*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2014. Том 55, № 3*

*УДК 512.542*

# О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ЗАДАННЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

**В. С. Монахов, В. Н. Тютянов**

**Аннотация.** Доказывается, что конечная группа, в которой каждая максимальная подгруппа простая или нильпотентная, будет группой Шмидта. Группа, в которой каждая максимальная подгруппа простая или сверхразрешимая, может быть неразрешимой, и в этом случае доказывается, что ее главный ряд имеет вид $1 \subset K \subseteq G$, $K \simeq PSL_2(p)$ для подходящего простого $p$, $|G : K| \leq 2$.

**Ключевые слова:** конечная группа, нильпотентная подгруппа, сверхразрешимая подгруппа, максимальная подгруппа, простая группа.

## Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и определения соответствуют [1, 2].

В 1903 г. Миллер и Морено [3] изучили группы с абелевыми максимальными подгруппами. В 1924 г. О. Ю. Шмидт [4] исследовал строение групп с нильпотентными максимальными подгруппами. Позже ненильпотентные группы, у которых все максимальные подгруппы нильпотентны, назвали *группами Шмидта.* В 1954 г. Хупперт [5] установил разрешимость группы со сверхразрешимыми максимальными подгруппами, а Дерк [6] описал строение таких групп.

В настоящей статье исследуются группы, в которых максимальные подгруппы простые или нильпотентные (простые или сверхразрешимые). Доказывается, что группа, в которой каждая максимальная подгруппа простая или нильпотентная, разрешима, а значит, в таких группах простые максимальные подгруппы имеют простые порядки, и сама группа остается группой Шмидта. Группа, в которой каждая максимальная подгруппа простая или сверхразрешимая, может быть неразрешимой, и в этом случае доказывается, что ее главный ряд имеет вид $1 \subset K \subseteq G$, $K \simeq PSL_2(p)$ для подходящего простого $p$, $|G : K| \leq 2$. Этот результат является частным случаем теоремы 2, в которой определен главный ряд неразрешимой группы с простыми или 2-нильпотентными максимальными подгруппами.

## 1. Необходимые обозначения и вспомогательные леммы

Буквами $p, q, r$ обозначаются простые числа, а $G_p$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$, $G_{p'}$ — дополнение к силовской $p$-подгруппе в группе $G$, т. е. $p'$-холлова подгруппа группы $G$.

Группу $G$ называют *pd-группой*, если порядок $G$ делится на $p$; *p-замкнутой*, если $G_p$ нормальна в $G$; *p-нильпотентной*, если $G_{p'}$ нормальна в $G$; *p-разложимой*, если $G_p$ и $G_{p'}$ нормальны в $G$.

Далее использованы следующие обозначения: $\pi$ — некоторое множество простых чисел; $\pi'$ — дополнение к $\pi$ в множестве всех простых чисел, в частности, $p' = \mathbb{P}\backslash\{p\}$; $\pi(n)$ — множество всех простых делителей натурального числа $n$; $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы $G$; $\pi$-группа — группа $G$, для которой $\pi(G) \subseteq \pi$; $S(G)$ — наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы $G$; $O(G)$ — наибольшая нормальная подгруппа нечетного порядка группы $G$; $O_p(G)$ — наибольшая нормальная $p$-подгруппа группы $G$; $M <_{\max} G$ — $M$ является максимальной подгруппой группы $G$; $H \lhd G$ — $H$ является нормальной подгруппой группы $G$; $Z_n$ — циклическая группа порядка $n$; $S_n$ — симметрическая группа степени $n$; $A_n$ — знакопеременная группа степени $n$; $E_{p^n}$ — элементарная абелева группа порядка $p^n$; $D_n$ — диэдральная группа порядка $n$.

Если $A$ и $B$ — подгруппы группы $G$, то $A \times B$ — прямое произведение подгрупп $A$ и $B$; $[A]B$ или $A : B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы $A$ и подгруппы $B$.

Пусть $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$. Группа $G$ называется *p-нормальной*, если из условия $Z(P)^g \subseteq P$, $g \in G$, всегда следует, что $Z(P)^g = Z(P)$. Согласно [1, теорема IV.4.5] каждая $p$-нильпотентная группа $p$-нормальна.

**Лемма 1** [7, 14.4.6]. *Если группа $G$ $p$-нормальна, то наибольшая фактор-группа группы $G$, являющаяся $p$-группой, изоморфна такой же фактор-группе нормализатора центра силовской $p$-подгруппы.*

Нам понадобится один результат А. В. Романовского 1966 г., который приведем здесь с доказательством.

**Лемма 2** [8, теорема 2]. *Пусть $G$ — не $p$-нильпотентная группа. Если группа $G$ содержит $p$-разложимую максимальную подгруппу $M$, то в группе $G$ нормальна либо силовская $p$-подгруппа из $M$, либо $p'$-холлова подгруппа из $M$.*

Доказательство. Пусть $M = P \times T$, $P$ — силовская $p$-подгруппа, $T$ — $p'$-холлова подгруппа из $M$. Следует считать, что подгруппа $M$ не нормальна в $G$, а также $P \neq 1 \neq T$, иначе лемма справедлива.

Предположим, что $G$ не $p$-нормальна. Это означает, что существует элемент $g \in G$ такой, что $Z(P)^g \subseteq P$ и $Z(P)^g \neq Z(P)$. Так как $M = P \times T$, то $T \subseteq C_G(Z(P)^g)$. Из равенства $M^g = P^g \times T^g$ следует, что $T^g \subseteq C_G(Z(P)^g)$. Теперь

$$\langle T^g, T\rangle \subseteq C_G(Z(P)^g) \subseteq N_G(Z(P)^g) = M^g,$$

поэтому $T^g = T$ и $g \in N_G(T) = M$. Но тогда $Z(P)^g = Z(P)$; противоречие. Поэтому $G$ $p$-нормальна.

Согласно лемме 1 наибольшая фактор-группа группы $G$, которая является $p$-группой, изоморфна подобной фактор-группе группы $N_G(Z(P))$. Поскольку $M \subseteq N_G(Z(P))$, либо $M = N_G(Z(P))$, либо $G = N_G(Z(P))$. Если $M = N_G(Z(P))$, то $N_G(Z(P))$ $p$-нильпотентна, поэтому $p$-нильпотентна и группа $G$, что противоречит условию леммы. Значит, $Z = Z(P)$ нормальна в $G$, в частности, $C_G(Z)$ нормальна в $G$. Так как $M \subseteq C_G(Z)$ и подгруппа $M$ не нормальна в $G$, то $C_G(Z) = G$. Фактор-группа $G/Z$ содержит $p$-разложимую максимальную подгруппу $M/Z = P/Z \times TZ/Z$. Если $G/Z$ не $p$-нильпотентна, то по индукции либо $P/Z \lhd G/Z$, либо $TZ/Z \lhd G/Z$, откуда следует, что либо $P \lhd G$, либо $T \lhd G$, и лемма справедлива.

Пусть $G/Z$ $p$-нильпотентна, тогда $G_{p'}Z \lhd G$. Поскольку $C_G(Z) = G$, то $G_{p'}Z = G_{p'} \times Z$ и подгруппа $G_{p'} \lhd G$; противоречие. Лемма доказана.

**Лемма 3** [1, IV.7.4]. *Пусть $H$ — максимальная подгруппа группы $G$. Если $H$ нильпотентна и силовская 2-подгруппа из $H$ метабелева, то $G$ разрешима.*

**Лемма 4** [9]. *Пусть $G$ — неразрешимая группа с нильпотентной максимальной подгруппой. Тогда $O^2(G/F(G))$ есть прямое произведение простых групп с диэдральными силовскими 2-подгруппами.*

Здесь $O^2(X)$ — наименьшая нормальная подгруппа группы $X$, фактор-группа по которой является 2-группой, а $F(G)$ — подгруппа Фиттинга.

**Лемма 5.** *Пусть $G$ — неразрешимая группа с нильпотентной максимальной подгруппой $M$. Если $S(G) = 1$, то $M$ является силовской 2-подгруппой группы $G$.*

Доказательство. Из леммы 3 следует, что подгруппа $M$ имеет четный порядок, т. е. $M = M_2 \times M_{2'}$, где $M_2$ — неединичная силовская 2-подгруппа из $M$, а $M_{2'}$ — $2'$-холлова подгруппа из $M$. Так как $S(G) = 1$, то $M_2$ не нормальна в $G$, поэтому $M_2$ силовская в $G$. Поскольку группа $G$ не 2-нильпотентна, по лемме 2 подгруппа $M_{2'}$ нормальна в $G$ и $M_{2'} = 1$ ввиду того, что $S(G) = 1$. Лемма доказана.

**Лемма 6** [10]. *Если максимальная подгруппа $M = P \times M_1$ неразрешимой группы $G$ нильпотентна и силовская 2-подгруппа $P$ из $M$ обобщенная кватернионная или диэдральная, то $G$ обладает нормальным рядом $G \geq G_0 > T \geq 1$, в котором $|G : G_0| \leq 2$, $T$ нильпотентна и $G_0 \simeq PSL_2(q)$, где либо $q = 2^n \pm 1$, $q$ простое, $q > 7$, либо $q = 9$, либо $q = 7$ и в этом случае $|G : G_0| = 2$.*

**Лемма 7** [1, IV.5.4]. *Если группа $G$ не $p$-нильпотентна, но все ее собственные подгруппы $p$-нильпотентны, то $G$ является $p$-замкнутой группой Шмидта.*

## 2. Группы, у которых максимальные подгруппы нильпотентные или простые

**Теорема 1.** *Если каждая максимальная подгруппа ненильпотентной группы $G$ нильпотентна или проста, то $G$ — группа Шмидта.*

Доказательство. Если все максимальные подгруппы нильпотентны, то $G$ — группа Шмидта и все доказано. Значит, в группе $G$ имеется простая неабелева максимальная подгруппа, которую обозначим через $H$. Докажем, что

(1) $S(G) = 1$.

Предположим, что $S(G) \neq 1$. Тогда $S(G) \cap H$ нормальна в $H$ и разрешима, поэтому $S(G) \cap H = 1$ и $G = [S(G)]H$. Для каждой максимальной подгруппы $H_1$ из $H$ подгруппа $S(G)H_1$ максимальна в группе $G$, а поскольку подгруппа $S(G)H_1$ непростая, по условию она нильпотентна. Теперь нильпотентной будет подгруппа $H_1$. Следовательно, $H$ становится группой Шмидта, что противоречит простоте подгруппы $H$. Значит, предположение, что $S(G) \neq 1$, неверно, и $S(G) = 1$.

(2) Группа $G$ простая.

Предположим, что группа $G$ непростая, и пусть $K$ — минимальная нормальная в $G$ подгруппа. Из (1) следует, что $K$ — неразрешимая подгруппа.

Пусть $X$ — максимальная в $G$ подгруппа, содержащая подгруппу $K$. Если $K \neq X$, то подгруппа $X$ не может быть простой, поэтому подгруппа $X$ должна быть нильпотентной, а значит, $K$ нильпотентна; противоречие. Поэтому $K = X$ — максимальная в $G$ подгруппа. Так как $K \cap H$ нормальна в $H$ и $H$ простая, либо $K \cap H = 1$, либо $K \cap H = H$. Если $K \cap H = 1$, то $|H| = |G : K|$ — простое число; противоречие с выбором подгруппы $H$. Поэтому $K \cap H = H$ и $K = H$. Подгруппу $H$ можно считать произвольной простой неабелевой максимальной подгруппой группы $G$, следовательно, любая максимальная в $G$ подгруппа, отличная от $K$, нильпотентна. Согласно лемме 3 в группе $G$ нет нильпотентных максимальных подгрупп нечетного порядка, а с учетом леммы 2 каждая максимальная подгруппа, отличная от $K$, будет силовской 2-подгруппой группы $G$ и $|G : K| = 2$. Пусть $p \in \pi(K) \setminus \{2\}$ и $P$ — силовская $p$-подгруппа из $K$. По лемме Фраттини $G = KN_G(P) = KU$, где $U$ — максимальная в $G$ подгруппа, содержащая $N_G(P)$. Так как $U$ отлична от $K$, по доказанному подгруппа $U$ должна быть силовской 2-подгруппой группы $G$, что невозможно; противоречие. Поэтому предположение неверно и группа $G$ простая.

(3) Окончание доказательства.

Согласно (2) $G$ — простая неабелева группа. Предположим, что все максимальные подгруппы группы $G$ простые. По классификационной теореме группа $G$ является группой одного из следующих типов: знакопеременная группа степени $n \geq 5$, группа типа Ли, одна из 26 спорадических групп.

В знакопеременной группе $A_n$ имеется подгруппа $H$, являющаяся двухточечным стабилизатором. Эта подгруппа максимальна и изоморфна $S_{n-2}$, а потому непростая и ненильпотентная. Следовательно, $G$ не может быть знакопеременной группой.

В простых группах лиевского типа над полем характеристики $p$ любая максимальная параболическая подгруппа содержит нетривиальную собственную нормальную $p$-подгруппу.

Любая спорадическая группа содержит непростую максимальную подгруппу [2]; противоречие.

Следовательно, допущение неверно, и среди максимальных подгрупп есть нильпотентные. Пусть $A$ — нильпотентная максимальная подгруппа. Из леммы 2 следует, что $A$ является силовской 2-подгруппой группы $G$. Из леммы 4 вытекает, что $A$ является диэдральной группой. Простая группа с диэдральной силовской 2-подгруппой по лемме 6 изоморфна $PSL_2(q)$, где либо $q = 2^n \pm 1$, $q$ простое, $q > 7$, либо $q = 9$. Для простого $q$ в группе $PSL_2(q)$ нормализатор силовской $q$-подгруппы является ненильпотентной непростой максимальной подгруппой. В группе $PSL_2(9)$ нормализатор силовской 3-подгруппы является ненильпотентной непростой максимальной подгруппой; противоречие. Теорема доказана.

## 3. Группы, в которых максимальные подгруппы простые или сверхразрешимые

Известно, что сверхразрешимые группы $p$-нильпотентны для наименьшего $p$, делящего порядок группы. В частности, каждая сверхразрешимая группа 2-нильпотентна.

Пример 1. Если максимальные подгруппы сверхразрешимые или простые, то группа может быть неразрешимой. Примером служит группа $PGL_2(7)$, в которой все максимальные подгруппы, за исключением $PSL_2(7)$, сверхразрешимы.

Пример 2. В группе $PSL_2(11)$ максимальные подгруппы либо 2-нильпотентные, либо простые.

Пример 3. Существует группа, являющаяся расширением группы $PSL_2(25)$ с помощью автоморфизма порядка 2, в которой все максимальные подгруппы либо 2-нильпотентые, либо простые [2].

**Теорема 2.** *Если каждая максимальная подгруппа неразрешимой группы $G$ 2-нильпотентна или проста, то главный ряд группы $G$ имеет вид $1 \subseteq K \subseteq G$, где $K \simeq PSL_2(p^n)$, $|G:K| = 1$ или $|G:K| = r$ — простое число.*

Доказательство. Если все максимальные подгруппы 2-нильпотентны, то по [1, IV.5.4] группа $G$ либо 2-нильпотентна, либо 2-замкнутая группа Шмидта, поэтому $G$ разрешима; противоречие. Значит, в группе $G$ имеется простая неабелева максимальная подгруппа, которую обозначим через $R$. Докажем, что $S(G) = 1$. Предположим, что $S(G) \neq 1$. Тогда $S(G) \cap R$ нормальна в $R$, поэтому $S(G) \cap R = 1$ и $G = [S(G)]R$. Для каждой максимальной подгруппы $R_1$ из $R$ подгруппа $S(G)R_1$ будет максимальной в группе $G$, а поскольку подгруппа $S(G)R_1$ непростая, по условию она 2-нильпотентна. Теперь 2-нильпотентной будет подгруппа $R_1$. Применяя [1, IV.5.4] к подгруппе $R$, получаем, что либо $R$ 2-нильпотентна, либо 2-замкнутая группа Шмидта; противоречие. Значит, предположение, что $S(G) \neq 1$, неверно, и $S(G) = 1$.

Предположим, что группа $G$ непростая, и пусть $K$ — минимальная нормальная в $G$ подгруппа. Так как $S(G) = 1$, то $K$ — неразрешимая подгруппа. Пусть $X$ — максимальная в $G$ подгруппа, содержащая подгруппу $K$. Если $K \neq X$, то подгруппа $X$ не может быть простой, поэтому подгруппа $X$ должна быть 2-нильпотентной, а значит, $K$ разрешима; противоречие. Следовательно, $K = X$ и $K$ — максимальная в $G$ подгруппа. Так как $K \cap R$ нормальна в $R$ и $R$ простая, либо $K \cap R = 1$, либо $K \cap R = R$. Если $K \cap R = 1$, то $|R| = |G:K|$ — простое число; противоречие. Поэтому $K \cap R = R$ и $K = R$. Из выбора подгруппы $R$ следует, что любая максимальная в $G$ подгруппа, отличная от $K$, 2-нильпотентна. Главный ряд группы $G$ имеет вид $1 \subseteq K \subseteq G$, $|G:K| = r$ — простое число и $K$ является единственным неабелевым главным фактором группы $G$.

Пусть сначала $G$ — простая неабелева группа. Последовательно рассмотрим следующие три возможные случая.

(1) $G \simeq A_n$, $n \geq 5$. Пусть $T$ — двухточечный стабилизатор в $A_n$. Тогда подгруппа $T$ максимальна в $A_n$ и $T \simeq S_{n-2}$. Если $n = 5$, то $T \simeq S_3$ — 2-нильпотентная группа. Однако группа $A_5$ содержит максимальную подгруппу $A_4$, которая не 2-нильпотентна и не проста. Поэтому $n \geq 6$. В этом случае $T$ не 2-нильпотентна и проста. Следовательно, $G$ не может быть знакопеременной группой.

(2) $G$ — простая спорадическая группа. Из [2] следует, что в любой спорадической группе имеется максимальная неразрешимая подгруппа, которая не является простой неабелевой группой. Последнее невозможно по условию теоремы.

(3) $G$ — простая группа лиевского типа, определенная над полем $GF(q)$, $q = p^n$. Пусть $p = 2$. Так как любая максимальная параболическая подгруппа

группы $G$ непростая, она 2-нильпотентна. По лемме 2 максимальные параболические подгруппы группы $G$ — это в точности унипотентные подгруппы. Лиевский ранг группы $G$ равен 1, и подгруппа Картана $H$ равна 1. По [11, табл. 3] группа $G$ может быть одной из следующих: $PSL_2(2^n)$, $n \geq 2$; $Sz(2^n)$, $n \geq 3$; $PSU_3(2^n)$, $n \geq 2$. У всех групп приведенного списка подгруппа Картана $H$ отлична от 1. Следовательно, $p > 2$.

Пусть сначала группа $G$ имеет лиевский ранг $l \geq 2$. В группе $G$ всякая максимальная параболическая подгруппа 2-нильпотентна и, в частности, разрешима. Разрешимыми группами лиевского типа являются группы $PSL_2(2)$, $PSL_2(3)$, $PSU_3(2)$, ${}^2B_2(2)$, которые имеют лиевский ранг 1. Описание строения параболических подгрупп получено Титсом. Из данного описания [11, (2.1)] следует, что при $l \geq 3$ найдется максимальная параболическая подгруппа с неразрешимым дополнением Леви. Следовательно, $l = 2$, $q = 3$ и $G$ может являться одной из следующих групп: $PSL_3(3)$, $PSp_4(3)$, $G_2(3)$, $PSU_4(3)$, $PSU_5(3)$, ${}^3D_4(3)$. Из [2] вытекает, что группы $PSL_3(3)$, $PSp_4(3)$, $G_2(3)$ содержат максимальные подгруппы $S_4$, $S_6$, $PSL_3(3) : 2$ соответственно. Получили противоречие с условием теоремы. В группах $PSU_4(3)$, $PSU_5(3)$, ${}^3D_4(3)$ имеется максимальная неразрешимая параболическая подгруппа, что невозможно по условию теоремы.

Таким образом, группа $G$ имеет лиевский ранг $l = 1$ и может являться одной из следующих групп: $PSU_3(q)$, ${}^2G_2(q)$, $PSL_2(q)$. Пусть $G \simeq PSU_3(q)$. Описание подгрупп в группах $PSU_3(q)$ при нечетном $q$ получено в [12]. Группа $PSU_3(q)$ содержит не простую максимальную подгруппу $X$ с секцией, изоморфной $PSL_2(q)$. При $q \neq 3$ группа $PSL_2(q)$ является простой неабелевой группой, поэтому подгруппа $X$ не нильпотентна и не простая; противоречие с условием теоремы. Следовательно, $G \simeq PSU_3(3)$. Из [2] получаем, что группа $PSU_3(3)$ имеет максимальную подгруппу $4^{\cdot}S_4$, что невозможно по условию теоремы. Пусть $G \simeq^2 G_2(q)$. Так как $G$ — простая неабелева группа, $q \geq 27$. Из [13] следует, что централизатор инволюции в ${}^2G_2(q)$ является максимальной подгруппой и изоморфен $2 \times PSL_2(q)$. Поскольку $q \geq 27$, централизатор инволюции неразрешим. Противоречие с условием теоремы. Значит, $G \simeq PSL_2(q)$ входит в список групп из заключения теоремы.

Пусть $G = K\langle x\rangle$, $|G : K| = r$ — простое число.

**Лемма A.** *Пусть $1 \neq T < K$ и $\Omega = \{T^k \mid k \in K\}$. Если $\Omega^g = \Omega$ для всех $g \in G$, то $T$ является 2-нильпотентной группой.*

Доказательство. Пусть $g \in G$. Тогда $T^g \in \Omega$ и $T^g = T^k$ для некоторого $k \in K$. Отсюда $T^{gk^{-1}} = T$ и $gk^{-1} \in N_G(T)$ или $g \in KN_G(T)$. Так как $g$ произвольный элемент группы $G$, то $G = KN_G(T)$. Пусть $N_G(T) \subseteq M <_{\max} G$, тогда $G = KM$, $K \cap M$ нормальна в $M$ и $|M : K \cap M| = r$. Поэтому $M$ не является простой неабелевой группой. Следовательно, $M$ — 2-нильпотентная группа. Так как $T \subseteq M$, группа $T$ 2-нильпотентна.

**Лемма B.** *Если $K$ — группа Ли характеристики 2, то ее подгруппа Картана тривиальна.*

Доказательство. Если подгруппа Картана не тривиальна, то подгруппа Бореля в $K$ не 2-нильпотентна. Последнее невозможно по лемме A.

Рассмотрим следующие случаи.

1. $K$ — простая спорадическая группа.

Из [2] следует, что в $G$ имеется максимальная неразрешимая подгруппа, которая не является простой неабелевой группой. Противоречие с условием теоремы.

2. $K \simeq A_n$, $n \geq 5$.

При $n = 5, 6$ подгруппа $K$ изоморфна соответственно $PSL_2(5)$, $PSL_2(9)$. Поэтому будем считать, что $n \geq 7$ и $G \simeq S_n$. Группа $G$ содержит максимальную подгруппу $T \simeq S_{n-1}$, являющуюся стабилизатором точки. Противоречие с условием теоремы.

3. $K$ — простая группа лиевского типа, определенная над полем $GF(q)$, $q = p^n$.

Если $K$ группа Ли нормального типа и ее группа автоморфизмов графа тривиальна, то классы сопряженных параболических подгрупп в $K$ инвариантны относительно $\langle x\rangle$. При этом $K \in \{B_l(q),\ l > 2;\ C_l(q),\ l > 2;\ D_l(q),\ l > 4;\ E_7(q);\ E_8(q)\}$. Все группы данного списка, за исключением $D_l(q)$, $l > 4$, имеют тривиальную группу автоморфизмов графа, и их параболическая подгруппа $P_1$ неразрешима. Противоречие с леммой А. Пусть $K \simeq D_l(q)$, $l > 4$. Тогда ее параболическая подгруппа $P_1$ неразрешима и имеет дополнение Леви $D_{l-1}(q)H$, где $H$ — подгруппа Картана. Очевидно, что любая другая максимальная параболическая подгруппа обладает дополнением Леви, не изоморфным $D_{l-1}(q)H$, а следовательно, не изоморфна $P_1$. Поэтому класс сопряженных в $K$ с $P_1$ подгрупп инвариантен относительно $\langle x\rangle$; противоречие с леммой А.

Рассмотрим оставшиеся случаи.

(1) $K \simeq PSp_4(q)$. Пусть $q = 2^n > 2$. Подгруппа Картана $H$ в $K$ имеет порядок $(q-1)^2$. Так как $q \neq 2$, то $H \neq 1$; противоречие с леммой В. Поэтому $q = p^n$ и $p \geq 3$. Поскольку $p$ — нечетное число, группа автоморфизмов графа группы $K$ тривиальна. Параболическая подгруппа $P_1$ при $p \neq 3$ неразрешима, при $p = 3$ изоморфна $3_+^{1+2} : A_4$ и не является 2-нильпотентной; противоречие с леммой А.

(2) $K \simeq^2 B_2(q)$, $q = 2^{2m+1} > 2$. Подгруппа Картана $H$ в $K$ имеет порядок $q - 1$, а значит, $H \neq 1$; противоречие с леммой В.

(3) $K \simeq C_2(q)$. Данный случай рассматривается так же, как (1).

(4) $K \simeq G_2(q)$. При $(q, 3) = 1$; $q = 3$ и $n = 2m$; $q = 3$ и $n = 2m + 1$ группа $K$ содержит соответственно подгруппы $T \simeq SL_3(q).2$, $T \simeq G_2(3^m)$, $T \simeq^2 G_2(q)$ [14], для которых $\Omega^g = \Omega$, где $\Omega = \{T^k \mid k \in K\}$. Данные подгруппы не 2-нильпотентны; противоречие с леммой А.

(5) $K \simeq^2 G_2(q)$, $q = 3^{2m+1}$. Пусть $S$ — силовская 2-подгруппа в $K$. Так как $N_K(S)$ не является 2-нильпотентной группой [13], получим противоречие с леммой А.

(6) $K \simeq F_4(q)$. Пусть $q = 2^n$. Подгруппа Картана $H$ в $K$ имеет порядок $(q-1)^4$. Если $q > 2$, то $H \neq 1$; противоречие с леммой В. При $q = 2$ $K$ содержит подгруппу $T \simeq^2 F_4(2)$ [2], для которой $\Omega^g = \Omega$, где $\Omega = \{T^k \mid k \in K\}$; противоречие с леммой А. Если $q$ нечетно, то $K$ содержит подгруппу $B_4(q)$, удовлетворяющую условиям леммы А [14]; противоречие с тем, что группа $B_4(q)$ не 2-нильпотентна.

(7) $K \simeq^2 F_4(q)$, $q = 2^{2m+1} > 2$ или $K \simeq {}^2F_4(2)'$. Из [14] и [2] следует, что $K$ содержит подгруппу $T \simeq PSL_2(25)$, для которой $\Omega^g = \Omega$, где $\Omega = \{T^k \mid k \in K\}$; противоречие с леммой А.

(8) $K \simeq E_6(q)$. Как в случае $K \simeq D_l(q)$, $l > 4$, показывается, что параболическая подгруппа $P_3$ удовлетворяет условиям леммы А, но $P_3$ неразрешима;

противоречие.

(9) $K \simeq {}^2 E_6(q)$. Пусть $q = 2^n$. Так как подгруппа Картана в $K$ отлична от 1, приходим к противоречию с леммой B. Если $q$ нечетно, то параболическая подгруппа $P_4$ удовлетворяет условиям леммы A, а значит, 2-нильпотентна; противоречие с тем, что $P_4$ неразрешима.

(10) $K \simeq D_4(q)$. Как в случае $K \simeq D_l(q)$, $l > 4$, показывается, что параболическая подгруппа $P_2$ удовлетворяет условиям леммы A; противоречие с тем, что $P_2$ не является 2-нильпотентной.

(11) $K \simeq {}^3 D_4(q)$. Группа $K$ содержит подгруппу $G_2(q)$, удовлетворяющую условиям леммы A. Так как $G_2(q)$ неразрешима, приходим к противоречию.

(12) $K \simeq PSL_t(q)$, $t \geq 3$. Группа $G$ содержит подгруппу $T$ типа $GL_1(q) \times GL_{t-1}(q)$ [15, табл. 4.1A]. По [16, 13.2] $G = KN_G(T)$. Очевидно, что $N_G(T)$ является 2-нильпотентной группой, поэтому $T$ также 2-нильпотентна. Подгруппа $T$ содержит секцию $PSL_{t-1}(q)$, тем самым $PSL_{t-1}(q)$ 2-нильпотентна. Это возможно только для пары $(t, q) = (3, 2)$. В этом случае $K \simeq PSL_3(2) \simeq PSL_2(7)$ и $K$ принадлежит списку групп из заключения теоремы.

(13) $K \simeq PSU_t(q)$, $t \geq 3$. Данный случай рассматривается так же, как (12). При этом $T$ имеет тип $GU_1(q) \times GU_{t-1}(q)$ [15, табл. 4.1A]. Отсюда следует, что $(t, q) = (4, 2)$ и $K \simeq PSU_4(2) \simeq PSp_4(3)$. Этот случай был рассмотрен в (1).

(14) $K \simeq {}^2 D_t(q)$, $t \geq 4$. Параболическая подгруппа $P_1$ удовлетворяет условиям леммы A. Так как $P_1$ неразрешима, приходим к противоречию.

**Следствие.** *Если каждая максимальная подгруппа неразрешимой группы $G$ сверхразрешима или проста, то главный ряд группы $G$ имеет вид $1 \subseteq K \subseteq G$, где $|G : K| \leq 2$, $K \simeq PSL_2(p)$ для подходящего значения параметра $p$.*

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что группа $G$ обладает главным рядом $1 \subseteq K \subseteq G$, где $K \simeq PSL_2(p^n)$, $|G : K| = 1$ или $|G : K| = r$ — простое число. Если $n > 1$, то $K$ содержит максимальную 2-нильпотентную подгруппу Бореля, которая не сверхразрешима. Отсюда легко заключить, что $n = 1$. Так как $\mathrm{Aut}(PSL_2(p)) \simeq PGL_2(p)$, то $|G : K| \leq 2$.

В связи с теоремой 2 волне естественно возникает следующий вопрос: *каковы неабелевы главные факторы конечной неразрешимой группы, у которой всякая максимальная подгруппа простая или $p$-нильпотентная ($p$-разложимая) для некоторого фиксированного $p \in \pi(G)$?*

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
2. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. London: Clarendon, 1985.
3. *Miller G., Moreno H.* Nonabelian groups in which every subgroups is abelian // Trans. Amer. Math. Soc. 1903. N 4. P. 398–404.
4. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31. С. 366–372.
5. *Huppert B.* Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. Bd 60, Heft 4. S. 409–434.
6. *Doerk K.* Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen // Math. Z. 1966. Bd 91. S. 198–205.
7. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
8. *Романовский А. В.* Группы с холловыми нормальными делителями // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1966. С. 98–115.

**9.** *Baumann B.* Endliche nichtauflösbare Gruppen mit einer nilpotenten maximal Untergruppen // J. Algebra. 1976. V. 38. P. 119–135.

**10.** *Thompson J.* A special class of non-solvable groups // Math. Z. 1960. Bd 72. S. 458–462.

**11.** *Кондратьев А. С.* Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 1. С. 57–96.

**12.** *Mitchell H. H.* Determination of the ordinary and modular ternary linear groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1911. V. 12. P. 207–242.

**13.** *Kleidman P.* The maximal subgroups of the Chevalley groups $G_2(q)$ with $q$ odd, the Ree groups ${}^2G_2(q)$, and their automorphism groups // J. Algebra. 1988. V. 117. P. 30–71.

**14.** *Liebeck M., Saxl J.* On the orders of maximal subgroups of the finite exceptional groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. 1987. V. 55, N 3. P. 299–330.

**15.** *Kleidman P., Liebeck M.* The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.

**16.** *Aschbacher M.* On the maximal subgroups of the finite classical groups // Invent. Math. 1984. V. 76. P. 469–514.


*Статья поступила 18 февраля 2013 г.*

Монахов Виктор Степанович
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246050, Беларусь
Victor.Monakhov@gmail.com

Тютянов Валентин Николаевич
Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал,
пр. Октября, 46-А, Гомель 246012, Беларусь
tyutyanov@front.ru