i-3} + 2\big)}{2p_i^{r_i-3}}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что числитель последней дроби — четное число, поэтому последнее равенство можно записать так:

$$z_{A_i^{\beta_i}} = \frac{m_i}{p^{r_i-3}}$$

для некоторого $m_i \in Z$. Отсюда и из (15), (26), (31) следует, что

$$x_L = y_L = \alpha + \sum \gamma_i = 0, \quad z_L = \sum \frac{m_i}{p_i^{r_i-3}} + n$$

для некоторого $n \in Z$, т. е.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sum \frac{m_i}{p_i^{r_i-3}} \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда в силу $r_i < s_i$ и леммы 2 получим $L \in G'$, а потому согласно (28) $M \in G'$, т. е. $Z(G) = G'$. $\square$

Лемма 4. *Для любого $p \in P$ уравнение $B_0^p B_1^p X = Y^{p^{s_p}}$, где*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{q^k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для некоторых $q \in P$, $k \in Z$, имеет единственное решение $X = R_p$, $Y = A_p$, определяемое формулами (18) *и* (20) *соответственно.*

Доказательство. Допустим, что существует другое решение, т. е. для некоторой матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{q^k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \tag{34}$$

при $q \neq p$ найдется матрица $D \in G$ такая, что

$$B_0^p B_1^p C = D^{p^{s_p}}. \tag{35}$$

Отсюда и из (20) имеем

$$\left[A_p^{p^{s_p}}, D^{-p^{s_p}}\right] = \left[B_0^p B_1^p R_p, C^{-1} B_1^{-p} B_0^{-p}\right] = E,$$

т. е. $[A_p, D^{-1}]^{p^{2s_p}} = E$.

Так как G — группа без кручения, $[A_p, D^{-1}] = E$. Из (19) и (35) следует, что

$$R_p C^{-1} = (A_p D^{-1})^{p^{s_p}}. \tag{36}$$

Отсюда в силу (18) и (34) получим

$$z_{R_p C^{-1}} = \frac{1}{p^{r_p}} - \frac{1}{q^k} = \frac{q^k - p^{r_p}}{p^{r_p} q^k} = p^{s_p} z_{A_p D^{-1}},$$

т. е.

$$z_{A_p D^{-1}} = \frac{q^k - p^{r_p}}{p^{r_p} q^k p^{s_p}}. \tag{37}$$

Рассмотрим следующие возможности.

1. $q \neq p$. Тогда числитель (37) взаимно прост с p, а потому $r_p+s_p > s_p-1$. В силу (36) $A_pD^{-1} \in Z(G)$. Это противоречит леммам 2 и 3, т. е. данный случай невозможен.

2. $p = q$. Если $k < r_p$, то в силу (37)

$$z_{A_pB^{-1}} = \frac{p^k(1-p^{r_p-k})}{p^{r_p}p^kp^{s_p}} = \frac{1-p^{r_p-k}}{p^{r_p+s_p}},$$

если же $k > r_p$, то аналогично

$$z_{A_pB^{-1}} = \frac{p^{k-r_p}-1}{p^{k+s_p}}.$$

Эти два равенства противоречат леммам 2, 3. Таким образом, $q = p$, $k = r_p$, следовательно, $X = R_p$. Отсюда и из однозначности операции извлечения корней в $UT_3(Q)$ в силу (19) получим $Y = A_p$. $\square$

Лемма 5. *Существуют 1-местные функции r и s такие, что s вычислима, а r — нет и для любого n*

$$3 < r(n) < s(n) - 2. \tag{38}$$

Доказательство. Пусть $K(n,m)$ — универсальная частично вычислимая функция для класса одноместных частично вычислимых функций и $\varphi(n) = K_n(n)$.

Определим требуемые функции следующими равенствами:

$$s(n) = 2^4, \tag{39}$$

$$r(n) = \begin{cases} \min\{3, \varphi(n)\} + 4, & \text{если } \varphi(n) \leq 3 \text{ или } \varphi(n) > 7, \\ 8, & \text{если } 3 < \varphi(n) \leq 7 \text{ либо } \varphi(n) \text{ не определено.} \end{cases} \tag{40}$$

Легко проверить, что $4 \leq r(n) \leq 8$ для любого n. Отсюда и из (39) следует (38).

Докажем, что функция $r(n)$ невычислима. Допустим противное, т. е. существует такое t, что $r(n) = \lambda n K(t,n)$. Отсюда $r(t) = K(t,t) = \varphi(t)$.

Если выполнено 1-е условие в (40), то $3 < r(n) \leq 7$, что невозможно. Аналогично 2-е условие в (40) также невозможно. Следовательно, функция $r(n)$ невычислима. Из (39) и (40) непосредственно следует (38). $\square$

Теорема 5. *Существует невычислимая подгруппа $G \leq UT_n(Q)$ такая, что все секции любого ее центрального ряда вычислимы.*

Доказательство. Пусть функции r и s определены, как в лемме 5, а группа G задана порождающими (17)–(19). По лемме 3 существует единственный центральный ряд $E < G' = Z(G) < G$, где группы G и G' вычислимо перечислимы в $(UT_n(Q), \gamma)$, а потому вычислимы. Докажем вычислимость секции $G/G' \leftrightharpoons \overline{G}$. Смежные классы $\overline{B}_0$ и $\overline{B}_1$ образуют базис группы $\overline{G}$. Из (19) следует, что для характеристики $\chi(\overline{G})$ секции $\overline{G}$ справедливо равенство $\chi(\overline{G}) = \{(p, s_p, 1, 1) \mid p \in P, s_p = s(p)\}$.

Так как множество P вычислимо перечислимо, а функция s вычислима, характеристика $\chi(\overline{G})$ вычислимо перечислима, а потому секция $\overline{G}$ вычислима.

Допустим, что группа G вычислима. Тогда в силу леммы 4 функция r вычислима, что противоречит лемме 5. Следовательно, группа G невычислима. $\square$

Замечание 1. Условие 2 теоремы 4 не зависит от условия 1.

Действительно, пусть P — бесконечное вычислимое множество простых чисел, а функции r и s такие же, как в лемме 5. По ним определим группу G порождающими (17)–(19). Тогда легко проверить, что характеристика $\chi(\overline{G})$ вычислима, но в то же время по теореме 5 группа G невычислима. Отсюда и из теоремы 4 следует, что условие 2 не выполнено.

В [13] доказано, что вычислимо перечислимо определенная нильпотентная группа G без кручения, коммутант которой имеет конечную размерность, вычислима. Отсюда следуют

Замечание 2. Все результаты § 1 данной работы остаются справедливыми, если в них условие «вычислимая» заменить на «вычислимо перечислимо определенная».

Следствие 6. *Пусть G — вычислимо перечислимо определенная нильпотентная группа, фактор-группа G/T которой по периодической части T имеет конечную размерность. Тогда фактор-группа G/T вычислима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* О рекурсивных абелевых группах // Докл. АН СССР. 1962. Т. 46, № 4. С. 1009–1012.
2. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научн. кн., 1996.
3. *Ершов Ю. Л.* Существование конструктивизаций // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 5. С. 1041–1044.
4. *Гончаров С. С., Молоков А. В., Романовский Н. С.* Нильпотентные группы конечной алгоритмической размерности // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 1. С. 82–88.
5. *Гончаров С. С., Дроботун Б. Н.* Об алгоритмической размерности нильпотентных групп // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 2. С. 52–60.
6. *Латкин И. В.* Арифметическая иерархия нильпотентных групп без кручения // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 3. С. 308–313.
7. *Романьков В. А., Хисамиев Н. Г.* О конструктивных матричных и упорядоченных группах // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 3. С. 353–363.
8. *Романьков В. А., Хисамиев Н. Г.* О конструктивных матричных группах // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 5. С. 603–613.
9. *Хисамиев Н. Г.* О конструктивных нильпотентных группах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 214–223.
10. *Хисамиев Н. Г.* Позитивно определенные нильпотентные группы // Мат. журн., Алматы. 2007. Т. 24, № 2. С. 95–102.
11. *Хисамиев Н. Г.* О конструктивных нильпотентных R_p-группах без кручения // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 1. С. 222–230.
12. *Хисамиев Н. Г.* Иерархии абелевых групп без кручения // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 2. С. 205–226.
13. *Хисамиев Н. Г.* О позитивных и конструктивных группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1133–1146.
14. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. Л.* Основы теории групп. М.: Наука, 1996.
15. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986.

Статья поступила 30 октября 2013 г.

Нуризинов Марат Кабидолдинович, Тюлюбергенев Рустем Кабдыкарымович,
Хисамиев Назиф Гарифуллинович
Восточно-Казахстанский гос. технический университет им. Д. Серикбаева,
ул. Протазанова, 69, Усть-Каменогорск 070004, Казахстан
marat.nurizinov@gmail.com, rustem.tylybergenev@gmail.com,
hisamiev@mail.ru