Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2014. Том 55, № 3

УДК 512.554

ПРОСТЫЕ ЛИЕВЫ ПУЧКИ МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Н. А. Корешков

Аннотация. Классифицированы простые лиевы пучки размерности, не превосходящей четырех.

Ключевые слова: простой лиев пучок, n-кратный лиев пучок.

Лиевы пучки введены в рассмотрение в [1], где получена классификация неприводимых замкнутых лиевых пучков. В дальнейшем конструкция лиевых пучков использовалась при изучении вопроса интегрируемости некоторых гамильтоновых систем (см. [2, 3]).

С другой стороны, в [4] введены в рассмотрение n-кратные алгебры Ли. Для этих алгебр в [4, 5] доказаны аналоги теорем Энгеля и Ли. Кроме того, конструкция n-кратной алгебры Ли при $n = 2$ под названием бигамильтоновой операды рассматривалась в [6]. Как видно из приводимых ниже определений, понятия лиева пучка и n-кратной алгебры Ли совпадают. Поэтому в данной статье используется термин «n-кратный лиев пучок». Приведем соответствующие определения.

Если L — векторное пространство над полем P, то обозначим через K пространство всех билинейных кососимметрических отображений из $L \times L$ в L.

Определение 1. Векторное пространство L над полем P называется *n-кратным лиевым пучком*, если существуют n линейно независимых элементов s_i, $i = 1, \dots, n$, из K таких, что для любых элементов $a, b, c \in L$ и любых отображений s_i и s_j имеет место соотношение

$$J(a, b, c, s_i, s_j) + J(a, b, c, s_j, s_i) = 0, \tag{1}$$

где $J(a, b, c, s_i, s_j) = (as_ib)s_jc + (bs_ic)s_ja + (cs_ia)s_jb$. (Здесь xs_ky — образ пары $(x, y) \in L \times L$ при отображении s_k.)

Данное определение с заменой термина «n-кратный лиев пучок» на «n-кратная алгебра Ли» использовалось в [4, 5].

Для отображений s_i, $i = 1, \dots, n$, из K определим отображение $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i s_i$, $\alpha_i \in P$, действующее по правилу $asb = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(as_ib)$. Возникающее таким образом пространство, являющееся линейной оболочкой отображений $s_1, \dots, s_n$, обозначим через S. Легко видеть, что для любых двух элементов s и $\tilde{s}$ из S имеет место $J(a, b, c, s, \tilde{s}) + J(a, b, c, \tilde{s}, s) = 0$, $a, b, c \in L$. Более того, если характеристика поля P отлична от двух, то соотношения (1) из определения 1 равносильны соотношениям

$$(asb)sc + (bse)sa + (csa)sb = 0, \quad a, b, c \in L, \tag{1'}$$

когда s пробегает все пространство умножений S.

Данное определение является определением лиева пучка из [1].

В дальнейшем лиев пучок $L = L(S)$ будем называть *n-кратным лиевым пучком*, если $\dim_P S = n$.

Заметим, что если в определении операции у n-арной алгебры Ли L (см. [7]) $n-2$ аргументов считать фиксированными, то получим пример m-кратного лиева пучка, где $m = (n-2)\dim_P L$.

Подпространство I в $L(S)$ называется *идеалом лиева пучка* $L(S)$, если $xsy \in I$ для любых $x \in I$, $y \in L(S)$, $s \in S$. Лиев пучок $L(S)$ называется *простым*, если он не содержит нетривиальных идеалов.

Подпространство B в $L(S)$ называется *подалгеброй лиева пучка* $L(S)$, если $xsy \in B$ для любых $x, y \in B$ и $s \in S$, т. е. $B(S)$ — это лиев пучок с пространством B.

Подпучком лиева пучка $L(S)$ называется пучок $L(S')$, когда S' — подпространство в S.

В [7] получена классификация n-кратных лиевых пучков размерностей два и три. В частности, в ней описаны все простые n-кратные пучки размерностей два и три. Для формулировки этих результатов рассмотрим понятие сэндвичевой алгебры.

Определение 2. *Сэндвичевой алгеброй* $M_r(L, S)$ называется пара пространств L, S, содержащихся в пространстве матриц M_r (r — порядок соответствующих матриц), удовлетворяющих условию $asb - bsa \in L$, когда $a, b \in L$, $s \in S$. (Здесь asb и bsa — обычные произведения матриц.)

Заметим, что для любого фиксированного $s \in S$ отображение $(a, b) \to asb - bsa$ задает билинейное кососимметрическое отображение из $L \times L$ в L, удовлетворяющее тождеству Якоби. Следовательно, сэндивичева алгебра удовлетворяет определению ($1'$), т. е. является лиевым пучком.

Из [7] следует, что один из классов простых лиевых пучков размерности три — это сэндвичева алгебра, определяемая пространством всех кососимметрических матриц из пространства M_3, а пространство умножений S — это одно из подпространств пространства всех симметрических матриц из M_3, когда $\dim S = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и $S \supset \langle E \rangle$, где E — единичная матрица. В случае, когда $\dim S = 1$ или $\dim S = 6$, указанные алгебры принадлежат либо к пятой, либо к первой группе неприводимых замкнутых пучков из [1]. При этом если $S = \langle E \rangle$, то $L(S)$ — обычная простая трехмерная алгебра Ли.

Второй класс простых лиевых пучков из [7] определяется пространством $L = \langle E_{i1},\ i = 1, \dots, n \rangle$, $n = 2, 3$, и пространством $S = \langle E_{1i},\ i = 1, \dots, n \rangle$, $n = 2, 3$, где E_{ij} — матричные единицы пространства матриц M_n, $n = 2, 3$. Данные простые лиевы пучки входят в третью группу неприводимых замкнутых пучков из [1]. Простые лиевы пучки из первого класса, когда $\dim S = 2, 3, 4, 5$, не принадлежат ни одной группе неприводимых замкнутых пучков из [1]. Это легко видеть из сравнения размерностей пространств L и S.

Для классификации простых четырехмерных лиевых пучков будем использовать их картановские подалгебры и соответствующие корневые разложения.

Картановской подалгеброй лиева пучка $L(S)$ назовем подпространство H в L, которое является нильпотентной подалгеброй и совпадает со своим нормализатором $N_{L(S)}(H) = \{x \in L \mid hsx \in H\ \forall h \in H, \forall s \in S\}$.

Лиев пучок $L = L(S)$ назовем *нильпотентным*, если существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $L^k(S) = 0$, где $L^{i+1}(S) = L^i(S)L(S)$, $L^1(S) = L(S)$, $i \geq 1$. Здесь произведением MN двух подпространств M и N из $L(S)$ является подпространство $\langle msn \ \forall m \in M, \forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in S\rangle_P$.

В [5] показано, что любой лиев пучок содержит картановскую подалгебру H, которая является нульпространством L_0 относительно некоторой пары $(x_0, s_0) \in L \times S$, т. е. $L_0 = \{x \in L \mid (\mathrm{ad}_{s_0} x_0)^k x = 0,\ k \in \mathbb{N}\}$, где ad_{s_0} – оператор левого умножения, определенный элементом $s_0 \in S$. (Пару $(x_0, s_0) \in L \times S$ назовем *регулярной*, если $\dim_P L_0$ минимальна, а размерность H назовем *рангом лиева пучка* $L(S)$ и обозначим через $rL(S)$.)

Пусть $L(S)$ — простой четырехмерный лиев пучок, H — его картановская подалгебра, (x_0, s_0) — соответствующая регулярная пара. Тогда H является картановской подалгеброй в алгебре Ли $L(s_0)$, где $L(s_0)$ — алгебра Ли с единственным умножением s_0. Для использования картановских разложений будем считать, что поле P алгебраически замкнуто.

I. Предположим, что $\dim H = 3$, т. е. $rL(S) = 3$. Тогда $L(s_0) = L_0(s_0) \oplus L_1(s_0)$, где $L_0(s_0) = H$, $L_1(s_0) = \{y \in L \mid (\mathrm{ad}_{s_0} h - \mu(s_0, h)E)^n y = 0,\ \mu(s_0, h) \in P\ \forall h \in H,\ n \in \mathbb{N}\}$, причем $\mu(s_0, H) \neq 0$. Так как $\dim L_1 = 1$, то $L_1 = \{y \in L \mid (\mathrm{ad}_{s_0} h)y = \mu(s_0, h)y\ \forall h \in H\}$. Пусть h_1, h_2, h_3 — базис в H. Тогда $h_i s_0 e = \mu_i e$, $i = 1, 2, 3$, где e — базисный элемент в L_1. Выберем базис $\{h_i\}$ так, чтобы μ_1 было отлично от нуля. Из [7] следует, что для нильпотентного пучка $H(\overline{S})$, где $\overline{S} = S|_H$, размерность пространства $\overline{S}$ строго меньше двух.

Пусть $\dim \overline{S} = 0$, т. е. ограничения всех умножений из S на H нулевые. Следовательно, $hsh' = 0$ для любых $h, h' \in H$ и $s \in S$. Из соотношений $J(e, h_i, h_j, s_0, s_1) + J(e, h_i, h_j, s_1, s_0) = 0$, где s_1 — еще одно умножение с формулами $h_i s_1 e = \lambda_i e + \sum\limits_{j=1}^{3} \alpha_{ij} h_j$, $i = 1, 2, 3$, $\lambda_i, \alpha_{ij} \in P$, легко получить, что $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}) = \delta_i(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})$, $i = 2, 3$, $\delta_i \in P$, т. е. $h_i s_1 e = \lambda_i e + \delta_i h^{(1)}$, $i = 1, 2, 3$, где $h^{(1)} = \sum\limits_{k=1}^{3} \alpha_{1k} h_k$. Следовательно, пространство $\langle e, h^{(1)}\rangle$ — идеал в двукратном лиеве пучке $L(\widehat{S})$, $\widehat{S} = \langle s_0, s_1\rangle$. Более того, если $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{pmatrix} > 1$ (здесь rk — ранг соответствующей матрицы), то $h^{(1)} = 0$ и подпространство $\langle e\rangle$ является идеалом в $L(\widehat{S})$.

Пусть $s_0, s_1, \ldots, s_m$ — базис умножений для данного пучка $L(S)$. Тогда, рассуждая, как выше, для каждого умножения s_j получим следующие формулы:

$$h_i s_j e = \lambda_{ij} e + \delta_{ij} h^{(j)}, \quad j = 1, \ldots, m,\ i = 1, 2, 3,$$

где

$$h^{(j)} = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{jk} h_k, \quad \lambda_{ij}, \delta_{ij}, \alpha_{jk} \in P.$$

Пусть $s_{i_1}, \ldots, s_{i_t}$ — базисные элементы, для которых векторы $h^{(p)}$ и $h^{(q)}$, $p, q \in \{i_1, \ldots, i_t\}$, $p \neq q$, попарно линейно независимы. Меняя нумерацию, будем считать, что это умножения $s_1, \ldots, s_t$, $t \leq m$. Поэтому $L^2(S) = L^2(\widetilde{S})$, где $\widetilde{S} = \langle s_0, s_1, \ldots, s_t\rangle$. Из условий согласования $J(e, h_i, h_j, s_p, s_q) + J(e, h_i, h_j, s_q, s_p) = 0$, $1 \leq i < j \leq 3$, следует, что

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} \lambda_{1p} & \lambda_{2p} & \lambda_{3p} \\ \delta_{1q} & \delta_{2q} & \delta_{3q} \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} \lambda_{1q} & \lambda_{2q} & \lambda_{3q} \\ \delta_{1p} & \delta_{2p} & \delta_{3p} \end{pmatrix} = 1.$$

Кроме того,
$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \delta_{1q} & \delta_{2q} & \delta_{3q} \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \delta_{1p} & \delta_{2p} & \delta_{3p} \end{pmatrix} = 1.$$
Получаем следующие формулы умножений:
$$h_i s_0 e = \mu_i e, \quad h_i s_j e = \lambda_j \mu_i e + \delta_j \mu_i h^{(j)}, \quad i = 1,2,3,\ j = 1,\dots,t, \quad \lambda_j, \delta_j, \mu_i \in P.$$
Из этих формул видно, что $t \le 2$. Таким образом,
$$L^2(S) = L^2(\widetilde{S}) = \langle e, h^{(1)}, h^{(2)}\rangle_P, \quad \widetilde{S} = \langle s_0, s_1, s_2\rangle_P,$$
либо
$$L^2(S) = L^2(\widetilde{S}) = \langle e, h^{(1)}\rangle_P, \quad \widetilde{S} = \langle s_0, s_1\rangle_P.$$
Следовательно, $L^2(S)$ — собственный идеал в $L(S)$.

Если $\dim \overline{S} = 1$, где $\overline{S} = S|_H$, то можно считать, что s_0 — умножение, которое задает на H неабелеву структуру (в противном случае повторяются рассуждения п. I). Тогда в H существует базис h_1, h_1, h_3 такой, что $h_1 s_0 h_2 = h_3$, $h_1 s_0 h_3 = 0$, $h_2 s_0 h_3 = 0$. Рассуждения предыдущего случая сохраняются. Достаточно рассматривать условия согласования для пар (h_1, h_3) и (h_2, h_3).

Из приведенных результатов следует, что простого четырехмерного лиева пучка ранга три не существует.

II. Пусть $rL(S) = 2$. Если (x_0, s_0) — регулярная пара, то $L(s_0) = \bigoplus_{i=0}^{t} L_i$ — картановское разложение алгебры Ли $L(s_0)$, где $L_0 = H$ — картановская подалгебра лиева пучка $L(S)$, $L_i = L_{\mu_i} = \{x \in L \mid (\operatorname{ad}_{s_0} h - \mu_i(s_0, h)E)^n x = 0\ \forall h \in H$, $n \in \mathbb{N}\}$, $i > 0$, $\mu_i(s_0, h) \in P$. Из соображений размерности очевидно, что $t \le 2$. Предположим, что $t = 2$. Тогда $L_1 = L_\mu = Pe$, $L_2 = L_{\mu'} = Pe'$, $hs_0 e = \mu(h)e$, $hs_0 e' = \mu'(h)e'$ $\forall h \in H$. Из [7] следует, что $H(\overline{S})$, $\overline{S} = S|_H$, — абелева алгебра. В частности, $hs_0 h' = 0$ $\forall h, h' \in H$. Предположим, что $\mu + \mu' \ne 0$. Тогда $es_0 e' = 0$, так как $\mu + \mu' \ne \mu, \mu'$.

Пусть $\dim S \ge 2$ и для умножений $s_0, s_1 \in S$, $s_1 \ne \lambda s_0$, $\lambda \in P$ имеют место формулы
$$\begin{gathered} h_1 s_0 e = \mu_1 e, \quad h_2 s_0 e = \mu_2 e, \quad h_1 s_0 e' = \mu_1' e, \quad h_2 s_0 e' = \mu_2' e', \quad e s_0 e' = 0, \\ h_1 s_1 e = \lambda_1 e + \lambda_1' e' + \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2, \quad h_1 s_1 e' = \gamma_1 e + \gamma_1' e' + \alpha_1' h_1 + \alpha_2' h_2, \\ h_2 s_1 e = \lambda_2 e + \lambda_2' e' + \beta_1 h_1 + \beta_2 h_2, \quad h_2 s_1 e' = \gamma_2 e + \gamma_2' e + \beta_1' h_1 + \beta_2' h_1, \\ e s_1 e' = A h_1 + B h_2 + M e + N e', \end{gathered} \tag{2}$$
где h_1, h_2 — некоторый базис в H. Имеем
$$\begin{aligned} J(e, h_1, h_2, s_0, s_1) + J(e, h_1, h_2, s_1, s_0) = \mu_1(\beta_1 h_1 + \beta_2 h_2) - \mu_2(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) \\ + [(\mu_1 - \mu_1')\lambda_2' + (\mu_2' - \mu_2)\lambda_1']e' = 0. \end{aligned}$$
Если $\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} \ne 0$, то $\mu_1 = \mu_2 = 0$. В этом случае $L_0 \supseteq H \oplus Pe$, что противоречит определению картановской подалгебры. Таким образом, $\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = 0$. Пусть для определенности $(\beta_1, \beta_2) = q(\alpha_1, \alpha_2)$, $q \in P$. Выберем базис h_1, h_2 в H так, чтобы $\mu_1 = \mu(h_1) = 0$, $\mu_2 = \mu(h_2) \ne 0$. Тогда $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$ и

соответственно $(\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$, т. е. $Hs_1\langle e\rangle \subseteq \mathscr{L} = L_\mu \oplus L_{\mu'}$ для любого элемента $s_1 \in S$, $s_1 \neq \lambda s_0$, $\lambda \in P$. Аналогичным образом можно показать, что $Hs_1\langle e'\rangle \subseteq \mathscr{L}$. Следовательно, $Hs_1\mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}$. Далее, используя соотношение $J(e, e', h, s_0, s_1) + J(e, e', h, s_1, s_0) = 0$, легко показать, что коэффициенты A, B в формуле для es_1e' нулевые, т. е. $\mathscr{L}s_1\mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}$. Из полученных включений следует, что $\mathscr{L}$ — идеал в лиевом пучке $L(S)$.

Рассмотрим альтернативную ситуацию, когда $\mu + \mu' = 0$. В этом случае $es_0e' \in L_0$. Рассуждая, как выше, получим, что в формулах (2) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_1' = \alpha_2' = \beta_1 = \beta_2 = \beta_1' = \beta_2' = 0$, т. е. $Hs_1\mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}$. Далее, используя соотношение согласованности умножений s_0 и s_1 для элементов e, e', h, имеем $M = N = 0$. Если $A = B = 0$ и $es_0e' = 0$, то подпространство $\mathscr{L}$ является идеалом в $L(S)$.

Пусть $es_0e' = h_2 \neq 0$, но $\mu(h_2) = 0$. Выберем второй базисный элемент h_1 так, чтобы $\mu(h_1) \neq 0$. Нормируя его, будем считать, что $\mu(h_1) = 1$. Опять используя согласованность умножений s_0 и s_1 для элементов e, h_1, h_2 и соответственно для e', h_1, h_2, получим $\lambda_2' = \gamma_2 = 0$. Из согласованности умножений s_0 и s_1 для элементов e, e', h получим $\lambda_1 + \gamma_1' = 0$, $\lambda_2 + \gamma_2' = 0$. Наконец, тождество Якоби для элементов e, h_1, h_2 относительно умножения s_1 дает $\lambda_1'(\gamma_2' - \lambda_2) = 0$, а для элементов e', h_1, h_2 дает $\gamma_1(\lambda_2 - \gamma_2') = 0$.

Если $\lambda_1' \neq 0$ или $\gamma_1 \neq 0$, то $\lambda_2 = \gamma_2' = 0$, т. е. $\langle h_2\rangle$ — идеал в $L(S)$. В противном случае имеем

$$\begin{gathered} h_1s_0e = e, \quad h_1s_0e' = -e', \quad h_1s_1e = \lambda_1 e, \quad h_1s_1e' = -\lambda_1 e', \\ h_2s_0e = 0, \quad h_2s_0e' = 0, \quad h_2s_1e = \lambda_2 e, \quad h_2s_1e' = -\lambda_2 e'. \end{gathered} \tag{3}$$

Заменяя умножение s_0 на $\hat{s} = \theta_0 s_0 + \theta_1 s_1$, $\theta_0, \theta_1 \in P$, выберем параметры θ_0 и θ_1 так, чтобы $e\hat{s}e' = \hat{h}_2$ и $\mu(\hat{h}_2) \neq 0$.

Если $(A, B) \neq (0, 0)$ и $es_0e' = h_2 \neq 0$, но $\mu(h_2) = 0$, то, применяя тождество Якоби для элементов e, e', h_2 относительно умножения s_1, имеем $\lambda_2 + \gamma_2' = 0$. Рассуждая, как выше, получим, что либо $\langle h_2\rangle$ — идеал в $L(S)$, либо выполняются соотношения (3). Поэтому опять можно получить умножение s_0, для которого $es_0e' = h_2 \neq 0$ и $\mu(h_2) \neq 0$.

Выберем второй базисный элемент h_1 из условия $\mu(h_1) = 0$. Заменяя умножение s_0 на $\frac{2s_0}{\mu(h_2)}$, имеем

$$h_1s_0e = 0, \quad h_1s_0e' = 0, \quad h_2s_0e = 2e, \quad h_2s_0e' = -2e', \quad es_0e' = h_2.$$

Эти формулы показывают, что алгебра Ли $L(s_0)$ совпадает с матричной алгеброй Ли $M_2(P)$, если положить $h_1 = E_{11} + E_{22}$, $h_2 = E_{11} - E_{22}$, $e = E_{12}$, $e' = E_{21}$, $s_0 = E_{11} + E_{22}$, где E_{ij} — матричные единицы.

Если для всех умножений s_1 из пространства S параметр λ_1 в формулах (2) равен нулю, то, используя условия согласования

$$J(x, y, z, s, s') + J(x, y, z, s', s) = 0, \tag{4}$$

когда x, y, z — всевозможные наборы из базисных элементов e, e', h_1, h_2, а $s = s_0$, $s' = s_1$, получим $h_1s_1e = 0$, $h_1s_1e' = 0$, т. е. $\langle h_1\rangle$ — идеал в $L(S)$.

Пусть существует умножение s_1, для которого $\lambda_1 \neq 0$. Тогда из формул (4) находим

$$\begin{gathered} h_1s_1e = \lambda_1 e, \quad h_1s_1e' = -\lambda_1 e', \\ h_2s_1e = \lambda_2 e, \quad h_2s_1e' = -\lambda_2 e', \quad es_1e' = Ah_1 + Bh_2. \end{gathered}$$

Заменив умножение s_1 на $\hat{s} = \frac{2s_1}{\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}s_0$, получим

$$h_1\hat{s}e = 2e, \quad h_1\hat{s}e' = -2e', \quad h_2\hat{s}e = 0, \quad h_2\hat{s}e' = 0, \quad e\hat{s}e' = \widehat{A}h_1 + \widehat{B}h_2. \tag{5}$$

Пусть $\hat{s}_1$ — умножение с параметрами $\widehat{A} = -1$, $\widehat{B} = 0$. Тогда алгебра Ли $L(\hat{s}_1)$ совпадает с сэндвичевой алгеброй $M_2(M_2(P), E_{11} - E_{22})$. Это следует из формул (5), если положить $h_1 = E_{11} + E_{22}$, $h_2 = E_{11} - E_{22}$, $e = E_{12}$, $e' = E_{21}$, $\hat{s}_1 = E_{11} - E_{22}$.

Обозначим $\widehat{S} = \langle s_0, \hat{s}_1\rangle$. Тогда $L(\widehat{S})$ — простой четырехмерный двукратный лиев пучок, изоморфный сэндвичевой алгебре $M_2(M_2(P), \mathscr{D})$, где $\mathscr{D} = \langle E_{11}, E_{22}\rangle$.

Формулы (5) показывают, что пространство умножений $\widehat{S} = \langle s_0, \hat{s}_1\rangle$ можно вложить в пространство $S = \widehat{S} \oplus \overline{S}$, $\dim S = 3, 4$, когда в качестве элементов дополнительного подпространства $\overline{S}$, $\dim \overline{S} = 1, 2$, берутся умножения, удовлетворяющие формулам

$$h_1\bar{s}e = 0, \quad h_1\bar{s}e' = 0, \quad h_1\bar{s}h_2 = 0, \quad h_2\bar{s}e = 0, \quad h_2\bar{s}e' = 0,$$
$$e\bar{s}e' = \overline{A}h_1 + \overline{B}h_2, \quad \overline{A}, \overline{B} \in P.$$

Тогда $L(S)$ — это четырехмерный m-кратный ($m = 3, 4$) простой лиев пучок.

Рассмотрим пространство умножений $\widetilde{S}$, содержащее $\widehat{S} = \langle s_0, \hat{s}_1\rangle$ и действующее на пространстве L, причем элементы дополнительного пространства не обязательно сохраняют подпространство H, т. е. $h_1\tilde{s}h_2 = \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2 + \delta e + \delta' e'$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta, \delta' \in P$. Тогда из условий согласования (4), когда x, y, z — элементы из набора h_1, h_2, e, e', а $s = s_0$ либо $s = \hat{s}_1$, $s' = \hat{s}$, следует, что

$$\begin{gathered} e\tilde{s}e' = 0, \quad h_1\tilde{s}h_2 = \delta e + \delta' e', \quad h_1\tilde{s}e = -\frac{\delta'}{2}h_2, \quad h_1\tilde{s}e' = -\frac{\delta}{2}h_2, \\ h_2\tilde{s}e = -\frac{\delta'}{2}h_1, \quad h_2\tilde{s}e' = -\frac{\delta}{2}h_1. \end{gathered} \tag{6}$$

Из полученных формул вытекает, что $\dim \widetilde{S} = 4$. Обозначим через $\tilde{s}_1$ умножение с параметрами $\delta = 2$, $\delta' = 0$, а через $\tilde{s}_2$ — умножение с параметрами $\delta = 0$, $\delta' = 2$. Тогда s_0, $\hat{s}_1$, $\tilde{s}_1$, $\tilde{s}_2$ — базис пространства $\widetilde{S}$ и $L(\widetilde{S})$ — простой четырехмерный четырехкратный лиев пучок, совпадающий с сэндвичевой алгеброй $M_2(M_2(P), M_2(P))$, если положить $h_1 = E_{11} + E_{22}$, $h_2 = E_{11} - E_{22}$, $e = E_{12}$, $e' = E_{21}$, $s_0 = E_{11} + E_{22}$, $\hat{s}_1 = E_{11} - E_{22}$, $\tilde{s}_1 = E_{12}$, $\tilde{s}_2 = E_{21}$.

Кроме того, для любого набора $(\delta_0, \delta_0') \in P^2$ и пространства $\widetilde{S}_0 = \langle s_0, \hat{s}_1, \delta_0\tilde{s}_1 + \delta_0'\tilde{s}_2\rangle$ пучок $L(\widetilde{S}_0)$ — простой четырехмерный трехкратный лиев пучок. Он изоморфен сэндвичевой алгебре $M_2(M_2(P), T)$, когда $\mathscr{D} \subset T \subset M_2(P)$, $\dim T = 3$, $\mathscr{D} = \langle E_{11}, E_{22}\rangle$.

Заметим, что сэндвичева алгебра $M_2(M_2(P), M_2(P))$ принадлежит к третьей группе неприводимых замкнутых пучков из [1]. В то же время сэндвичевы алгебры $M_2(M_2(P), T)$, когда $\mathscr{D} \subseteq T \subsetneqq M_2(P)$, и простые лиевы пучки $L(S)$, когда $\dim L = 4$, $\dim S = 3, 4$, содержащие подпучок $L(\widehat{S}) \cong M_2(M_2(P), \mathscr{D})$ из предыдущего случая, не совпадают ни с одним из неприводимых замкнутых пучков из [1]. В этом легко убедиться, сравнивая размерности пространства элементов L и пространства умножений S.

IIa. $rL(S) = 2$, но $L(s_0) = L_0 \oplus L_1$, где $L_0 = H$ — картановская подалгебра лиева пучка $L(S)$, совпадающая с нульпространством регулярной пары (x_0, s_0)

и имеющая размерность два, а $L_1 = \{y \in L \mid (\mathrm{ad}_{s_0}(h) - \mu(s_0, h)E)^n y = 0\ \forall h \in H, n \in \mathbb{N}\}$ — единственное корневое подпространство размерности два.

Из нильпотентности пучка $H(S)$ в силу [7] получаем его абелевость, т. е. $hsh' = 0$ для любых элементов h и h' из H и любого $s \in S$. В частности, $hs_0h' = 0\ \forall h, h' \in H$. Поэтому в L_1 существует базис e, e', в котором для любого элемента h из H выполняются соотношения $hs_0e = \mu(s_0, h)e$, $hs_0e' = \mu(s_0, h)e' + \delta(s_0, h)e$, $\mu(s_0, h), \delta(s_0, h) \in P$. Обозначим через h_1, h_2 некоторый базис в H. Пусть $\mu_1 = \mu(s_0, h_1)$, $\mu_2 = \mu(s_0, h_2)$, $\delta_1 = \delta(s_0, h_1)$, $\delta_2 = \delta(s_0, h_2)$. Используя формулы (2) для умножения $s_1 \in S$, $s_1 \neq \lambda s_0$, $\lambda \in P$, и тот факт, что $es_0e' = 0$, и применяя рассуждения из п. II, вначале получим $Hs_1L_1 \subseteq L_1$, а затем $L_1s_1L_1 \subseteq L_1$. Из этих включений следует, что L_1 — идеал в лиевом пучке $L(S)$.

III. $rL(S) = 1$, причем $L(S)$ не содержит простых лиевых подпучков $L(S')$ с условием $rL(S') > 1$.

Как выше, обозначим через H картановскую подалгебру, являющуюся нуль-компонентой регулярной пары (x_0, s_0). Как вытекает из приведенного условия, $\dim H = 1$. Пусть $L(s_0) = H \oplus \sum\limits_{i=1}^{3} L_i$ — картановское разложение алгебры Ли $L(s_0)$, причем $\dim L_i = 1$, $i = 1, 2, 3$. Положим $L_i = \langle e_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$. Тогда $hs_0e_i = \alpha_i(h)e_i$, $i = 1, 2, 3$, для любого $h \in H$, $\alpha_i(h) \in P$. Предположим, что $\alpha_i \neq \pm\alpha_j$, когда $i \neq j$, и, кроме того, $\alpha_i + \alpha_j \neq \alpha_k$, когда (i, j, k) — три различных индекса. Тогда $e_is_0e_j = 0$, $i, j = 1, 2, 3$.

Пусть s — еще одно умножение из S. Положим

$$hse_i = \lambda_i h + \sum_{j=1}^{3} \mu_{ij}e_j,\ i = 1, 2, 3, \quad e_ise_j = \gamma_{ij}h + \sum_{k=1}^{3} A_{ijk}e_k,\ 1 \leq i < j \leq 3,$$

$\lambda_i, \gamma_{ij}, \mu_{ij}, A_{ijk} \in P$, где h — некоторый базисный элемент из H.

Из соотношения

$$J(e_1, e_2, e_3, s_0, s) + J(e_1, e_2, e_3, s, s_0) = 0 \tag{7}$$

имеем $\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$. Из соотношений

$$J(e_i, e_j, h, s_0, s) + J(e_i, e_j, h, s, s_0) = 0, \tag{8}$$

когда $(i, j) = (1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, следует, что

$$\begin{gathered}
A_{121} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\lambda_2, \quad A_{122} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\lambda_1, \quad A_{123} = 0,\\
A_{131} = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}\lambda_3, \quad A_{132} = 0, \quad A_{133} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\lambda_1,\\
A_{231} = 0, \quad A_{232} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\lambda_3, \quad A_{233} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\lambda_2.
\end{gathered} \tag{9}$$

Из соотношений

$$J(e_i, e_j, h, s, s) = 0, \tag{10}$$

когда $(i, j) = (1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, имеем

$$\begin{gathered}
A_{121}\lambda_1 + A_{122}\lambda_2 + A_{123}\lambda_3 = 0,\\
A_{131}\lambda_1 + A_{132}\lambda_2 + A_{133}\lambda_3 = 0,\\
A_{231}\lambda_1 + A_{232}\lambda_2 + A_{233}\lambda_3 = 0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Подставляя значения A_{ijk} из (9) в (11), находим $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_1\lambda_3 = \lambda_2\lambda_3 = 0$. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то подпространство $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$ — идеал в $L(S_0)$, $S_0 = \langle s_0, s\rangle$. Пусть $\lambda_3 \neq 0$, но $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Тогда

$$e_1se_2 = 0, \quad e_1se_3 = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}\lambda_3e_1, \quad e_2se_3 = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\lambda_3e_2.$$

Используя полученные формулы в соотношениях (10), получим

$$\mu_{23} = \mu_{13} = \mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{21} = 0, \quad \alpha_3\mu_{11} - \alpha_1\mu_{33} = 0, \quad \alpha_2\mu_{33} - \alpha_3\mu_{22} = 0.$$

Таким образом, $hse_1 = \mu_{11}e_1$, $hse_2 = \mu_{22}e_2$, т. е. $\langle e_1, e_2\rangle$ — идеал лиева пучка $L(S_0)$. Если $S \supset S_0$, то для любого $\tilde{s} \in S$, $\tilde{s} \notin S_0$ можно рассмотреть $\tilde{s}' = \tilde{s} + ts$, $t \in P$. Тогда $\tilde{\lambda}_3' = \tilde{\lambda}_3 + t\lambda_3 \neq 0$ при подходящем выборе t, поэтому $\langle e_1, e_2\rangle$ — идеал лиева пучка $L(S)$.

В противном случае для любого $s \notin \langle s_0\rangle$ все параметры λ_i, $i = 1, 2, 3$, нулевые, т. е. $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$ — идеал в $L(S)$.

IIIa. Пусть $\alpha_1 \neq \alpha_2$, но $\alpha_2 = \alpha_3$. Следуя рассуждениям п. II, из соотношения (7) получим $\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$, т. е. подпространство $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$ является трехмерным лиевым пучком, так как $e_is_0e_j = 0$, $i, j = 1, 2, 3$.

В отличие от п. II из соотношений (9) и (10) следует только $\lambda_1\lambda_2 = 0$, $\lambda_1\lambda_3 = 0$, так как $\alpha_2 = \alpha_3$. Если для каждого умножения $s \in S$ параметры λ_i, $i = 1, 2, 3$, нулевые, то подпространство $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$ — идеал в $L(S)$. Пусть существует умножение $s' \in S$, для которого $\lambda_1 = \lambda_1(s') \neq 0$. Тогда, используя замену $\bar{s} = s + \gamma s'$, $\gamma \in P$, можно выбрать базис умножений $s_0, s_1, \ldots, s_n$ в S такой, что $\lambda_1(s_i) \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$. В этом случае $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Рассуждая, как в предыдущем случае, получим, что $\langle e_2, e_3\rangle$ — идеал в $L(S)$.

Если для каждого умножения $s \in S$ параметр $\lambda_1(s)$ нулевой, то

$$e_1se_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\lambda_2e_1, \quad e_1se_3 = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}\lambda_3e_1, \quad hse_1 = \mu_{11}e_1.$$

Последнее соотношение вытекает из условий $\mu_{13} = \mu_{12} = 0$, которые являются следствием соотношений

$$\lambda_2\mu_{12}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + 1\right) - \lambda_3\mu_{13}\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = 0, \quad \lambda_2\mu_{13}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + 1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) = 0,$$

вытекающих из (10). Таким образом, в этом случае подпространство $\langle e_1\rangle$ — идеал в $L(S)$.

IIIb. Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Нормируя умножение s_0, можно считать, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$. Как выше, из (7) имеем $\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$, т. е. $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$ — лиев пучок относительно умножений s_0 и s. Из (8) следует, что

$$e_1se_2 = \lambda_2e_1 - \lambda_1e_2, \quad e_1se_3 = \lambda_3e_1 - \lambda_1e_3, \quad e_2se_3 = \lambda_3e_2 - \lambda_2e_3.$$

Если все параметры λ_i, $i = 1, 2, 3$, равны нулю, то $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$ — идеал в лиевом пучке $L(\langle s_0, s\rangle)$. Пусть один из параметров λ_i, $i = 1, 2, 3$, отличен от нуля. Так как все базисные элементы e_i, $i = 1, 2, 3$, в данном случае равноправны относительно умножения s_0, пусть $\lambda_1 \neq 0$. Заменим элемент e_2 на $e_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}e_1$, а элемент e_3 — на $e_3 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}e_1$. Тогда $e_1se_2 = -\lambda_1e_2$, $e_1se_3 = -\lambda_1e_3$, $e_2se_3 = 0$. Из соотношений (10) получаем

$$hse_1 = \lambda_1h + \sum_{k=1}^{3}\mu_{1k}e_k, \quad hse_2 = \mu_{22}e_2, \quad hse_3 = \mu_{33}e_3, \quad \mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33}.$$

Заменяя элемент h на $h+\frac{\mu_{12}}{2\lambda_1}e_2+\frac{\mu_{13}}{2\lambda_1}e_3$, а умножение s — на $s-\mu_{11}s_0$ и нормируя последнее, имеем

$$hse_1 = h, \quad hse_2 = 0, \quad hse_3 = 0,$$

$$e_1se_2 = -e_2, \quad e_1se_3 = -e_3, \quad e_2se_3 = 0.$$

Пусть $\bar{s}$ — еще одно умножение. Тогда из условий (8) получаем

$$e_1\bar{s}e_2 = \bar{\lambda}_2e_1 - \bar{\lambda}_1e_2, \quad e_1\bar{s}e_3 = \bar{\lambda}_3e_1 - \bar{\lambda}_1e_3, \quad e_2\bar{s}e_3 = \bar{\lambda}_3e_2 - \bar{\lambda}_2e_3.$$

Из соотношений

$$J(e_i,e_j,h,s,\bar{s})+J(e_i,e_j,h,\bar{s},s)=0,\ (i,j)=(1,2),(1,3),(2,3),\ J(e_i,e_j,h,\bar{s},\bar{s})=0$$

следует, что

$$h\bar{s}e_1 = \bar{\lambda}_1h + \bar{\mu}_{11}e_1, \quad h\bar{s}e_2 = \bar{\lambda}_2h + \bar{\mu}_{22}e_2, \quad h\bar{s}e_3 = \bar{\lambda}_3h + \bar{\mu}_{33}e_3.$$

Так как $\bar{\mu}_{11}=\bar{\mu}_{22}=\bar{\mu}_{33}=t$, заменяя $\bar{s}$ на $\bar{s}-ts_0-\bar{\lambda}_1s$, имеем

$$h\bar{s}e_1 = 0, \quad h\bar{s}e_2 = \bar{\lambda}_2h, \quad h\bar{s}e_3 = \bar{\lambda}_3h,$$

$$e_1\bar{s}e_3 = \bar{\lambda}_3e_1, \quad e_1\bar{s}e_2 = \bar{\lambda}_2e_1, \quad e_2\bar{s}e_3 = \bar{\lambda}_3e_2 - \bar{\lambda}_2e_3.$$

Легко убедиться, что подпространство $\langle\bar{\lambda}_2e_3-\bar{\lambda}_3e_2\rangle$ — идеал в лиевом пучке $L(\langle s_0,s,\bar{s},\rangle)$. Если $\tilde{s}$ — еще одно умножение с параметрами $(\tilde{\lambda}_2,\tilde{\lambda}_3)$, причем $\begin{vmatrix}\bar{\lambda}_2 & \bar{\lambda}_3\\ \tilde{\lambda}_2 & \tilde{\lambda}_3\end{vmatrix}\neq 0$, то $L(S)$ — четырехкратный простой лиев пучок размерности четыре, где $S=\langle s_0,s,\bar{s},\tilde{s}\rangle$. Из приведенных рассуждений видно, что $L(S)$ не является подпучком какого-либо лиева пучка $L(\widehat{S})$, когда $S\subsetneqq\widehat{S}$. В частности, если s_1 — умножение с параметрами $(1,0)$, а s_2 — с параметрами $(0,1)$, то легко проверить, что полученный лиев пучок можно отождествить с сэндвичевой алгеброй $M_4(\mathscr{U},T)$, где $\mathscr{U}=\langle E_{i1},\ i=1,\dots,4\rangle$, $T=\langle E_{1i},\ i=1,\dots,4\rangle$, если отождествить элементы h, e_1, e_2, e_3 с матрицами E_{11}, E_{21}, E_{31}, E_{41}, а умножения s_0, s, s_1, s_2 — с матрицами E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14}. Данный лиев пучок относится к третьей группе неприводимых замкнутых пучков из [1].

IIIc. $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3$, но $e_is_0e_j=0$, $i,j=1,2,3$. Повторяя схему рассуждений пп. IIIa, IIIb, получим

$$\gamma_{12}=\gamma_{13}=\gamma_{23}=0, \quad \lambda_1\lambda_3=0, \quad \lambda_2\lambda_3=0, \quad \lambda_1\lambda_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)+A_{123}\lambda_3=0.$$

Если $\lambda_3\neq0$, то $\lambda_1=\lambda_2=0$, $A_{123}=0$, а из (10), когда $(i,j)=(1,2)$, имеем $\mu_{23}=\mu_{13}=0$. Таким образом,

$$e_1se_2 = 0, \quad e_1se_3 = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}\lambda_3e_1, \quad e_2se_3 = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\lambda_3e_2,$$

$$hse_1 = \mu_{11}e_1 + \mu_{12}e_2, \quad hse_2 = \mu_{21}e_1 + \mu_{22}e_2,$$

т. е. подпространство $\langle e_1,e_2\rangle$ — идеал в лиевом пучке $L(\langle s_0,s\rangle)$. Так как любое умножение $\tilde{s}$, не принадлежащее пространству $\langle s_0,s\rangle$, можно заменить на $\tilde{s}+ts$, $t\in P$, так, что соответствующий параметр $\tilde{\lambda}_3$ отличен от нуля, то $\langle e_1,e_2\rangle$ — идеал в $L(S)$.

Если $\lambda_3=0$, то $\lambda_1\lambda_2=0$. В случае, когда $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, подпространство $\langle e_1,e_2,e_3\rangle$ — идеал в $L(S)$.

Пусть $\lambda_1 \neq 0$. Из соотношения (10) при $(i,j)=(2,3)$ имеем $\mu_{31}=\mu_{21}=0$. В результате получаем

$$e_1 s e_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\lambda_1 e_2 + A_{123}e_3, \quad e_1 s e_3 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\lambda_1 e_3, \quad e_2 s e_3 = 0,$$

$$hse_2 = \mu_{22}e_2 + \mu_{23}e_3, \quad hse_3 = \mu_{32}e_2 + \mu_{33}e_3.$$

Как отмечено выше, можно заменить умножение $\tilde{s} \in S$, $\tilde{s} \notin \langle s_0, s\rangle$, так, что $\tilde{\lambda}_1 \neq 0$. Следовательно, $\langle e_2, e_3\rangle$ — идеал в $L(S)$.

IIId. $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3$, причем

$$e_1 s_0 e_2 = e_3, \quad e_1 s_0 e_3 = 0, \quad e_2 s_0 e_3 = 0. \tag{12}$$

Из соотношения (7) имеем

$$\gamma_{12}\alpha_3 - A_{232} + A_{311} = 0, \quad \gamma_{23} = 0, \quad \gamma_{13} = 0.$$

Из соотношений (8) следует, что

$$\begin{gathered} -\lambda_3 + \alpha_3\gamma_{12} = 0, \quad \alpha_2 A_{121} - \lambda_2\alpha_1 = \mu_{31}, \quad \alpha_1 A_{122} + \lambda_1\alpha_2 = \mu_{32}, \\ -\alpha_1\lambda_3 + \alpha_3 A_{131} = 0, \quad A_{132} = 0, \quad \lambda_1\alpha_3 + \alpha_1 A_{133} = -\mu_{32}, \\ A_{231} = 0, \quad -\lambda_3\alpha_2 + \alpha_3 A_{232} = 0, \quad \lambda_2\alpha_3 + \alpha_2 A_{232} = \mu_{31}. \end{gathered} \tag{13}$$

Из соотношений (10) вытекает, что

$$\begin{gathered} A_{121}\lambda_1 + A_{122}\lambda_2 + A_{123}\lambda_3 + \mu_{22}\gamma_{21} + \mu_{11}\gamma_{21} = 0, \\ A_{131}\lambda_1 + A_{132}\lambda_2 + A_{133}\lambda_3 + \mu_{32}\gamma_{21} = 0, \\ A_{231}\lambda_1 + A_{232}\lambda_2 + A_{233}\lambda_3 + \mu_{31}\gamma_{12} = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Из соотношений (13) и (14) получаем

$$\begin{gathered} \lambda_3(\alpha_1+\alpha_3)(\lambda_1\alpha_2+\mu_{32}) = 0, \quad \lambda_3(\alpha_2+\alpha_3)(\lambda_2\alpha_1-\mu_{31}) = 0, \\ 2\lambda_1\lambda_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) + A_{123}\lambda_3 - (\mu_{11}+\mu_{22})\frac{\lambda_3}{\alpha_3} = 0 \end{gathered} \tag{15}$$

(последнее соотношение выполняется, если $\lambda_3 \neq 0$).

Если $\lambda_3 = 0$, то $\gamma_{12}=0$ и подпространство $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$ в этом случае является трехмерным двукратным лиевым пучком $\mathscr{U}(\langle s_0, s\rangle)$. Так как умножение s_0 в базисе e_1, e_2, e_3 удовлетворяет соотношениям (12), из классификации двукратных трехмерных лиевых пучков (см. [7]) следует, что второе умножение s в пространстве S можно выбрать так, что соответствующие формулы в базисе e_1, e_2, e_3 имеют вид

1) $e_1se_2 = e_1$, $e_1se_3 = 0$, $e_2se_3 = 0$,
2) $e_3se_2 = e_3$, $e_1se_3 = 0$, $e_1se_2 = 0$,
3) $e_3se_2 = 0$, $e_3se_1 = e_3$, $e_2se_1 = \delta e_2$, $\delta \neq 0$,
4) $e_2se_3 = e_1$, $e_1se_3 = 0$, $e_1se_2 = 0$.

В случаях IIIa–IIIc, применяя предыдущую схему рассуждений, с использованием соотношений (7), (8), (10) убеждаемся, что подалгебра $\mathscr{U} = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$ является идеалом в лиевом пучке $L(\langle s_0, s\rangle)$. Отсюда легко получить, что $\mathscr{U}$ — идеал в $L(S)$.

В случае IIId из соотношения $e_2se_3 = e_1$ следует, что $A_{231} = 1$, в то время как из соотношений (13) получаем $A_{231} = 0$. Таким образом, в этих случаях лиевы пучки не являются простыми.

Пусть $\lambda_3 \neq 0$. Заменим элемент h на $\tilde{h} = h + \nu e_3$. Тогда таблица, определяющая умножение s_0, сохраняется. С другой стороны, $e_1 s e_2 = \gamma_{12}\tilde{h} + A_{121}e_1 + A_{122}e_2 + (A_{123} - \gamma_{12}\nu)e_3$. Так как $\gamma_{12} \neq 0$, беря $\nu = \frac{A_{123}}{\gamma_{12}}$, можно считать, что $A_{123} = 0$. Из соотношений (10) получим, что $(\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}) = t(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $t \in P$. Поэтому, заменяя умножение s на $s - ts_0$, можно считать, что $\mu_{ii} = 0$, $i = 1, 2, 3$. Кроме того, из соотношений (10) имеем

1) $\lambda_1\mu_{21}\big(2\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 1\big) + \mu_{23}\lambda_3\frac{\alpha_1}{\alpha_3} = 0$,
2) $\lambda_2\mu_{12}\big(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + 1\big) + \mu_{13}\lambda_3\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = 0$,
3) $\lambda_2\mu_{13}\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \lambda_1\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mu_{23} = 0$,
4) $-\lambda_3\mu_{21}\frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \lambda_2^2\alpha_1\big(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}\big) = 0$,
5) $\lambda_3\mu_{23}\big(\frac{\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_3}\big) + \lambda_1\mu_{21} = 0$,
6) $\lambda_3\mu_{12}\frac{\alpha_1}{\alpha_3} + \lambda_1^2\alpha_2\big(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}\big) = 0$,
7) $\lambda_3\mu_{13}\big(\frac{\alpha_1+\alpha_3}{\alpha_3}\big) + \lambda_2\mu_{12} = 0$.

Из соотношений 2 и 7 вытекает, что $\mu_{13} = 0$. Тогда $\lambda_2\mu_{12} = 0$.

1. Пусть $\mu_{12} = 0$. Тогда соотношения 6 и 5 влекут $\lambda_1 = \mu_{23}$=0. Используя формулы (15) и (13), получим

$$hse_1 = 0, \quad hse_2 = \lambda_2 h + \mu_{21}e_1, \quad hse_3 = \lambda_3 h + \mu_{31}e_1,$$

$$e_1se_2 = \gamma_{12}h + A_{121}e_1, \quad e_1se_3 = A_{131}e_1, \quad e_2se_3 = A_{232}e_2 + A_{233}e_3.$$

Введем новый базис в пространстве L:

$$h' = h, \quad e_1' = -e_2, \quad e_2' = e_1, \quad e_3' = e_3.$$

Тогда

$$h's_0e_1' = \alpha_2 e_1', \quad h's_0e_2' = \alpha_1 e_2', \quad h's_0e_3' = \alpha_3 e_3',$$
$$e_1's_0e_2' = e_3', \quad e_1's_0e_3' = 0, \quad e_2's_0e_3' = 0.$$

Соответственно

$$h'se_i' = \lambda_i'h' + \sum_{k=1}^{3}\mu_{ik}'e_k',\ i = 1, 2, 3, \quad e_i'se_j' = \gamma_{ij}'h' + \sum_{k=1}^{3}A_{ijk}'e_k',\ 1 \le i < j \le 3.$$

При этом

$$\lambda_1' = -\lambda_2, \quad \mu_{11}' = \mu_{22}, \quad \mu_{12}' = -\mu_{21}, \quad \mu_{13}' = -\mu_{23},$$
$$\lambda_2' = \lambda_1, \quad \mu_{21}' = -\mu_{12}, \quad \mu_{22}' = \mu_{11}, \quad \mu_{23}' = \mu_{13},$$
$$\lambda_3' = \lambda_3, \quad \mu_{31}' = -\mu_{32}, \quad \mu_{32}' = \mu_{31}, \quad \mu_{33}' = \mu_{33}.$$

Так как $\lambda_3' = \lambda_3 \neq 0$, в соответствии с предыдущим рассуждением получим

$$h'se_1' = 0, \quad h'se_2' = \lambda_2'h_2' + \mu_{21}'e_1', \quad h'se_3' = \lambda_3'h' + \mu_{31}'e_1',$$

$$e_1'se_2' = \gamma_{12}'h' + A_{121}'e_1', \quad e_1'se_3' = A_{131}'e_1', \quad e_2'se_3' = A_{232}'e_2' + A_{233}'e_3'.$$

Поскольку $e_1' = -e_2$, то $hse_2 = 0$, т. е. $\lambda_2 = 0$, $\mu_{21} = 0$, $\mu_{22} = \mu_{23} = 0$. Кроме того, $hse_3 = h'se_3' = \lambda_3'h' + \mu_{31}'e_1' = \lambda_3 h + \mu_{31}e_1$, т. е. $\mu_{31} = \mu_{32} = 0$. Подставляя полученные данные в (13), имеем $A_{121} = 0$, $A_{233} = 0$. Таким образом,

$$\begin{gathered} hse_1 = 0, \quad hse_2 = 0, \quad hse_3 = \lambda_3 h, \\ e_1se_2 = \gamma_{12}h, \quad e_1se_3 = A_{131}e_1, \quad e_2se_3 = A_{232}e_2. \end{gathered} \tag{16}$$

Из условий согласования операций s_0 и s находим $\gamma_{12} = 1$, $A_{232} = \alpha_2$, $A_{131} = \alpha_1$, $\lambda_3 = \alpha_2$. Таким образом, $L(\langle s_0, s\rangle)$ — четырехмерный двукратный простой лиев пучок.

2. Пусть $\lambda_2 = 0$. Тогда из соотношений 4 и 1 имеем $\mu_{21} = 0$, $\mu_{23} = 0$, т. е. $hse_2 = 0$. Далее, используя прием с введением нового базиса, приходим к соотношениям (16). В итоге опять получаем четырехмерный двукратный простой лиев пучок.

Предположим, что $\dim S > 2$. Пусть $\bar{s}$ — некоторое умножение из S, для которого $\bar{\lambda}_3 \neq 0$. Заменим в соотношении (7) элемент s_0 на $\bar{s}$. Тогда

$$\bar{\gamma}_{12}\alpha_3 - \overline{A}_{232} - \overline{A}_{131} = 0, \quad \bar{\gamma}_{23} = 0, \quad \bar{\gamma}_{13} = 0$$

(полагая, что для s выполнены соотношения (16) при условии, что $\gamma_{12} = 1$, $A_{232} = \alpha_2$, $A_{131} = \alpha_1$, $\lambda_3 = \alpha_2$).

Проделав аналогичную операцию с соотношением (8), имеем

$$-\alpha_3\overline{A}_{123} + \bar{\mu}_{22} + \bar{\mu}_{11} = 0, \quad \bar{\mu}_{23} = 0, \quad \bar{\mu}_{13} = 0,$$
$$-\bar{\lambda}_1\alpha_1 - \alpha_3\overline{A}_{133} + \bar{\mu}_{32} = 0, \quad -\alpha_3\bar{\mu}_{11} + \alpha_1\bar{\mu}_{33} = 0, \quad \bar{\mu}_{12} = 0,$$
$$+\alpha_2\bar{\lambda}_2 + \alpha_3\overline{A}_{233} + \bar{\mu}_{31} = 0, \quad \bar{\mu}_{21} = 0, \quad \alpha_2\bar{\mu}_{33} - \alpha_3\bar{\mu}_{22} = 0.$$

С другой стороны, заменив в соотношениях (8) s на $\bar{s}$, получим

$$-\bar{\lambda}_3 + \alpha_3\bar{\gamma}_{12} = 0, \quad \alpha_2\overline{A}_{121} - \bar{\lambda}_2\alpha_1 = \bar{\mu}_{31}, \quad \alpha_1\overline{A}_{122} + \bar{\lambda}_1\alpha_2 = \bar{\mu}_{32},$$
$$-\alpha_1\bar{\lambda}_3 + \alpha_3\overline{A}_{131} = 0, \quad \overline{A}_{132} = 0, \quad \bar{\lambda}_1\alpha_3 + \alpha_1\overline{A}_{133} = -\bar{\mu}_{32},$$
$$\overline{A}_{231} = 0, \quad -\bar{\lambda}_3\alpha_2 + \alpha_3\overline{A}_{232} = 0, \quad \bar{\lambda}_2\alpha_3 + \alpha_2\overline{A}_{233} = \bar{\mu}_{31}.$$

Из этих соотношений, в частности, следует, что $(\bar{\mu}_{11}, \bar{\mu}_{22}, \bar{\mu}_{33}) = t(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Поэтому, заменяя $\bar{s}$ на $\bar{s} - ts_0$, можно считать, что $\bar{\mu}_{11} = \bar{\mu}_{22} = \bar{\mu}_{33} = 0$. Выражая параметры $\{\overline{A}_{ijk}\}$ и $\{\bar{\mu}_{rs}\}$ через $\{\alpha_m\}$ и $\{\bar{\lambda}_n\}$, имеем

$$\begin{gathered} h\bar{s}e_1 = \lambda_1 h, \quad h\bar{s}e_2 = \lambda_2 h, \quad h\bar{s}e_3 = \alpha_1\bar{\lambda}_2 e_1 - \bar{\lambda}_1\alpha_2 e_2, \\ e_1\bar{s}e_2 = \frac{2\lambda_2\alpha_1}{\alpha_2}e_1 - \frac{2\lambda_1\alpha_2}{\alpha_1}e_2, \quad e_1\bar{s}e_3 = -\bar{\lambda}_1 e_3, \quad e_2\bar{s}e_3 = -\bar{\lambda}_2 e_3. \end{gathered} \tag{17}$$

При получении двух последних соотношений использованы формулы $\overline{A}_{133} = -\bar{\lambda}_1$, $\overline{A}_{233} = -\bar{\lambda}_2$, которые справедливы лишь при условии, что $2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ и $2\alpha_2 + \alpha_1 \neq 0$. (Заметим, что указанные ограничения справедливы, если характеристика основного поля не равна двум и трем.) Кроме того, из тождества Якоби для умножения $\bar{s}$ имеем $\bar{\lambda}_1^2\alpha_2\big(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 1\big) = 0$ и $\bar{\lambda}_2^2\alpha_1\big(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1\big) = 0$. Если $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = 0$, т. е. $\bar{s} = 0$. Таким образом, если у оператора $\operatorname{ad}_{s_0} x_0$ регулярной пары (x_0, s_0) все характеристические корни различны, то простой четырехмерный двукратный лиев пучок $L_{\max}(\langle s_0, s\rangle)$ не содержится в качестве подпучка ни в каком лиевом пучке $L(S')$, когда $S' \supsetneqq \langle s_0, s\rangle$.

Если $\alpha_1 = \alpha_2$, то, заменяя умножение s_0 на $\frac{s_0}{\alpha_1}$, а умножение s на $\frac{s}{\alpha_1}$, получим формулы

$$hs_0e_1 = e_1, \quad hs_0e_2 = e_2, \quad hs_0e_3 = 2e_3,$$
$$hse_1 = 0, \quad hse_2 = 0, \quad hse_3 = 2h,$$
$$e_1s_0e_2 = e_3, \quad e_1s_0e_3 = 0, \quad e_2s_0e_3 = 0,$$

$$e_1se_2 = h, \quad e_1se_3 = e_1, \quad e_2se_3 = e_2.$$

Эти формулы позволяют отождествить полученный простой четырехмерный двукратный лиев пучок $L(S)$ с лиевым пучком $\widetilde{L}(\widetilde{S})$, когда $\widetilde{L} = M_2(P)$, $\widetilde{S} = \mathscr{D}$, и умножения задаются формулой $\langle A, B\rangle C - \langle A, C\rangle B - \langle B, C\rangle A$, где $B, C \in M_2(P)$, $A \in \mathscr{D}$ и $\langle X, Y\rangle$ — невырожденная кососимметрическая билинейная форма на $M_2(P)$. Для отождествления следует положить

$$h = E_{11}, \quad e_1 = E_{12}, \quad e_2 = E_{21}, \quad e_3 = E_{22}, \quad s_0 = E_{11}, \quad s = E_{22},$$

а матрицу билинейной формы взять в виде $\begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$, где $I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Лиев пучок $\widetilde{L}(\widetilde{S})$ является подпучком пучка $\widetilde{L}(\widehat{S})$, где $\widetilde{L} = M_2(P)$, $\widehat{S} = M_2(P)$, и умножения задаются приведенной выше формулой. Последний отождествляется с пучком $L(\overline{S})$, $L = \langle h, e_1, e_2, e_3\rangle$, $\overline{S} = \langle s_0, s, \bar{s}_1, \bar{s}_2\rangle$, где $\bar{s}_1$ — умножение, определяемое формулами (17), когда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, а $\bar{s}_2$ — когда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, причем элемент e_3 заменяем на $\frac{e_3}{\alpha_1}$. Кроме того, необходимо отождествить $\bar{s}_1$ с E_{21}, а $\bar{s}_2$ — с E_{12}. Таким образом, в случае, когда оператор $\mathrm{ad}_{s_0} x_0$, отвечающий регулярной паре (x_0, s_0), имеет два одинаковых собственных значения, существует серия простых лиевых пучков $L(T)$, $\dim L = 4$, $\langle s_0, s\rangle \subseteq T \subseteq \overline{S}$, которую можно отождествить с серией $\widetilde{L}(\widetilde{T})$, $\widetilde{L} = M_2(P)$, $\mathscr{D} \subseteq \widetilde{T} \subseteq M_2(P)$, и умножения в $\widetilde{L}(\widetilde{T})$ задаются, как и выше, с помощью невырожденной билинейной кососимметрической формы.

Заметим, что лиев пучок $\widetilde{L}(M_2(P))$ является неприводимым замкнутым пучком из четвертой группы в [1]. В то же время простые лиевы пучки $\widetilde{L}(\widetilde{T})$, $\mathscr{D} \subseteq \widetilde{T} \subsetneqq M_2(P)$ не совпадают ни с одним из неприводимых замкнутых пучков в [1]. Это следует из сравнения размерностей пространств $\widetilde{L}$ и $\widetilde{T}$. Кроме того, заметим, что лиев пучок $L_{\max}(\langle s_0, s\rangle)$ неизоморфен никакому пучку $L(T)$, $\dim T = 2$, так как $L_{\max}(\langle s_0, s\rangle)$ не является подпучком какого-либо пучка большей кратности. Структуру простого лиева пучка $L_{\max}(\langle s_0, s\rangle)$ можно описать следующим образом:

$$L(s_0) = \bigoplus_{i=0}^{3} L_i, \quad L(s) = \bigoplus_{i=0}^{3} \overline{L}_i, \quad \dim L_i = \dim \overline{L}_i = 1, \quad i = 0, \dots, 3,$$

и алгебры Ли $L(s_0)$ и $L(s)$ — градуированные алгебры Ли с условием

$$L_i s_0 L_j = L_{i+j}, \quad \overline{L}_i s \overline{L}_j = \overline{L}_{i+j}, \quad i, j = 0, \dots, 3, \quad i + j \leq 3.$$

Здесь $L_i = \langle e_i\rangle$, $i = 0, \dots, 3$, $\overline{L}_i = \langle e_i\rangle$, $i = 1, 2$, $\overline{L}_i = \langle e_{3-i}\rangle$, $i = 0, 3$, где базисный элемент h обозначен через e_0. При этом существует изоморфизм φ из алгебры Ли $L(s_0)$ на алгебру $L(s)$, при котором $\varphi(e_i) = \sqrt{-1}e_i$, $i = 1, 2$, $\varphi(e_i) = -e_{3-i}$, $i = 0, 3$.

Кроме того, возможны следующие случаи.

IV. $L(s_0) = H \oplus L_1 \oplus L_2$ — картановское разложение алгебры Ли $L(s_0)$, причем $\dim L_1 = 2$, $\dim L_2 = 1$. Приводя оператор $\mathrm{ad}_{s_0} h$ к жордановой нормальной форме, получаем базис e_1, e_2, e_3 в $L_1 \oplus L_2$, в котором $hs_0e_1 = \alpha_1 e_1$, $hs_0e_2 = \alpha_1 e_2 + e_1$, $hs_0e_3 = \alpha_3 e_3$, $e_i s_0 e_j = 0$, $i, j = 1, 2, 3$, либо $e_1 s_0 e_2 = e_3$, $e_1 s_0 e_3 = 0$, $e_2 s_0 e_3 = 0$.

V. $L(s_0) = H \oplus L_1$, $\dim L_1 = 3$. В жордановом базисе e_1, e_2, e_3 пространства L_1 действие оператора $\mathrm{ad}_{s_0} h$ имеет вид

$$hs_0e_1 = \alpha_1 e_1, \quad hs_0e_2 = \alpha_1 e_2 + e_1, \quad hs_0e_3 = \alpha_1 e_3 + e_2.$$

Все произведения $e_i s_0 e_j$ нулевые.

В этих случаях пространство $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$ является идеалом в лиевом пучке $L(S)$.

Суммируя полученные результаты, имеем следующее утверждение.

Теорема. *Любой простой лиев пучок $L(S)$ размерности, не превосходящей четырех, над алгебраически замкнутым полем P характеристики, отличной от двух и трех, совпадает с одним из следующих.*

1. $L(S) = M_3(R,T)$, *где R — пространство всех кососимметрических матриц в $M_3(P)$, T — любое подпространство в пространстве всех симметрических матриц в $M_3(P)$, содержащее $\langle E\rangle$ (E — единичная матрица). В частности, когда $T = \langle E\rangle$, пучок $L(S)$ — это простая трехмерная алгебра Ли.*

2. $L(S) = M_k(I, I^t)$, $k = 2, 3, 4$, *где I — минимальный левый идеал в алгебре матриц $M_k(P)$, $I^t = \{A \in M_k(P) \mid A^\top \in I\}$. (Здесь $A^\top$ — транспонированная матрица).*

3. $\dim L = 4$, $\dim S = 2$. *В пространстве умножений S существует базис s, $\bar s$ такой, что*

$$L(s) = \bigoplus_{i=0}^{3} L_i, \quad L(\bar s) = \bigoplus_{i=0}^{3} \overline{L}_i, \quad \dim L_i = \dim \overline{L}_i = 1, \quad i = 0, \dots, 3,$$

$$\overline{L}_i = L_i, \quad i = 1, 2, \quad \overline{L}_i = L_{3-i}, \quad i = 0, 3.$$

Алгебры Ли $L(s)$ и $L(\bar s)$ — градуированные алгебры Ли с условием

$$L_i s L_j = L_{i+j}, \quad \overline{L}_i \bar s \overline{L}_j = \overline{L}_{i+j}, \quad i, j = 0, \dots, 3, \ i + j \le 3.$$

Кроме того, существует изоморфизм φ из алгебры Ли $L(s)$ на алгебру Ли $L(\bar s)$, при котором $\varphi(L_i) = \overline{L}_i$, $i = 0, \dots, 3$, причем в базисе, согласованном с этим разложением, матрица изоморфизма φ имеет вид $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *где $i = \sqrt{-1}$.*

4. $L = M_2(P)$, $\mathscr{D} \subseteq S \subseteq M_2(P)$, *где $\mathscr{D}$ — подпространство диагональных матриц и умножения задаются формулой $\langle A, B\rangle C - \langle A, C\rangle B - \langle B, C\rangle A$, $B, C \in M_2(P)$, $A \in S$, и $\langle X, Y\rangle$ — невырожденная кососимметрическая билинейная форма на $M_2(P)$.*

В этих случаях $rL(S) = 1$.

5. $L(S) = M_2(M_2(P), S)$, $\mathscr{D} \subseteq S \subseteq M_2(P)$. *Здесь $rL(S) = 2$, когда $S = \mathscr{D}$, и $rL(S) = 1$, когда $\mathscr{D} \subsetneqq S$.*

6. $\dim L = 4$, $\dim S$ *равна 3 или 4. Пространство умножений S имеет вид $S = \widetilde{S} \oplus \overline{S}$, $\dim \widetilde{S} = 2$, $\dim \overline{S}$ равна 1 или 2, причем $L(\widetilde{S}) = M_2(M_2(P), \mathscr{D})$. Пусть $L(s_0) = H \oplus L_1 \oplus L_2$ — картановское разложение алгебры Ли $L(s_0)$, где s_0 — умножение, входящее в регулярную пару (x_0, s_0), которая определяет картановскую подалгебру H в лиевом пучке $L(S)$, и $\dim H = 2$, $\dim L_1 = \dim L_2 = 1$. Тогда $H\overline{S}H = 0$, $H\overline{S}\mathscr{L} = 0$, $\mathscr{L}\overline{S}\mathscr{L} \subseteq H$, причем $\dim(\mathscr{L}\overline{S}\mathscr{L}) = \dim \overline{S}$, где $\mathscr{L} = L_1 \oplus L_2$.*

В этом случае $rL(S) = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кантор И. Л., Персиц Д. Б.* О замкнутых пучках линейных скобок Пуассона // IX Всесоюз. геометр. конф. Кишинев: Штиинца, 1988. P. 141.

2. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

3. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. Ижевск: Факториал; Проспериус; Удмурт. гос. ун-т, 1995.

4. *Корешков Н. А.* О нильпотентности n-кратных алгебр Ли и ассоциативных n-кратных алгебр // Изв. вузов. Математика. 2010. № 2. С. 33–38.

5. *Корешков Н. А.* Теоремы Ли и Энгеля для n-кратных алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 601–609.

6. *Доценко В. В., Хорошкин А. С.* Формулы характера операды пары согласованных скобок и бигамильтоновой операды // Функцион. анализ и его прил. 2007. Т. 41, № 1. С. 1–22.

7. *Филиппов В. Т.* n-Лиевы алгебры // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 6. С. 126–140.

8. *Корешков Н. А.* Лиевы пучки малых размерностей // Изв. вузов. Математика. 2013. № 11. С. 12–30.

Статья поступила 16 июля 2013 г.

Корешков Николай Александрович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
`Nikolai.Koreshkov@kpfu.ru`