Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2014. Том 55, № 3

УДК 517.956.22

НЕТРИВИАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДИВЕРГЕНТНОГО ТИПА С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. И. Ноаров

Аннотация. На торе рассматривается стационарное уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова с комплексными коэффициентами диффузии и комплексным векторным полем. При подходящих условиях на коэффициенты диффузии доказывается существование решения, отличного от тождественного нуля. В ряде случаев устанавливается многомерность пространства решений.

Ключевые слова: стационарное уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова, разложение Вейля.

На торе T, представляющем собой куб $[0;1]^n$, у которого «склеены» противоположные грани, рассмотрим следующие уравнения:

$$\sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{l,k}(\mathbf{x})\frac{\partial U(x)}{\partial x_l}\right) = \operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

$$\sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{l,k}(\mathbf{x})\frac{\partial U(x)}{\partial x_l}\right) - \operatorname{div}(U(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0. \tag{2}$$

Целью данной работы является доказательство разрешимости уравнения (1) и нетривиальной разрешимости уравнения (2) с заданными на торе T комплексными коэффициентами $a_{l,k}(\mathbf{x})$ и векторными полями $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

В основе нашего подхода лежит следующее наблюдение. Функционально-дифференциальное уравнение

$$\Delta u - \operatorname{div}(\mathbf{P}(u)) = 0 \tag{3}$$

разрешимо для широкого класса операторов $\mathbf{P}$, переводящих числовую функцию в векторное поле. Примерами здесь могут служить уравнение $\Delta u - \operatorname{div}(u\mathbf{f}) = 0$ (см. [1–3]), а также функционально-дифференциальное уравнение $\Delta u(\mathbf{x}) - \operatorname{div}(u(H(\mathbf{x}))\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$ (см. [4]). В первом примере линейный оператор $\mathbf{P}$ умножает функцию на заданное векторное поле $\mathbf{f}$. Этот оператор (как третий шаг соответствующих алгоритмов) фигурировал в [1–3] в различных функциональных пространствах, в [1, 2] он вместе с $\mathbf{f}$ считался «малым». Для второго примера оператор $u(\mathbf{x}) \mapsto u(H(\mathbf{x}))\mathbf{f}(\mathbf{x})$ из [4] мог трактоваться как компактное отображение из $W_2^1(T)$ в $L^2(T)$. Во всех указанных случаях доказана нетривиальная разрешимость (3).

В применении к уравнению (1) описанный метод реализуется в теореме 1, где матрица $a_{l,k}(\mathbf{x})$ считается «близкой к единичной», уравнение (1) принимает вид (3), а непрерывный оператор $\mathbf{P}$ из $W_2^1(T)$ в $L^2(T)$ дается третьим шагом алгоритма. Далее получаются различные утверждения о разрешимости (1), обобщающие разложение Вейля. Наконец, теорема 4 осуществляет переход от уравнения (1) к уравнению (2).

Введем пространство $L^2(T)$ комплексных векторных полей на торе T со скалярным произведением

$$(\mathbf{g}, \mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{T} g_j(\mathbf{x}) \bar{h}_j(\mathbf{x})\, dx_1 \dots dx_n$$

и нормой $\|\mathbf{h}\| = (\mathbf{h}, \mathbf{h})^{1/2}$. Напомним (см. [1, 2, 4, 5]), что имеет место ортогональное разложение Вейля $L^2(T) = \mathbf{G}(T) \oplus \mathbf{J}(T)$. Здесь $\mathbf{G}(T)$ — множество градиентов всех функций из $L^2(T)$, имеющих первые производные из $L^2(T)$, а $\mathbf{J}(T)$ — замыкание в $L^2(T)$ множества всех векторных полей из $W_2^1(T)$ с нулевой дивергенцией. Это разложение $\mathbf{f}_1 = \nabla U + (\mathbf{f}_1 - \nabla U)$ сводится к решению уравнения $\Delta U = \operatorname{div} \mathbf{f}_1$, понимаемого в смысле теории распределений.

Теорема 1. *Пусть измеримая комплексная матричнозначная функция $\{b_{l,k}(\mathbf{x})\}_{l,k=1}^n$ на торе T при каждом $\mathbf{x} \in T$ определяет оператор, сжимающий $\mathbb{C}^n$ равномерно по $\mathbf{x}$:*

$$\sup_{x \in T, \xi \in C} \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{l=1}^{n} b_{l,k}(\mathbf{x}) \xi_l \right|^2 / \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 = \eta^2 < 1, \quad \eta \geq 0. \tag{4}$$

Тогда при всяком комплексном векторном поле $\mathbf{F} \in L^2(T)$ существует обобщенное решение $U(\mathbf{x})$ уравнения

$$\Delta U(\mathbf{x}) - \sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(b_{l,k}(\mathbf{x}) \frac{\partial U(x)}{\partial x_l} \right) = \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{5}$$

в следующем смысле: $U \in W_2^1(T)$, $\mathbf{J}(T)$ содержит сумму векторного поля $\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \nabla U(\mathbf{x})$ и векторного поля, k-я компонента которого равна $\sum\limits_{l=1}^{n} b_{l,k}(\mathbf{x}) \frac{\partial U(x)}{\partial x_l}$. Такое решение U при дополнительном условии $\int\limits_T U(\mathbf{x})\, dx_1 \dots dx_n = 0$ существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|\nabla U\| \leq \|\mathbf{F}\| / (1 - \eta). \tag{6}$$

Доказательство. Определим отображение B пространства $L^2(T)$ комплексных векторных полей в себя, ставящее в соответствие всякому векторному полю $\mathbf{f}_1$ векторное поле $\mathbf{f}_2$ по следующему алгоритму.

1. Векторное поле $\mathbf{f}_1$ разложим на две составляющие: $\mathbf{f}_1 = \mathbf{j} + \mathbf{g}$, $\mathbf{j} \in J(T)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{G}(T)$.

2. Найдем такую функцию $U(\mathbf{x})$, что $\int\limits_T U(\mathbf{x})\, dx_1 \dots dx_n = 0$ и $\nabla U = \mathbf{g}$.

3. Положим $\mathbf{f}_2(\mathbf{x})$ равной сумме $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ и векторного поля, k-я компонента которого равна $\sum\limits_{l=1}^{n} b_{l,k}(\mathbf{x}) \frac{\partial U(x)}{\partial x_l}$.

Равенство нулю среднего значения на втором шаге достигается прибавлением подходящей константы.

Докажем сжимаемость B при условии (4). Рассмотрим произвольные векторные поля $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и их образы $B\mathbf{F}_1$, $B\mathbf{F}_2$ и установим неравенство

$$\|B\mathbf{F}_1 - B\mathbf{F}_2\| \le \eta\|\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2\|. \tag{7}$$

Для этого заметим, что переход от $\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2$ к $B\mathbf{F}_1 - B\mathbf{F}_2$ осуществляет линейный оператор, равный B при $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv 0$. Сначала этот оператор ортогонально в $L^2(T)$ проектирует векторное поле $\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2$ на $\mathbf{G}(T)$, не увеличивая при этом $L^2(T)$-норму, а затем поточечно умножает результат на матрицу $b_{l,k}(\mathbf{x})$. На последнем шаге $L^2(T)$-норма возрастает не более чем в η раз, поскольку умножение n-мерного вектора (градиента в точке $\mathbf{x}$) на матрицу $b_{l,k}(\mathbf{x})$ при условии (4) увеличивает его евклидову норму не более чем в η раз.

Введем последовательность векторных полей $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ равенствами $\mathbf{f}_0 \equiv 0$, $\mathbf{f}_{k+1} = B\mathbf{f}_k$. Ясно, что $\mathbf{f}_1 = B\mathbf{f}_0 = \mathbf{F}$, и потому $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_0 = \mathbf{F}$. Неравенство $\|\mathbf{f}_{k+1} - \mathbf{f}_k\| \le \eta\|\mathbf{f}_k - \mathbf{f}_{k-1}\|$, верное в силу (7), по индукции влечет неравенство $\|\mathbf{f}_{k+1} - \mathbf{f}_k\| \le \eta^k\|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_0\| = \eta^k\|\mathbf{F}\|$. Оно вместе с условием $0 \le \eta < 1$ дает фундаментальность последовательности $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $L^2(T)$, сходящейся в $L^2(T)$ к некоторому $\mathbf{f}_\infty$, для которого верно неравенство

$$\|\mathbf{f}_\infty\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{f}_{k+1} - \mathbf{f}_k)\right\| \le \sum_{k=0}^{\infty}\|(\mathbf{f}_{k+1} - \mathbf{f}_k)\| \le \sum_{k=0}^{\infty}\eta^k\|\mathbf{F}\| = \|\mathbf{F}\|/(1-\eta). \tag{8}$$

В силу непрерывности сжимающего отображения B, сходимости $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ к $\mathbf{f}_\infty$ и равенства $\mathbf{f}_{k+1} = B\mathbf{f}_k$ неподвижная точка B равна $\mathbf{f}_\infty$. Первые два шага алгоритма, примененные к $\mathbf{f}_\infty$, дают решение U. Ортогональное проектирование $\mathbf{f}_\infty$ на $\mathbf{G}(T)$ на первом шаге дает ∇U. Неравенства $\|\nabla U\| \le \|\mathbf{f}_\infty\|$ и (8) приводят к оценке (6) для ∇U. Единственность решения следует из сжимаемости B. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть измеримая матричнозначная функция $\{a_{l,k}(\mathbf{x})\}_{l,k=1}^{n}$ на торе T при каждом $\mathbf{x} \in T$ эрмитова, действительна и удовлетворяет неравенству*

$$m \le \sum_{l,k=1}^{n} a_{l,k}(\mathbf{x})\xi_l\xi_k \Big/ \sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 \le M \tag{9}$$

при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ с положительными постоянными m и M, не зависящими от $\mathbf{x}$ и ξ. Тогда для всякого комплексного векторного поля $\mathbf{F} \in L^2(T)$ существует единственная функция $U \in W_2^1(T)$, удовлетворяющая условию $\int\limits_T U(\mathbf{x})\,dx_1 \dots dx_n = 0$ и уравнению (1) в следующем смысле: $\mathbf{J}(T)$ содержит разность векторного поля $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ и векторного поля, k-я компонента которого равна $\sum\limits_{l=1}^{n} a_{l,k}(\mathbf{x})\frac{\partial U(x)}{\partial x_l}$. Для U справедливо неравенство $\|\nabla U\| \le C(m,M)\|\mathbf{F}\|$ с константой $C(m,M)$, не зависящей от U и $\mathbf{F}$.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $M < 1$. Это условие достигается (при необходимости) делением $a_{l,k}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ на $2M$ и введением новых обозначений.

Положим $b_{l,k}(\mathbf{x}) = \delta_{l,k} - a_{l,k}(\mathbf{x})$, где $\delta_{l,k} = 1$ при $l = k$ и $\delta_{l,k} = 0$ при $l \ne k$. Тогда уравнения (1) и (5) станут равносильны, а их разрешимость будет вытекать из теоремы 1, условие (4) которой проверяется следующим образом. Ввиду неравенств $M < 1$ и (9) все собственные значения симметричной матрицы $a_{l,k}(\mathbf{x})$ содержатся в отрезке $[m, 1]$. Стало быть, все собственные значения симметричной матрицы $b_{l,k}(\mathbf{x})$ заключены между нулем и $1-m$, $0<m<1$. Поэтому при каждом $\mathbf{x}$ линейный оператор, определяемый матрицей $b_{l,k}(\mathbf{x})$, является сжатием евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с коэффициентом, не превышающим $1-m$, $0<m<1$, что проверяется переходом к ортонормированному базису из собственных векторов. Условие (4), означающее сжатие, имеет место при некотором $\eta \le 1-m$. Оценка для ∇U следует из теоремы 1. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть измеримые комплекснозначные функции $d_k(\mathbf{x})$, $k = 1,\dots,n$, ограничены на торе, а их действительные части положительны и равномерно отделены от нуля:* $\sup\limits_{x\in T,\,1\le k\le n} |d_k(\mathbf{x})| = M < +\infty$, $\inf\limits_{x\in T,\,1\le k\le n} \mathrm{Re}(d_k(\mathbf{x})) = m > 0$. *Тогда для всякого комплексного векторного поля $\mathbf{F} \in L^2(T)$ существует единственная функция $U \in W_2^1(T)$, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_T U(\mathbf{x})\,dx_1\dots dx_n = 0$$

и уравнению

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(d_k(\mathbf{x})\frac{\partial U(x)}{\partial x_k}\right) = \operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{10}$$

в том смысле, что $\mathbf{J}(T)$ содержит векторное поле $\left(d_1(\mathbf{x})\frac{\partial U(x)}{\partial x_1},\dots,d_n(\mathbf{x})\frac{\partial U(x)}{\partial x_n}\right) - \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Для U справедливо неравенство $\|\nabla U\| \le C(m,M)\|\mathbf{F}\|$ с константой $C(m,M)$, не зависящей от U и $\mathbf{F}$.

Доказательство. Разделим (10) на подходящее число P так, чтобы стало возможным применение теоремы 1. При этом диагональная матрица с элементами $b_{k,k}(\mathbf{x}) = 1 - d_k(\mathbf{x})/P$ на диагонали должна удовлетворять условию (4). Оно выполняется, когда

$$\sup_{x\in T,\,1\le k\le n} |1 - d_k(\mathbf{x})/P| = \eta < 1. \tag{11}$$

Докажем, что последнее условие верно при некоторых положительных P и η. Для этого построим на комплексной плоскости симметричный относительно действительной оси замкнутый прямоугольник, содержащий множество $\{d_k(\mathbf{x})\}_{x\in T,\,1\le k\le n}$ и находящийся на расстоянии $m>0$ от мнимой оси. Длины сторон прямоугольника равны $2M$ и $M-m$. Через вершины ближайшей к мнимой оси стороны проведем окружность, отстоящую от мнимой оси на расстояние $q\in(0;m)$. При q, достаточно близких к m, прямоугольник находится внутри окружности. Фиксируем такую окружность, действительную координату $P>0$ ее центра и число q. Ясно, что все точки множества $\{d_k(\mathbf{x})\}_{x\in T,\,1\le k\le n}$ отстоят от действительной точки $P>0$ не более чем на $P-q$. Таким образом, условие (11) выполняется при некотором $\eta \le (P-q)/P$. Поэтому разрешимо уравнение (10), так как по теореме 1 разрешимо уравнение (10), в котором вместо $d_k(\mathbf{x})$ и $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ фигурируют $d_k(\mathbf{x})/P$ и $\mathbf{F}(\mathbf{x})/P$. Оценка для ∇U следует из теоремы 1, а также из того наблюдения, что P и q полностью определяются числами M и m. Теорема доказана.

Можно получить аналоги теорем 1–3 о разрешимости уравнения (1) на всем $\mathbb{R}^n$, заменив в них (а также в разложении Вейля) включение $U \in W_2^1(T)$ на $\nabla U \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $U \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Разрешимость уравнения (1) позволяет выявить наличие нетривиального решения стационарного уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова (2) с комплексными коэффициентами.

Теорема 4. *Пусть комплексное векторное поле* $\mathbf{f}$ *на торе* T *ограничено и измеримо, а матричнозначная функция* $\{a_{l,k}(\mathbf{x})\}_{l,k=1}^{n}$ *удовлетворяет по крайней мере одному из следующих трех условий:*

1) *условия теоремы* 2;

2) *она представима в виде* $a_{l,k}(\mathbf{x}) = \delta_{l,k} - b_{l,k}(\mathbf{x})$, *где* $\delta_{l,k} = 1$ *при* $l = k$ *и* $\delta_{l,k} = 0$ *при* $l \neq k$, *а* $b_{l,k}(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1;

3) $a_{l,k}(\mathbf{x}) = 0$ *при* $l \neq k$, *а* $a_{k,k}(\mathbf{x}) = d_k(\mathbf{x})$ *удовлетворяют условиям теоремы* 3.

Тогда существует функция $U \in W_2^1(T)$, *отличная от нуля на множестве положительной меры и удовлетворяющая уравнению* (2) *в следующем смысле:* $\mathbf{J}(T)$ *содержит разность векторного поля* $U(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *и векторного поля,* k*-я компонента которого равна* $\sum\limits_{l=1}^{n} a_{l,k}(\mathbf{x}) \frac{\partial U(x)}{\partial x_l}$.

Отметим, что ранее в [1–4] частный случай уравнения (2) — уравнение $\Delta u - \operatorname{div}(u\mathbf{f}) = 0$ — исследовался с помощью разложения Вейля и решения уравнения $\Delta U = \operatorname{div}\mathbf{F}$. Приводимое ниже доказательство теоремы 4 опирается на разрешимость уравнения (1) вместо $\Delta U = \operatorname{div}\mathbf{F}$. Тем самым обобщаются рассуждения из [3, 4].

Определение 1. Пусть выполняются условия теоремы 4 и $r \in \mathbb{R}$. Определим отображение A пространства $L^2(T)$ векторных полей в себя, ставящее в соответствие всякому векторному полю $\mathbf{f}_1$ векторное поле $\mathbf{f}_2$ по следующему алгоритму.

1. Найдем такое обобщенное решение $U \in W_2^1(T)$ уравнения

$$\sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{l,k}(\mathbf{x})\frac{\partial U(x)}{\partial x_l}\right) = \operatorname{div}\mathbf{f}_1(\mathbf{x}),$$

что $\int\limits_T U(\mathbf{x})\,dx_1 \dots dx_n = r$.

2. Положим $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Связь отображения A с уравнением (2) поясняет

Лемма 1. *Пусть выполняются условия теоремы* 4 *и* $r \in \mathbb{R}$, *а отображение* A *имеет неподвижную точку. Тогда функция* $U \in W_2^1(T)$, *полученная из этой неподвижной точки с помощью первого шага алгоритма, удовлетворяет условию* $\int\limits_T U(\mathbf{x})\,dx_1 \dots dx_n = r$ *и уравнению* (2). *Указанная неподвижная точка равна* $U(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Введем оператор $S : L^2(T) \to L^2(T)$, равный отображению A при $r = 0$. Оператор S линеен; без труда проверяются следующие равенства: $A\mathbf{f}_1 - A\mathbf{f}_2 = S(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2)$, $A\mathbf{a} = S\mathbf{a} + r\mathbf{f}$ при всех $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{a} \in L^2(T)$.

Лемма 2. *Пусть верны условия теоремы* 4 *и оператор* $I - S$ (I — *тождественный оператор*) *имеет обратный, определенный на всем* $L^2(T)$. *Тогда существует указанное в лемме* 1 *обобщенное решение уравнения* (2) *при* $r = 1$, *а векторное поле* $U(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (I - S)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *является неподвижной точкой оператора* A *при* $r = 1$.

Леммы 1 и 2 элементарны и, по существу, доказаны в [3]. Следующая лемма обобщает теорему 1 из [4].

Лемма 3. *При условиях теоремы* 4 *оператор* $S : L^2(T) \to L^2(T)$ *компактен.*

Доказательство основывается на теореме Реллиха, согласно которой ограниченное в $W_2^1(T)$ множество предкомпактно в $L^2(T)$. Первый шаг определения 1 при $r = 0$ дает непрерывный линейный оператор из $L^2(T)$ в $W_2^1(T)$. Это верно в силу оценки $\|\nabla U\| \le C\|\mathbf{F}\|$ из теорем 1–3 и леммы 1 из [1] (или леммы 3 из [4]). Компактность указанного оператора как отображения из $L^2(T)$ в $L^2(T)$ следует из теоремы Реллиха. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Если компактный оператор $S : L^2(T) \to L^2(T)$ не имеет единичных собственных значений, то оператор $I - S$ обратим по теореме о спектре компактного оператора и нетривиальная разрешимость следует из леммы 2.

Если оператор S имеет единичное собственное значение, то он, т. е. отображение A при $r = 0$, имеет отличную от тождественного нуля неподвижную точку. Поэтому на основании леммы 1 уравнение (2) имеет решение $U(\mathbf{x})$, которое отлично от тождественного нуля, так как в противном случае неподвижная точка $U(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$ была бы тождественным нулем. Теорема доказана.

Следующее утверждение дает пример уравнения (2) с многомерным пространством решений.

Теорема 5. *Рассмотрим последовательности векторных полей*

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{x}) = 2\pi ki\mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (1, 1, \dots, 1),$$

и функций $u_k(y) = \exp(2\pi kiy)$. *Тогда при каждом целом* $k \ne 0$ *уравнение* $\Delta u - \operatorname{div}(u\mathbf{f}_k) = 0$ *имеет по крайней мере* 2^n *линейно независимых решений на торе. Они представимы в виде* $u(\mathbf{x}) = \prod\limits_{l=1}^{n}(a_l u_k(x_l) + b_l)$ *с коэффициентами* a_l, b_l, *равными нулю или единице.*

Доказательство. Разделением переменных задача сводится к одномерному уравнению $u'' - 2\pi kiu' = 0$, имеющему решения $u(x) \equiv 1$ и $u_k(x) = \exp(2\pi kix)$. Теорема доказана.

Следующая теорема суммирует полученные результаты и показывает, что неединственность решений уравнения (2) представляет собой исключительное явление.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 4. *Обозначим через* Γ *множество всех тех отличных от нуля комплексных* γ, *для которых* $1/\gamma$ *принадлежит спектру оператора* S. *Тогда*

1) *множество* Γ *не имеет предельных точек, замкнуто, не более чем счетно и не содержит нуля;*

2) *при любом комплексном* $\gamma \notin \Gamma$ *уравнение*

$$\sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{l,k}(\mathbf{x})\frac{\partial U(x)}{\partial x_l}\right) - \operatorname{div}(U(\mathbf{x})\gamma\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0 \tag{12}$$

имеет обобщенное решение $U \in W_2^1(T)$, *для которого* $\int\limits_T U(\mathbf{x})\,dx_1 \dots dx_n = 1$;

3) *при непустом* Γ *и* $\gamma \in \Gamma$ *уравнение* (12) *имеет обобщенное решение* $U \in W_2^1(T)$, *отличное от нуля на множестве положительной меры и такое, что* $\int\limits_T U(\mathbf{x})\,dx_1 \dots dx_n = 0$;

4) *при любом комплексном* $\gamma \notin \Gamma$ *любые два решения уравнения* (12) *линейно зависимы.*

Доказательство. Утверждения 2 и 3 содержатся в леммах 1, 2 и в доказательстве теоремы 4. Проверка свойств 1 и 4 аналогична доказательству теоремы 4 из [4]. Теорема доказана.

Как показывает теорема 5, при $\gamma \in \Gamma$ пространство решений может быть многомерным (но конечной размерности – в силу компактности S), а само множество Γ может быть счетным. Умножая векторное поле из теоремы 5, а вместе с ним и оператор S на подходящие комплексные числа, можно получить оператор как с единичным собственным значением, так и без него. Тем самым можно проиллюстрировать оба случая, рассмотренных в доказательстве теоремы 4.

Обращаясь к нетривиальной разрешимости уравнения (2) и вообще уравнений вида (3), приведем пример недивергентного уравнения $\Delta u(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = 0$. Как показано в [4], оно не имеет нетривиальных решений на торе для типичной функции V.

В заключение отметим, что наибольший интерес представляет доказанная в работе разрешимость уравнений (1), (2) и (12) с комплексными коэффициентами. При действительных коэффициентах и векторном поле разрешимость (2) на торе, по-видимому, известна специалистам по диффузионным процессам (см. [6, с. 276; 7]). Известны также положительность решения и одномерность пространства решений уравнений (2) и (12) с действительными γ. При этом действительность γ существенна, как показывает пример векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (1, 1, \dots, 1)$ из теоремы 5. Для частного случая уравнения (12) — уравнения $\Delta u - \operatorname{div}(u\gamma\mathbf{f}) = 0$ — на всем $\mathbb{R}^n$ положительность и единственность решения при действительных γ доказаны в [3]. Там же доказано отсутствие положительных точек в Γ, хотя определения множества Γ и оператора S, приведенные в [3] и в данной работе, несколько различаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ноаров А. И.* О разрешимости стационарных уравнений Фоккера — Планка, близких к уравнению Лапласа // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 4. С. 521–530.

2. *Ноаров А. И.* Обобщенная разрешимость стационарного уравнения Фоккера — Планка // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 6. С. 813–819.

3. *Ноаров А. И.* Однозначная разрешимость стационарного уравнения Фоккера — Планка в классе положительных функций // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 2. С. 191–202.

4. *Ноаров А. И.* Существование и неединственность решений одного функционально-дифференциального уравнения // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1385–1390.

5. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1961.

6. *Ватанабе С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Мир, 1986.

7. *Zeeman E. C.* Stability of dynamical systems // Nonlinearity. 1988. V. 1. P. 115–155.

Статья поступила 25 июня 2013 г.

Ноаров Александр Игоревич
Институт вычислительной математики РАН,
ул. Губкина, 8, Москва 119333
ligrans@mail.ru