Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2014. Том 55, № 3

УДК 512.542.6

О КЛАССЕ ГРУПП С ПРОНОРМАЛЬНЫМИ π–ХОЛЛОВЫМИ ПОДГРУППАМИ

В. Го, Д. О. Ревин

Аннотация. Для любого данного множества π простых чисел по аналогии с известными холловыми классами $\mathscr{E}_\pi$, $\mathscr{C}_\pi$ и $\mathscr{D}_\pi$ определим класс $\mathscr{P}_\pi$ всех конечных групп, в которых π-холловы подгруппы существуют и все пронормальны. Изучено, является ли класс $\mathscr{P}_\pi$ замкнутым относительно основных теоретико-классовых операций замыкания. В частности, установлено, что $\mathscr{P}_\pi$ является насыщенной формацией.

Ключевые слова: конечная группа, холлова подгруппа, пронормальная подгруппа, класс конечных групп, свойства $\mathscr{E}_\pi$, $\mathscr{C}_\pi$, $\mathscr{D}_\pi$, свойство $\mathscr{P}_\pi$, теоретико-классовые операции замыкания, формация, насыщенная формация, класс Фиттинга.

1. Введение

Будем использовать термин «группа» в значении «конечная группа». Всюду через π обозначается некоторое фиксированное множество простых чисел. Символом π' обозначается множество всех простых чисел, не лежащих в π, символом $\pi(n)$ — множество всех простых делителей натурального числа n, а символом $\pi(G)$ — множество $\pi(|G|)$ для группы G.

Напомним, что группа G с условием $\pi(G) \subseteq \pi$ называется π-*группой*. Подгруппа H группы G называется π-*холловой подгруппой*, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$.

В соответствии с [1] будем говорить, что группа G *обладает свойством* $\mathscr{E}_\pi$, если в G имеется хотя бы одна π-холлова подгруппа. Если в группе G со свойством $\mathscr{E}_\pi$ любые две π-холловы подгруппы сопряжены, то будем говорить, что G *обладает свойством* $\mathscr{C}_\pi$. Если любая π-подгруппа группы G, обладающей свойством $\mathscr{C}_\pi$, содержится в некоторой π-холловой подгруппе, то будем говорить, что G *обладает свойством* $\mathscr{D}_\pi$. Группу со свойством $\mathscr{E}_\pi$ ($\mathscr{C}_\pi$, $\mathscr{D}_\pi$) будем называть также $\mathscr{E}_\pi$-*группой* (соответственно $\mathscr{C}_\pi$-*группой*, $\mathscr{D}_\pi$-*группой*). Символы $\mathscr{E}_\pi$, $\mathscr{C}_\pi$ и $\mathscr{D}_\pi$ будут использоваться также для обозначения классов всех $\mathscr{E}_\pi$-, $\mathscr{C}_\pi$- и $\mathscr{D}_\pi$-групп соответственно.

Мотивом к изучению классов $\mathscr{E}_\pi$, $\mathscr{C}_\pi$ и $\mathscr{D}_\pi$ являются знаменитая теорема Силова, а также результаты Холла и С. А. Чунихина, в соответствии с которыми, во-первых, для любого множества π любая разрешимая группа обладает

Работа выполнена первым автором при финансовой поддержке грантов NNSF grant of China (Grant # 11371335) и Chinese Universities Scientific Fund (код проекта WK0010000029), вторым автором — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13–01–00505) и целевой программы СО РАН на 2012–2014 гг. (интеграционный проект № 14).

свойством $\mathscr{D}_\pi$, а во-вторых, для любой неразрешимой группы G найдется множество π такое, что $G \notin \mathscr{E}_\pi$.

Следствием сопряженности π-холловых подгрупп в любой разрешимой группе G является их пронормальность. Напомним, что в соответствии с определением Холла подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g\rangle$.

Классическими примерами пронормальных подгрупп являются:

- нормальные подгруппы;
- максимальные подгруппы;
- силовские подгруппы конечных групп;
- картеровы подгруппы конечных разрешимых групп;
- холловы подгруппы конечных разрешимых групп.

Отметим, что с учетом результата Е. П. Вдовина [2] картеровы подгруппы (т. е. самонормализуемые нильпотентные подгруппы) останутся пронормальными в произвольных (т. е. необязательно разрешимых) конечных группах. В отличие от картеровых подгрупп холловы подгруппы в неразрешимых группах не обязаны быть пронормальными. Соответствующие примеры приведены в [3, 4] (см. также леммы 19 и 20 ниже).

По аналогии с обозначениями Ф. Холла будем говорить, что конечная группа G *обладает свойством* $\mathscr{P}_\pi$ (является $\mathscr{P}_\pi$*-группой*, принадлежит *классу* $\mathscr{P}_\pi$), если $G \in \mathscr{E}_\pi$ и любая π-холлова подгруппа группы G пронормальна.

В [5] доказано, что холловы подгруппы в конечных простых группах пронормальны, а в [4] установлено, что π-холловы подгруппы пронормальны в любой группе из $\mathscr{C}_\pi$. Таким образом,

$$\mathscr{C}_\pi \subseteq \mathscr{P}_\pi \subseteq \mathscr{E}_\pi,$$

и любая простая $\mathscr{E}_\pi$-группа принадлежит классу $\mathscr{P}_\pi$.

Известен следующий открытый вопрос [3, проблема 7.20; 6, проблема 6]: *при каких π включение $\mathscr{C}_\pi \subseteq \mathscr{E}_\pi$ строгое?* Известно [7, теорема A], что $\mathscr{E}_\pi = \mathscr{C}_\pi$, если $2 \notin \pi$. Вместе с тем есть много примеров множеств π, для которых $\mathscr{E}_\pi \neq \mathscr{C}_\pi$.

Естественным представляется также вопрос: *для каждого из включений $\mathscr{C}_\pi \subseteq \mathscr{P}_\pi$ и $\mathscr{P}_\pi \subseteq \mathscr{E}_\pi$ выяснить, при каких π это включение строгое?* Следующее утверждение полностью сводит этот вопрос к вопросу о строгости включения $\mathscr{C}_\pi \subseteq \mathscr{E}_\pi$.

Предложение 1. *Для любого множества π следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\mathscr{C}_\pi = \mathscr{E}_\pi$;

(2) $\mathscr{C}_\pi = \mathscr{P}_\pi$;

(3) $\mathscr{P}_\pi = \mathscr{E}_\pi$.

В теории классов групп вообще и теории свойств $\mathscr{E}_\pi$, $\mathscr{C}_\pi$ и $\mathscr{D}_\pi$ в частности важную роль играют вопросы замкнутости относительно теоретико-классовых операций S, Q, S_n, R_0, N_0, D_0,E, E_{Z}, E_Φ и P (см. [8, 9]), определяемых своим действием на классе $\mathscr{X}$ конечных групп следующим образом:

$\mathrm{S}\mathscr{X} = \{G \mid G$ изоморфна подгруппе некоторой группы $H \in \mathscr{X}\}$;

$\mathrm{Q}\mathscr{X} = \{G \mid G$ является эпиморфным образом некоторой группы $H \in \mathscr{X}\}$;

$\mathrm{S}_n\mathscr{X} = \{G \mid G$ изоморфна субнормальной подгруппе некоторой группы $H \in \mathscr{X}\}$;

$\mathrm{R}_0\mathscr{X} = \left\{G \mid \exists N_i \trianglelefteq G \text{ такие, что } G/N_i \in \mathscr{X} \text{ и } \bigcap\limits_{i=1}^{m} N_i = 1 \ (i = 1, \dots, m)\right\}$;

$\mathrm{N}_0\mathscr{X} = \{G \mid \exists N_i {\trianglelefteq\trianglelefteq} G$ такие, что $N_i \in \mathscr{X}$ и $G = \langle N_1, \dots, N_m\rangle$ $(i = 1, \dots, m)\}$;

$\mathrm{D}_0\mathscr{X} = \{G \mid G \simeq H_1 \times \dots \times H_m$ для некоторых $H_i \in \mathscr{X}$ $(i = 1, \dots, m)\}$;

$\mathrm{E}\mathscr{X} = \{G \mid G$ обладает рядом $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_m = G$ таким, что $G_i/G_{i-1} \in \mathscr{X}$ $(i = 1, \dots, m)\}$;

$\mathrm{E_Z}\mathscr{X} = \{G \mid \exists N \trianglelefteq G$ такая, что $N \leq Z_\infty(G)$ и $G/N \in \mathscr{X}\}$;

$\mathrm{E_\Phi}\mathscr{X} = \{G \mid \exists N \trianglelefteq G$ такая, что $N \leq \Phi(G)$ и $G/N \in \mathscr{X}\}$;

$\mathrm{P}\mathscr{X} = \{G \mid \forall H {<\cdot}\, G\ G/H_G \in \mathscr{X}\}$.

Здесь запись $H \trianglelefteq\trianglelefteq G$ означает, что подгруппа H субнормальна в группе G, а запись $H {<\cdot}\, G$ — что подгруппа H максимальна в G. Для подгруппы $H \leq G$ через H_G обозначается нормальная подгруппа $H_G = \bigcap\limits_{g \in G} H^g$. Кроме того, символами $Z_\infty(G)$ и $\Phi(G)$ обозначены соответственно гиперцентр и подгруппа Фраттини группы G.

Для классов $\mathscr{E}_\pi$, $\mathscr{C}_\pi$ и $\mathscr{D}_\pi$ вопросы о замкнутости относительно вышеопределенных операций находились в сфере внимания многих известных математиков в течение более чем полувека и играют в теории этих классов ключевую роль (см. обзоры [3, 10]). В некоторых случаях замкнутость устанавливается легко (например, легко доказывается, что $\langle \mathrm{Q}, \mathrm{S}_n\rangle\mathscr{E}_\pi = \mathscr{E}_\pi$). Несколько сложнее доказывается равенство $\mathrm{E}\mathscr{C}_\pi = \mathscr{C}_\pi$, полученное впервые С. А. Чунихиным (см. [11]). Но в некоторых случаях вопросы о замкнутости оказываются исключительно сложными. Например, сложным оказался вопрос о замкнутости класса $\mathscr{D}_\pi$ относительно операций S_n и E, озвученный Виландтом на XIII Международном математическом конгрессе в Эдинбурге [12]. Некоторые из вопросов о замкнутости отмечались в монографиях Сузуки [13], Л. А. Шеметкова [14], Дерка и Хоукса [9] и первого автора [8]. Часть вопросов была внесена в «Коуровскую тетрадь» [15]. Упомянем работы [1, 4, 5, 16–42], посвященные изучению проблем замкнутости классов $\mathscr{E}_\pi$, $\mathscr{C}_\pi$ и $\mathscr{D}_\pi$ относительно операций S, Q, S_n, R_0, N_0, D_0, E, $\mathrm{E_Z}$, $\mathrm{E_\Phi}$ и P. К настоящему моменту эти вопросы полностью решены, хотя в ряде случаев для доказательства замкнутости того или иного класса относительно данных операций существенным образом используется классификация конечных простых групп (см. [3]).

Таблица 1. Всегда ли выполнено равенство $\mathrm{C}\mathscr{X} = \mathscr{X}$, $\mathscr{X} \in \{\mathscr{E}_\pi, \mathscr{C}_\pi, \mathscr{P}_\pi\}$?

C	$\mathscr{E}_\pi$	$\mathscr{C}_\pi$	$\mathscr{P}_\pi$
S	нет	нет	нет
Q	да	да*	да*
S_n	да	нет	нет
R_0	да*	да*	да*
N_0	нет	да*	нет
D_0	да	да	да
E	нет	да	нет
$\mathrm{E_Z}$	да	да	да
$\mathrm{E_\Phi}$	да	да	да

В данной работе мы исследуем замкнутость класса $\mathscr{P}_\pi$ относительно операций S, Q, S_n, R_0, N_0, d_0, E, $\mathrm{E_Z}$, $\mathrm{E_\Phi}$ и P. Мы опираемся на результаты работ [4, 5, 16–18], которые, в свою очередь, используют классификацию конечных простых групп. Результаты данной деятельности вместе с аналогичными результатами о классах $\mathscr{E}_\pi$ и $\mathscr{C}_\pi$ собраны (за исключением операции P) в табл. 1[1)].

Более точно, имеет место

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

(A) $\mathrm{C}\mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$ *для любого множества* π *простых чисел и любой операции* $\mathrm{C} \in \{\mathrm{Q}, \mathrm{R}_0, \mathrm{D}_0, \mathrm{E_Z}, \mathrm{E_\Phi}\}$.

(B) *Если* $\mathrm{C} \in \{\mathrm{S}, \mathrm{S}_n, \mathrm{N}_0, \mathrm{E}\}$, *то* $\mathrm{C}\mathscr{P}_\pi \neq \mathscr{P}_\pi$ *для некоторого множества* π *простых чисел.*

[1)] Звездочкой * отмечены утверждения, для доказательства которых используется классификация конечных простых групп.

(C) *Если* $\mathrm{C} \in \{\mathrm{S}_n, \mathrm{E}\}$ *и* $\mathrm{C}\mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$ *для некоторого множества* π *простых чисел, то* $\mathrm{C}\mathscr{E}_\pi = \mathscr{E}_\pi$ *и* $\mathrm{C}\mathscr{C}_\pi = \mathscr{C}_\pi$.

Следствие 1. *Пусть* $\mathrm{C} \in \{\mathrm{S}, \mathrm{Q}, \mathrm{S}_n, \mathrm{R}_0, \mathrm{N}_0, \mathrm{D}_0, \mathrm{E}, \mathrm{E}_\mathrm{Z}, \mathrm{E}_\Phi\}$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\mathrm{C}\mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$ *для любого множества* π *простых чисел;*

(2) $\mathrm{C}\mathscr{E}_\pi = \mathscr{E}_\pi$ *и* $\mathrm{C}\mathscr{C}_\pi = \mathscr{C}_\pi$ *для любого множества* π *простых чисел.*

Напомним, что *формацией* называется $\langle \mathrm{Q}, \mathrm{R}_0 \rangle$-замкнутый класс $\mathscr{X}$ конечных групп. Если при этом класс $\mathscr{X}$ E_Φ-замкнут, то говорят, что $\mathscr{X}$ является *насыщенной формацией*. *Классом Шунка* называется $\langle \mathrm{Q}, \mathrm{P} \rangle$-замкнутый класс. Как известно (см., например, [8, с. 69] или [9, гл. 3, предложение 4.1]), любая насыщенная формация является классом Шунка.

Следствие 2. *Для любого множества* π *простых чисел класс* $\mathscr{P}_\pi$ *является насыщенной формацией.*

Следствие 3. *Для любого множества* π *простых чисел* $\mathrm{P}\mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$. *В частности, класс* $\mathscr{P}_\pi$ *является классом Шунка.*

Можно привести примеры множеств π таких, что для каждой операции $\mathrm{C} \in \{\mathrm{S}, \mathrm{S}_n, \mathrm{N}_0, \mathrm{E}\}$ хотя бы один из классов $\mathscr{E}_\pi$ или $\mathscr{C}_\pi$ не замнут относительно C (таким будет, скажем, множество $\{2, 3\}$). Как следует из теоремы 1, для любого такого π и любой такой операции C класс $\mathscr{P}_\pi$ не будет C-замкнутым. В частности, $\mathscr{P}_\pi$ не будет классом Фиттинга[2)]. Таким образом, в этом случае класс $\mathscr{P}_\pi$ окажется примером насыщенной формации «в чистом виде» (т. е. $\mathscr{P}_\pi$ — насыщенная формация и ничего более). Данное соображение может оказаться полезным для построения различных отрицательных примеров в теории классов.

Вместе с тем тривиальным следствием включений $\mathscr{C}_\pi \subseteq \mathscr{P}_\pi \subseteq \mathscr{E}_\pi$ и замкнутости хотя бы одного из классов $\mathscr{E}_\pi$ и $\mathscr{C}_\pi$ относительно операций Q, S_n, R_0, N_0, D_0, E, E_Z, E_Φ и P является следующее

Предложение 2. *Для любого множества* π *простых чисел такого, что* $\mathscr{E}_\pi = \mathscr{C}_\pi$, *класс* $\mathscr{P}_\pi$ *является* $\langle \mathrm{Q}, \mathrm{S}_n, \mathrm{R}_0, \mathrm{N}_0, \mathrm{D}_0, \mathrm{E}, \mathrm{E}_\mathrm{Z}, \mathrm{E}_\Phi, \mathrm{P} \rangle$*-замкнутым.*

Напомним также, что для классов $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ конечных групп их *произведением* называется класс

$$\mathscr{X}\mathscr{Y} = \{G \mid \exists A \trianglelefteq G \text{ такая, что } A \in \mathscr{X},\ G/A \in \mathscr{Y}\}.$$

Известная теорема С. А. Чунихина (см. [19, 20] или [13, гл. 5, (3.12)]) утверждает, что $\mathscr{C}_\pi\mathscr{E}_\pi = \mathscr{E}_\pi$ и $\mathscr{C}_\pi\mathscr{C}_\pi = \mathscr{C}_\pi$. В качестве побочного результата доказательства теоремы 1 получим аналог этой теоремы для класса $\mathscr{P}_\pi$.

Предложение 3. *Для любого множества* π *простых чисел* $\mathscr{C}_\pi\mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$.

Также побочным результатом данной работы являются предложения 5 и 4 (см. ниже), дающие соответственно критерии S_n-замкнутости класса $\mathscr{C}_\pi$ и E-замкнутости класса $\mathscr{E}_\pi$ в терминах так называемых почти простых групп.

2. Предварительные результаты

Используемые обозначения стандартны и могут быть найдены в [8, 9, 13, 14]. Для конечной группы G через $\mathrm{Hall}_\pi(G)$ обозначено множество всех π-холловых подгрупп.

[2)] Напомним, что *классом Фиттинга* называется $\langle \mathrm{S}_n, \mathrm{N}_0 \rangle$-замкнутый класс групп.

Тот факт, что подгруппа H пронормальна в группе G, будем записывать так: $H \operatorname{prn} G$.

Символом $\mathbb{Z}_n$ обозначается циклическая группа порядка n.

Лемма 1. *Если $H \operatorname{prn} G$ и $H \leq M \leq G$, то $H \operatorname{prn} M$.*

Доказательство следует из определения пронормальной подгруппы. □

Лемма 2. *Если $G \in \mathscr{P}_\pi$, $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ и $H \leq M \leq G$, то $M \in \mathscr{P}_\pi$.*

Доказательство вытекает из леммы 1. □

Лемма 3. *Пусть G — произвольная группа и A — ее нормальная подгруппа. Если $G \in \mathscr{E}_\pi$ и $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, то $A, G/A \in \mathscr{E}_\pi$, причем*

$$H \cap A \in \mathrm{Hall}_\pi(A), \quad HA/A \in \mathrm{Hall}_\pi(G/A).$$

В частности, $\langle \mathrm{S}_n, \mathrm{Q}\rangle \mathscr{E}_\pi = \mathscr{E}_\pi$.

Доказательство. См. [1, лемма 1]. □

Лемма 4. *Если $G \in \mathscr{E}_\pi$ и $A \trianglelefteq G$, то $\mathrm{Hall}_\pi(G/A) = \{HA/A \mid H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)\}$.*

Доказательство. См. [18, следствие 9]. □

Лемма 5 (теорема Чунихина). *Для любого множества π простых чисел $\mathscr{C}_\pi \mathscr{C}_\pi = \mathscr{C}_\pi$ (эквивалентно, $\mathrm{E}\mathscr{C}_\pi = \mathscr{C}_\pi$) и $\mathscr{C}_\pi \mathscr{E}_\pi = \mathscr{E}_\pi$.*

Доказательство. См. [13, гл. 5, (3.12)]. □

Лемма 6. *Пусть $G \in \mathscr{C}_\pi$, $A \trianglelefteq G$ и $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. Тогда $HA \in \mathscr{C}_\pi$.*

Доказательство. См. [17, теорема 1]. □

Лемма 7. *Если $G \in \mathscr{C}_\pi$ и $A \trianglelefteq G$, то $G/A \in \mathscr{C}_\pi$.*

Доказательство. См. [17, лемма 9]. □

Лемма 8. *Пусть $G = HA$, где H — π-холлова и A — нормальная подгруппы конечной группы G, и пусть $A = S_1 \times \cdots \times S_n$ — прямое произведение конечных простых групп. Тогда $G \in \mathscr{C}_\pi$ в том и только том случае, когда $\mathrm{Aut}_G(S_i) \in \mathscr{C}_\pi$ для всех $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. См. [17, лемма 17]. □

Конечная группа называется *π-отделимой*, если она обладает (суб)нормальным рядом, все факторы которого являются π- или π'-группами.

Лемма 9 (С. А. Чунихин). *Любая π-отделимая группа обладает свойством $\mathscr{D}_\pi$.*

Доказательство. См. [13, гл. 5, теорема 3.7]. □

Лемма 10. *В π-отделимой группе π-холловы подгруппы пронормальны.*

Доказательство следует из леммы 9 и замкнутости класса π-отделимых групп относительно взятия подгрупп. □

Лемма 11. *Пусть $\mathscr{X} \in \{\mathscr{E}_\pi, \mathscr{C}_\pi\}$. Пусть G — группа, M и N — ее нормальные подгруппы. Тогда если $G/M \in \mathscr{X}$ и $G/N \in \mathscr{X}$, то $G/(M \cap N) \in \mathscr{X}$.*

Доказательство. См. [18, следствие 7; 16, теорема 1]. □

Лемма 12. *Если $G \in \mathscr{E}_\pi$ — простая группа, то $G \in \mathscr{P}_\pi$.*

Доказательство. См. [5, теорема 1]. □

Лемма 13. *Для любого множества π простых чисел $\mathscr{C}_\pi \subseteq \mathscr{P}_\pi$.*

Доказательство. См. [4, теорема 1]. $\square$

Лемма 14. *Пусть H — подгруппа группы G и $g \in G$, $y \in \langle H, H^g\rangle$. Тогда если подгруппы H^y и H^g сопряжены в $\langle H^y, H^g\rangle$, то подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g\rangle$.*

Доказательство. См. [4, лемма 10]. $\square$

Лемма 15. *Пусть $\overline{} : G \to G_1$ — гомоморфизм групп, $H \leq G$. Тогда если $H \operatorname{prn} G$, то $\overline{H} \operatorname{prn} \overline{G}$.*

Доказательство очевидно. $\square$

Лемма 16. *Пусть G — группа и $G_1, \dots, G_n$ — нормальные подгруппы группы G такие, что $[G_i, G_j] = 1$ при $i \neq j$ и $G = G_1 \cdots G_n$. Пусть для любого $i = 1, \dots, n$ в группе G_i выбрана пронормальная подгруппа H_i и $H = \langle H_1, \dots, H_n\rangle$. Тогда $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. См. [4, лемма 12]. $\square$

Лемма 17. *Пусть G — группа, $H \in \operatorname{Hall}_\pi(G)$ для некоторого множества π простых чисел, $A \trianglelefteq G$ и $G = HA$. Тогда если $(H \cap A) \operatorname{prn} A$, то $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. См. [4, лемма 13]. $\square$

Лемма 18. *Пусть G — группа, $H \in \operatorname{Hall}_\pi(G)$ для некоторого множества π простых чисел, $A \trianglelefteq G$ и $G = HA$. Тогда если $A \in \mathscr{P}_\pi$, то $G \in \mathscr{P}_\pi$.*

Доказательство. Из условия следует, что $G \in \mathscr{E}_\pi$, $|G : A|$ — π-число и $G = KA$ для любой $K \in \operatorname{Hall}_\pi(G)$. Так как $A \in \mathscr{P}_\pi$, с учетом леммы 3 имеем $(K \cap A) \operatorname{prn} A$. Применяя лемму 17, заключаем, что $K \operatorname{prn} G$ и $G \in \mathscr{P}_\pi$. $\square$

Лемма 19. *Для любой группы $G \in \mathscr{E}_\pi \setminus \mathscr{C}_\pi$ и любого простого числа $p \in \pi'$ регулярное сплетение $G \wr \mathbb{Z}_p$ принадлежит разности $\mathscr{E}_\pi \setminus \mathscr{P}_\pi$.*

Доказательство данной леммы можно найти в [4, доказательство теоремы 3]. Приведем здесь доказательство этого утверждения для полноты изложения, поскольку используемая конструкция будет играть важную роль в дальнейшем.

В группе G имеются две несопряженные π-холловы подгруппы U и V.

Рассмотрим прямое произведение

$$Y = \underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{p \text{ раз}}$$

p изоморфных копий группы G. Отображение $\tau : Y \to Y$, заданное по правилу

$$(g_1, g_2, \dots, g_{p-1}, g_p) \mapsto (g_2, g_3, \dots, g_p, g_1), \quad g_1, g_2, \dots, g_p \in G,$$

является автоморфизмом порядка p группы Y. Рассмотрим естественное расщепляемое расширение X группы Y с помощью группы $\langle\tau\rangle$, изоморфное регулярному сплетению $G \wr \mathbb{Z}_p$.

Поскольку Y — нормальная подгруппа группы X и индекс $|X : Y| = p$ не делится на числа из π, имеем $\operatorname{Hall}_\pi(X) = \operatorname{Hall}_\pi(Y)$. В группе Y естественным образом определим подгруппы

$$H = V \times \underbrace{U \times \cdots \times U \times U}_{p-1 \text{ раз}},$$

$$K = \underbrace{U \times U \times \dots \times U}_{p-1 \text{ раз}} \times V.$$

Ясно, что $H, K \in \mathrm{Hall}_\pi(Y) = \mathrm{Hall}_\pi(X)$ и, в частности, $X \in \mathscr{E}_\pi$. Так как U и V не сопряжены в G, подгруппы H и K не сопряжены в Y и, следовательно, в $\langle H, K\rangle \leq Y$. Вместе с тем из определения τ получаем равенство $H^\tau = K$. Поэтому H и K не пронормальные подгруппы в X и $X \in \mathscr{E}_\pi \setminus \mathscr{P}_\pi$. $\square$

Отметим, что легко показать справедливость несколько более общего утверждения.

Лемма 20. *Для любой группы $G \in \mathscr{E}_\pi \setminus \mathscr{C}_\pi$ и любой нетривиальной π'-группы F регулярное сплетение $G \wr F$ принадлежит разности $\mathscr{E}_\pi \setminus \mathscr{P}_\pi$.*

Пусть $A, B, H \leq G$, причем $B \trianglelefteq A$. Положим $N_H(A/B) = N_H(A) \cap N_H(B)$ и назовем эту группу *нормализатором в H секции A/B*. Если $x \in N_H(A/B)$, то элемент x индуцирует на A/B автоморфизм, действующий по правилу $Ba \mapsto Bx^{-1}ax$. Тем самым определен гомоморфизм $N_H(A/B) \to \mathrm{Aut}(A/B)$. Образ этого гомоморфизма обозначим через $\mathrm{Aut}_H(A/B)$ и назовем его *группой H-индуцированных автоморфизмов* секции A/B. В частном случае, когда $B = 1$, вместо $\mathrm{Aut}_H(A/B)$, будем писать $\mathrm{Aut}_H(A)$.

Лемма 21. *Пусть композиционный ряд*

$$1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$$

конечной группы G является уплотнением некоторого ее главного ряда. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) $G \in \mathscr{E}_\pi$;

(2) $\mathrm{Aut}_G(G_i/G_{i-1}) \in \mathscr{E}_\pi$ *для всех* $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. См. [18, следствие 5]. $\square$

Напомним, что *цоколем* $\mathrm{Soc}(G)$ конечной группы G называется подгруппа, порожденная всеми минимальными нормальными подгруппами в G. Конечная группа называется *почти простой*, если ее цоколь — неабелева простая группа. Другими словами, группа почти проста, если она изоморфна некоторой подгруппе G группы $\mathrm{Aut}(S)$ автоморфизмов неабелевой простой группы S, причем[3)]

$$S \cong \mathrm{Inn}(S) \leq G \leq \mathrm{Aut}(S).$$

Пусть $X = G_1 \times \dots \times G_n$ — прямое произведение групп, и пусть $\rho_i : X \to G_i$ — отображение координатной проекции. Подгруппа G группы X называется *полной диагональной подгруппой*, если для любого $i = 1, \dots, n$ сужение отображения ρ_i на G является изоморфизмом групп G и G_i (в частности, существование полной диагональной подгруппы подразумевает, что все сомножители G_i в прямом произведении изоморфны друг другу).

Лемма 22. *Пусть $X^* = G_1 \times \dots \times G_n$ — прямое произведение изоморфных почти простых групп $G_1, \dots, G_n$. Положим $S_i = \mathrm{Soc}(G_i)$ для всех $i = 1, \dots, n$ и*

$$Y = \mathrm{Soc}(X^*) = S_1 \times \dots \times S_n.$$

[3)] Будем в дальнейшем отождествлять изоморфные группы S и $\mathrm{Inn}(S)$.

Выберем в подгруппе X^* полную диагональную подгруппу G, и пусть $X = YG$. Тогда $\mathrm{Aut}_X(S_i) \cong G$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Прежде всего подгруппа S_i нормальна в X для любого $i = 1, \dots, n$, поэтому

$$\mathrm{Aut}_X(S_i) \cong N_X(S_i)/C_X(S_i) = X/C_X(S_i).$$

Пусть $T_i = \langle S_1, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_n \rangle$ для любого $i = 1, \dots, n$. Так как все S_j, $j = 1, \dots, n$, — неабелевы простые группы, ясно, что $C_Y(S_i) = T_i$. Покажем, что $C_X(S_i) \leq Y$ и, как следствие, $C_X(S_i) = T_i$.

Возьмем $x \in X \setminus Y$ и покажем, что $x \notin C_X(S_i)$. В самом деле, $x = yg$ для некоторых $y \in Y$, $g \in G$, причем $g \notin \mathrm{Soc}(G) \leq Y$. Пусть $\rho_i : X^* \to G_i$ — отображение координатной проекции, и положим для краткости $g_i = g^{\rho_i}$ и $y_i = y^{\rho_i}$. Так как ограничение на G каждого из ρ_i — изоморфизм, имеем $g_i \notin \mathrm{Soc}(G_i) = S_i$. Для любого $h \in S_i$ выполнены равенства

$$h^g = h^{g_i}, \quad h^y = h^{y_i}.$$

Отображение $h \mapsto h^{y_i}$ является внутренним автоморфизмом группы S_i, в то время как автоморфизм $h \mapsto h^{g_i^{-1}}$ не внутренний. Стало быть, эти отображения различны, и существует элемент $h \in S_i$ такой, что $h^{y_i} \neq h^{g_i^{-1}}$ и

$$h^x = h^{yg} = h^{y_i g} = h^{y_i g_i} \neq h.$$

Таким образом, $x \notin C_X(S_i)$, и тем самым доказано, что $C_X(S_i) = C_Y(S_i) = T_i$.

Подгруппа T_i нормальна в X, и легко видеть, что $G \cap T_i = 1$. Покажем, что $X = GT_i$. Пусть $\mathrm{Soc}(G) = S$. Тогда $S = G \cap Y$ и

$$|X| = |GY| = \frac{|G||Y|}{|G \cap Y|} = \frac{|G||S|^n}{|S|} = |G||S|^{n-1}.$$

С другой стороны,

$$GT_i = \frac{|G||T_i|}{|G \cap T_i|} = |G||S|^{n-1}.$$

Отсюда получаем $X = GT_i$. Наконец

$$\mathrm{Aut}_X(S_i) \cong X/C_X(S_i) = X/T_i = GT_i/T_i \cong G/(G \cap T_i) \cong G. \quad \square$$

Лемма 23. *Пусть M и N — нормальные подгруппы группы G и $M \cap N = 1$. Тогда для любых подгрупп A и B группы M справедливы утверждения:*

(1) $N \leq C_G(A)$;

(2) *если* $AN = BN$, *то* $A = B$;

(3) $N_G(A)/N = N_{G/N}(AN/N)$.

Доказательство. См. [16, лемма 14]. $\square$

3. Доказательство предложения 1

Требуется доказать эквивалентность утверждений

(1) $\mathscr{C}_\pi = \mathscr{E}_\pi$;

(2) $\mathscr{C}_\pi = \mathscr{P}_\pi$;

(3) $\mathscr{P}_\pi = \mathscr{E}_\pi$.

Ясно, что из включения $\mathscr{C}_\pi \subseteq \mathscr{P}_\pi \subseteq \mathscr{E}_\pi$ (см. лемму 13) следуют импликации (1) $\Rightarrow$ (2) и (1) $\Rightarrow$ (3).

Допустим, утверждение (1) неверно. Тогда существует группа $G \in \mathscr{E}_\pi \setminus \mathscr{C}_\pi$.

Утверждается, что существует простая группа $S \in \mathscr{E}_\pi \setminus \mathscr{C}_\pi$. В самом деле, из леммы 3 следует, что все композиционные факторы группы G являются $\mathscr{E}_\pi$-группами. Если бы все композиционные факторы группы G были $\mathscr{C}_\pi$-группами, то по теореме Чунихина (лемма 5) группа G сама была бы $\mathscr{C}_\pi$-группой. Поэтому среди композиционных факторов группы G найдется простая группа $S \in \mathscr{E}_\pi \setminus \mathscr{C}_\pi$. Но по лемме 12 $S \in \mathscr{P}_\pi$, поэтому $\mathscr{C}_\pi \neq \mathscr{P}_\pi$.

Кроме того, множество π отлично от множества всех простых чисел, и значит, существует число $p \in \pi'$. По лемме 19 $X \in \mathscr{E}_\pi \setminus \mathscr{P}_\pi$ для регулярного сплетения $X = G \wr \mathbb{Z}_p$. Поэтому $\mathscr{P}_\pi \neq \mathscr{E}_\pi$.

Тем самым импликации (2) $\Rightarrow$ (1) и (3) $\Rightarrow$ (1) справедливы, эквивалентность утверждений (1)–(3) установлена и предложение 1 доказано. $\square$

4. Доказательство предложения 3

Пусть G — группа, $A \trianglelefteq G$, и пусть $\overline{} : G \to G/A$ — естественный эпиморфизм. Предположим, что $\overline{G} \in \mathscr{P}_\pi$, а $A \in \mathscr{C}_\pi$. Требуется показать, что $G \in \mathscr{P}_\pi$.

По теореме Чунихина (лемма 5) имеем $G \in \mathscr{E}_\pi$. Возьмем произвольно $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ и $g \in G$. Нужно показать, что подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$.

Так как $\overline{G} \in \mathscr{P}_\pi$, найдется элемент $y \in \langle H, H^g \rangle$ такой, что $\overline{H}^{\overline{y}} = \overline{H}^{\overline{g}}$. В соответствии с леммой 4 можем заменить H на H^y и считать, что $\overline{H} = \overline{H}^{\overline{g}}$, т. е. $HA = H^gA$. Можно также с учетом леммы 2 заменить G на $N_G(HA)$ и считать, что $HA \trianglelefteq G$. В частности, это означает, что группа $\overline{G}$ π-отделима, поскольку одна из секций нормального ряда $\overline{G} \trianglerighteq \overline{HA} \trianglerighteq 1$ является π-группой (группа $\overline{HA}$), а другая — π'-группой (фактор-группа $\overline{G}/\overline{HA}$).

Поскольку $A \in \mathscr{C}_\pi$ и $H \cap A, H^g \cap A \in \mathrm{Hall}_\pi(A)$ по лемме 3, найдется элемент $a \in A$ такой, что $H^a \cap A = H^g \cap A$. Далее, так как $\mathscr{C}_\pi \subseteq \mathscr{P}_\pi$ по лемме 13, существует элемент
$$z \in \langle H \cap A, H^a \cap A \rangle \leq \langle H, H^g \rangle$$
такой, что $H^g \cap A = H^a \cap A = H^z \cap A$. Снова применяя лемму 14, можем считать, что $H^g \cap A = H \cap A$ и, таким образом, $g \in N_G(H \cap A)$.

Ввиду аргумента Фраттини и того, что $A \in \mathscr{C}_\pi$, имеем $G = AN_G(H \cap A)$. Отсюда следует, что фактор-группа
$$N_G(H\cap A)/N_A(H\cap A) = N_G(H\cap A)/(A\cap N_G(H\cap A)) \cong AN_G(H\cap A)/A = G/A = \overline{G}$$
π-отделима. Группа $N_A(H \cap A)$ также π-отделима, поскольку обладает нормальным рядом $N_A(H \cap A) \trianglerighteq H \cap A \trianglerighteq 1$, у которого секции являются π'- и π-группами. Следовательно, $N_G(H \cap A)$ также будет π-отделимой группой. Теперь $g \in N_G(H \cap A)$ и $H, H^g \in \mathrm{Hall}_\pi(N_G(H \cap A))$. Кроме того, группа $\langle H, H^g \rangle$ также π-отделима как подгруппа в $N_G(H\cap A)$. Значит, $\langle H, H^g \rangle \in \mathscr{D}_\pi$ по лемме 9. В частности, подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$. $\square$

5. Критерии замкнутости классов $\mathscr{E}_\pi$ и $\mathscr{C}_\pi$ относительно взятия нормальных подгрупп и расширений

Как следует из лемм 3 и 5, класс $\mathscr{E}_\pi$ S_n-замкнутый, а класс $\mathscr{C}_\pi$ E-замкнутый. В то же время известны примеры множеств π, для которых $\mathrm{E}\mathscr{E}_\pi \neq \mathscr{E}_\pi$ и $\mathrm{S}_n\mathscr{C}_\pi \neq \mathscr{C}_\pi$. Для доказательства теоремы 1 нам потребуются критерии E-замкнутости класса $\mathscr{E}_\pi$ и S_n-замкнутости класса $\mathscr{C}_\pi$.

Предложение 4. *Для данного множества π простых чисел следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\mathrm{E}\mathscr{E}_\pi = \mathscr{E}_\pi$;

(2) $G \in \mathscr{E}_\pi$ *для любой почти простой группы G такой, что* $\mathrm{Soc}(G) \in \mathscr{E}_\pi$ *и* $G/\mathrm{Soc}(G)$ — *π-группа.*

Доказательство. Импликация (1) ⇒ (2) очевидна.

Докажем (2) ⇒ (1). Допустим, что утверждение (2) верно, а утверждение (1) — нет. Тогда существует группа $X \notin \mathscr{E}_\pi$, обладающая нормальной подгруппой Y такой, что $Y \in \mathscr{E}_\pi$ и $X/Y \in \mathscr{E}_\pi$. При этом ясно, что $1 < Y < X$. Уплотним ряд $1 < Y < X$ сначала до главного, а затем и до композиционного ряда

$$1 = X_0 < X_1 < \dots < X_n = X.$$

Так как каждая из секций X_i/X_{i-1} является композиционным фактором одной из $\mathscr{E}_\pi$-групп Y или X/Y, имеем $X_i/X_{i-1} \in \mathscr{E}_\pi$. Кроме того, из леммы 21 следует, что $G^* = \mathrm{Aut}_X(X_i/X_{i-1}) \notin \mathscr{E}_\pi$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$. Положим $S = X_i/X_{i-1}$ для данного i. Ввиду справедливости гипотезы Шрайера фактор-группа G^*/S разрешима. Пусть группа G такова, что $S \leq G \leq G^*$ и $G/S \in \mathrm{Hall}_\pi(G^*/S)$. Заметим, что $G \notin \mathscr{E}_\pi$, так как в противном случае π-холлова подгруппа группы G будет π-холловой подгруппой в G^* вопреки тому, что $G^* \notin \mathscr{E}_\pi$. Но тогда получаем противоречие с утверждением (2), поскольку группа G почти простая, $\mathrm{Soc}(G) = S \in \mathscr{E}_\pi$ и $G/\mathrm{Soc}(G)$ — π-группа. □

Предложение 5. *Для данного множества π простых чисел следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\mathrm{S}_n\mathscr{C}_\pi = \mathscr{C}_\pi$;

(2) $\mathrm{Soc}(G) \in \mathscr{C}_\pi$ *для любой почти простой группы $G \in \mathscr{C}_\pi$ такой, что* $G/\mathrm{Soc}(G)$ — *π-группа.*

Доказательство. Импликация (1) ⇒ (2) очевидна. Докажем (2) ⇒ (1).

Допустим, $\mathrm{S}_n\mathscr{C}_\pi \neq \mathscr{C}_\pi$. Выберем среди всех групп в $\mathscr{C}_\pi$, которые обладают нормальной подгруппой, не принадлежащей $\mathscr{C}_\pi$, группу X наименьшего порядка. Пусть, в свою очередь, Y — минимальная по включению нормальная подгруппа группы X с тем свойством, что $Y \notin \mathscr{C}_\pi$.

Покажем сначала, что Y является минимальной нормальной подгруппой группы X в обычном смысле. В самом деле, если существует нормальная подгруппа N группы X такая, что $1 < N < Y$, то $Y/N \in \mathscr{C}_\pi$ ввиду выбора группы X и того, что $X/N \in \mathscr{C}_\pi$ по лемме 7. Кроме того, $N \in \mathscr{C}_\pi$ в силу выбора подгруппы Y. Поэтому $Y \in \mathscr{C}_\pi$ ввиду теоремы Чунихина (лемма 5); противоречие.

Таким образом, $Y = S_1 \times \dots \times S_n$ для некоторых простых подгрупп $S_1, \dots, S_n$, причем, так как $Y \notin \mathscr{C}_\pi$, подгруппы $S_1, \dots, S_n$ неабелевы.

Ввиду леммы 6 $HY \in \mathscr{C}_\pi$ для любой π-холловой подгруппы H группы X и минимальность порядка группы X означает, что $X = HY$. Применяя лемму 8, получаем $\mathrm{Aut}_X(S_i) \in \mathscr{C}_\pi$ для всех $i = 1, \dots, n$. Но тогда $S_i \in \mathscr{C}_\pi$ ввиду утверждения (2) доказываемой леммы и, следовательно, $Y \in \mathscr{C}_\pi$; противоречие. □

6. Доказательство теоремы 1

Разобьем доказательство теоремы 1 на серию следующих утверждений.

(1) *Для любого множества π простых чисел* $\mathrm{Q}\mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$.

В самом деле, пусть $G \in \mathscr{P}_\pi$, $A \trianglelefteq G$ и $\overline{G} = G/A$. Покажем, что $\overline{G} \in \mathscr{P}_\pi$. Пусть $\overline{H} \in \mathrm{Hall}_\pi(\overline{G})$. Требуется показать, что $\overline{H} \,\mathrm{prn}\, \overline{G}$. По лемме 4 найдется подгруппа $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ такая, что $\overline{H} = HA/A$. Так как $G \in \mathscr{P}_\pi$, имеем $H \operatorname{prn} G$. Применяя лемму 15, получаем $\overline{H} = HA/A \operatorname{prn} G/A = \overline{G}$.

(2) *Для любого множества π простых чисел* $\mathrm{E}_\Phi \mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$ и $\mathrm{E}_\mathrm{Z} \mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$.

Пусть G — конечная группа и $A \in \{\Phi(G), Z_\infty(G)\}$. Предположим, что $N \trianglelefteq G$ и $N \leq A$. Поскольку группа A и, следовательно, группа N нильпотентны, имеем $N \in \mathscr{C}_\pi$. Если $G/N \in \mathscr{P}_\pi$, то $G \in \mathscr{P}_\pi$ ввиду предложения 3. Тем самым доказаны равенства $\mathrm{E}_\Phi \mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$ и $\mathrm{E}_\mathrm{Z} \mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$.

(3) *Для любого множества π простых чисел* $\mathrm{R}_0 \mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$.

Допустим, что класс $\mathscr{P}_\pi$ не замкнут относительно взятия (конечных) подпрямых произведений. Тогда существует группа G, содержащая нормальные подгруппы M и N такие, что G/M и G/N принадлежат $\mathscr{P}_\pi$, а $G/(M \cap N) \notin \mathscr{P}_\pi$. Будем считать, что группа G имеет наименьший возможный порядок среди всех таких групп. Покажем, что предположение о существовании подобной группы приводит к противоречию. Доказательство, в свою очередь, разобьем на серию шагов.

Из леммы 11 следует, что

(i) $G/(M \cap N) \in \mathscr{E}_\pi$.

Минимальность порядка группы G означает, что

(ii) $M \cap N = 1$ и $G \cong G/(M \cap N)$. В частности, $[M, N] = 1$.

Поэтому

(iii) $G \in \mathscr{E}_\pi$ и $G \notin \mathscr{P}_\pi$.

Это означает, что

(iv) G содержит π-холлову подгруппу H и элемент g такие, что $H^x \neq H^g$ для любого $x \in \langle H, H^g \rangle$.

(v) $MH \trianglelefteq G$ и $NH \trianglelefteq G$.

В самом деле, пусть $NH \ntrianglelefteq G$, т. е. $N_G(NH) < G$. Заметим, что

$$HN/N \leq N_G(NH)/N \leq G/N, \quad HM/M \leq N_G(NH)M/M \leq G/M,$$

откуда ввиду лемм 2 и 3 заключаем, что

$$N_G(NH)/N \in \mathscr{P}_\pi, \quad N_G(NH)/N_M(NH) \cong N_G(NH)M/M \in \mathscr{P}_\pi.$$

В силу выбора группы G имеем $N_G(NH) \in \mathscr{P}_\pi$. Поскольку $G/N \in \mathscr{P}_\pi$, найдется элемент $y \in \langle H, H^g \rangle$ такой, что $NH^y = NH^g$, следовательно, $gy^{-1} \in N_G(NH)$. Тогда по доказанному в подгруппе $\langle H, H^{gy^{-1}} \rangle \leq \langle H, H^g \rangle$ найдется элемент z, для которого $H^z = H^{gy^{-1}}$, значит, $H^{zy} = H^g$, причем $zy \in \langle H, H^g \rangle$; противоречие с выбором H и g. Таким образом, $NH \trianglelefteq G$. Аналогично $MH \trianglelefteq G$.

(vi) Группы G/M и G/N π-отделимы.

Требуемое следует из того, что все факторы нормальных рядов $G > MH > M$ и $G > NH > N$ являются либо π-, либо π'-группами.

(vii) Группы $N_G(M \cap H)$ и $N_G(N \cap H)$ π-отделимы.

В самом деле, из (vi) вытекает, что $N_G(M \cap H)M/M$ — π-отделимая группа, поскольку это подгруппа π-отделимой группы G/M. Группа $N_M(M \cap H)$ также π-отделима, поскольку обладает нормальным рядом $N_M(M \cap H) > M \cap H > 1$, факторы которого — π'- и π-группы (напомним, что подгруппа $M \cap H$ π-холлова в M согласно лемме 3, значит, π-холлова в $N_M(M \cap H)$). Теперь $N_G(M \cap H)$ — π-отделимая группа как расширение π-отделимой группы $N_M(M \cap H)$ с помощью

π-отделимой группы $N_G(M\cap H)/N_M(M\cap H)\cong N_G(M\cap H)M/M$. Аналогично доказывается π-отделимость группы $N_G(N\cap H)$.

(viii) Для любой π-холловой подгруппы K группы G выполнено равенство

$$(M\cap K)N/N=(KN/N)\cap(MN/N).$$

Действительно, в силу леммы 3 $M\cap K$ — π-холлова подгруппа группы M, поэтому $(M\cap K)N/N$ — π-холлова подгруппа в MN/N. Так как KN/N — π-холлова подгруппа группы G/N и $MN/N\trianglelefteq G/N$, согласно лемме 3 $(KN/N)\cap(MN/N)$ — π-холлова подгруппа в MN/N. Поскольку очевидно, что

$$(M\cap K)N/N\leq(KN/N)\cap(MN/N),$$

из равенства порядков правой и левой частей заключаем

$$(M\cap K)N/N=(KN/N)\cap(MN/N).$$

Утверждение (viii) доказано.

(ix) $g\in N_G(M\cap H)$.

В самом деле, ввиду (v) и (viii) имеем

$$(H^g\cap M)N/N=H^gN/N\cap MN/N=HN/N\cap MN/N=(H\cap M)N/N.$$

Следовательно, $(H^g\cap M)N/N=(H\cap M)N/N$, и, применяя лемму 23(2), заключаем, что $H^g\cap M=H\cap M$.

(x) Группа $\langle H,H^g\rangle$ π-отделима.

В самом деле, $H\cap M\trianglelefteq H$, поэтому $H\leq N_G(M\cap H)$. Учитывая (ix), получаем $\langle H,H^g\rangle\leq N_G(M\cap H)$, причем подгруппа $N_G(M\cap H)$ является π-отделимой согласно (vii). Поэтому $\langle H,H^g\rangle$ — подгруппа π-отделимой группы, следовательно, сама π-отделима.

(xi) Противоречие.

Подгруппы H и H^g являются π-холловыми подгруппами π-отделимой группы $\langle H,H^g\rangle$ и по лемме 9 сопряжены в $\langle H,H^g\rangle$ вопреки выбору H и g. Утверждение (3) доказано.

(4) *Для любого множества π простых чисел $\mathrm{D}_0\mathscr{P}_\pi=\mathscr{P}_\pi$.*

Данное утверждение можно получить как следствие утверждения (3). Но оно очевидным образом следует также из лемм 3 и 23.

(5) *Если $\mathrm{S}_n\mathscr{P}_\pi=\mathscr{P}_\pi$, то $\mathrm{S}_n\mathscr{C}_\pi=\mathscr{C}_\pi$ для любого множества π простых чисел.*

Допустим, класс $\mathscr{C}_\pi$ не замкнут относительно взятия нормальных подгрупп. Тогда, как следует из предложения 5 и леммы 3, существуют простая неабелева группа S и группа G такие, что $S\leq G\leq \mathrm{Aut}(S)$, $S\in\mathscr{E}_\pi\setminus\mathscr{C}_\pi$, G/S — π-группа и $G\in\mathscr{C}_\pi$.

Так как $\mathscr{E}_\pi\setminus\mathscr{C}_\pi\neq\varnothing$, существует $p\in\pi'$. Рассмотрим прямое произведение

$$Y^*=\underbrace{G\times G\times\dots\times G}_{p\text{ раз}},$$

автоморфизм τ группы Y^*, действующий по правилу

$$\tau:(g_1,\dots,g_{p-1},g_p)\mapsto(g_2,\dots,g_p,g_1)\text{ для любых }g_1,\dots,g_p\in G,$$

и естественное полупрямое произведение $X^* = Y^*\langle\tau\rangle$. В группе X^* рассмотрим подгруппы

$$Y = \mathrm{Soc}(X^*) = \underbrace{S \times S \times \cdots \times S}_{p \text{ раз}}, \quad B_0 = \langle\tau\rangle,$$

τ-инвариантную полную диагональную подгруппу

$$A_0 = \{(g, g, \ldots, g) \mid g \in G\} \cong G$$

группы Y^* и положим $A = A_0Y$, $B = B_0Y$ и $X = AB = A_0B_0Y$. При этом поскольку $[A_0, B_0] = 1$, имеем $A \trianglelefteq X$ и $B \trianglelefteq X$. Кроме того, $A \cap B_0 = 1$ и $X = AB_0$.

Покажем, что $A \in \mathscr{C}_\pi$. Выберем π-холлову подгруппу H в группе G. Тогда $H \cap S \in \mathrm{Hall}_\pi(S)$. Пусть

$$T = \{(h_1, h_2, \ldots, h_p) \mid h_1, h_2, \ldots, h_p \in H \cap S\} \in \mathrm{Hall}_\pi(Y),$$

$$U = \{(h, h, \ldots, h) \mid h \in H\} \in \mathrm{Hall}_\pi(A_0).$$

Подгруппа T U-инвариантная и $K = TU \in \mathrm{Hall}_\pi(A)$. Поскольку AY/Y — π-группа, имеем $A = KY = UTY = UY$. Для $i \in \{1, \ldots, p\}$ обозначим через S_i подгруппу в группе Y, состоящую из элементов вида $(1, \ldots, 1, s, 1, \ldots, 1)$, где элемент $s \in S$ стоит на i-м месте. Тогда $S_i \cong S$ — неабелева простая группа для всех i и $Y = S_1 \times \cdots \times S_p$. По лемме 22 имеем $\mathrm{Aut}_A(S_i) \cong G \in \mathscr{C}_\pi$ для любого $i = 1, \ldots, p$. Применяя лемму 8, заключаем, что $A \in \mathscr{C}_\pi$.

Далее, $X \in \mathscr{C}_\pi$ как расширение $\mathscr{C}_\pi$-группы A с помощью π'-группы B_0 (см. лемму 5).

Наконец $B \cong S \wr \mathbb{Z}_p$, и поскольку $S \in \mathscr{E}_\pi \setminus \mathscr{C}_\pi$, по лемме 19 получаем $B \notin \mathscr{P}_\pi$. Так как $B \trianglelefteq X \in \mathscr{C}_\pi \subseteq \mathscr{P}_\pi$, должно быть $B \in \mathrm{S}_n\mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$; противоречие.

(6) *Существуют множества π простых чисел такие, что $\mathrm{S}_n\mathscr{P}_\pi \neq \mathscr{P}_\pi$.*

Таким будет, скажем, множество $\pi = \{2, 3\}$, поскольку, как известно (см. [3, пример 5.3]), класс $\mathscr{C}_\pi$ не S_n-замкнут для данного π.

(7) *Если $\mathrm{S}_n\mathscr{C}_\pi \neq \mathscr{C}_\pi$, то $\mathrm{S}\mathscr{P}_\pi \neq \mathscr{P}_\pi$ для любого множества π простых чисел. В частности, класс $\mathscr{P}_\pi$, вообще говоря, не S-замкнут.*

Данное утверждение также является простым следствием утверждения (5).

(8) *Если $\mathrm{E}\mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$, то $\mathrm{E}\mathscr{E}_\pi = \mathscr{E}_\pi$ для любого множества π простых чисел.*

Предположим, что $\mathrm{E}\mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$, но $\mathrm{E}\mathscr{E}_\pi \neq \mathscr{E}_\pi$. Тогда согласно предложению 4 существует почти простая группа $G \notin \mathscr{E}_\pi$ такая, что $S = \mathrm{Soc}(G) \in \mathscr{E}_\pi$ и G/S — π-группа. Ясно, что $G/S \in \mathscr{P}_\pi$. Кроме того, так как группа S простая, с учетом леммы 12 имеем $S \in \mathscr{P}_\pi$. Но тогда $G \in \mathrm{E}\mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi \subseteq \mathscr{E}_\pi$; противоречие.

(9) *Существуют множества π такие, что $\mathrm{E}\mathscr{P}_\pi \neq \mathscr{P}_\pi$.*

В самом деле, известны примеры множеств π, для которых класс $\mathscr{E}_\pi$ не E-замкнут. Например, таким будет множество $\pi = \{2, 3\}$ (см. [3, пример 4.1]). Отсюда с учетом утверждения (8) получаем требуемое.

(10) *Существуют множества π такие, что $\mathrm{N}_0\mathscr{P}_\pi \neq \mathscr{P}_\pi$.*

Воспользуемся конструкцией из [21, теорема 1]. Допустим, что множество π простых чисел таково, что $2 \in \pi$ и существует неабелева простая группа S, обладающая ровно двумя классами $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ сопряженных π-холловых подгрупп и допускающая автоморфизм ι порядка 2, переставляющий эти классы[4)]. Пусть G — естественное полупрямое произведение $S\langle\iota\rangle$, $Y^* = G\times G$. Группа Y^* обладает автоморфизмом τ порядка 2, действующим по правилу $\tau : (g_1, g_2) \mapsto (g_2, g_1)$. Обозначим через X^* естественное полупрямое произведение $Y^*\langle\tau\rangle$. Пусть

$$Y = \mathrm{Soc}(X^*) = \mathrm{Soc}(Y^*) = S \times S,$$

$\sigma = (\iota, \iota) \in Y^*$ и $X = \langle Y, \tau, \sigma\rangle$. Пусть $\overline{} : X \to X/Y$ — естественный эпиморфизм. Заметим, что $[\tau, \sigma] = 1$, поэтому $\overline{X}$ — элементарная абелева группа порядка 4. Группа $\overline{X}$ является произведением нормальных подгрупп $\overline{A} = \langle\overline{\tau}\rangle$ и $\overline{B} = \langle\overline{\tau\sigma}\rangle$. Их полные прообразы A и B также нормальны в X и $X = AB$. Как показано в [21, теорема 1], $A, B \in \mathscr{E}_\pi$ и $X \notin \mathscr{E}_\pi$. Поскольку $|A : Y| = |B : Y| = 2 \in \pi$, имеем $A = HY$ и $B = KY$, где $H \in \mathrm{Hall}_\pi(A)$, $K \in \mathrm{Hall}_\pi(B)$. Из леммы 12 и утверждения (4) получаем $Y \in \mathscr{P}_\pi$. Теперь $A, B \in \mathscr{P}_\pi$ ввиду леммы 18 и $X = AB \in \mathrm{N}_0\mathscr{P}_\pi$, в то время как $X \notin \mathscr{E}_\pi$ и тем более $X \notin \mathscr{P}_\pi$.

Тем самым показано, что для выбранного множества π классы $\mathscr{P}_\pi$ и $\mathrm{N}_0\mathscr{P}_\pi$ различны.

(11) *Теорема* 1 *верна.*

Утверждение (A) теоремы 1 следует из утверждений (1), (3), (4) и (2), утверждение (B) — из утверждений (7), (6), (10) и (9), утверждение (B) — из утверждений (5) и (8) и лемм 3 и 5. □

7. Замечания и открытые вопросы

В свете результатов данной работы представляются естественными следующие открытые вопросы.

Проблема 1. *Верно ли, что если* $\mathrm{S}\mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$ *для некоторого множества* π *простых чисел, то* $\mathrm{S}\mathscr{E}_\pi = \mathscr{E}_\pi$ *и* $\mathrm{S}\mathscr{C}_\pi = \mathscr{C}_\pi$*?*

Проблема 2. *Верно ли, что если* $\mathrm{N}_0\mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$ *для некоторого множества* π *простых чисел, то* $\mathrm{N}_0\mathscr{E}_\pi = \mathscr{E}_\pi$*?*

Отметим, что получить утверждение (8) из доказательства теоремы 1 можно проще, основываясь на следующем критерии E-замкнутости класса $\mathscr{P}_\pi$.

Предложение 6. *Для любого множества* π *простых чисел* $\mathrm{E}\mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$ *тогда и только тогда, когда* $\mathscr{E}_\pi = \mathscr{C}_\pi$.

Доказательство. Допустим, что $\mathrm{E}\mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$ и $\mathscr{E}_\pi \neq \mathscr{C}_\pi$. Как и в доказательстве предложения 1, убеждаемся, что существует простая группа S такая, что $S \notin \mathscr{C}_\pi$. Рассмотрим группу $X = S \wr \mathbb{Z}_p$, где $p \notin \pi$. Пусть $Y = \underbrace{S \times \dots \times S}_{p\ \text{раз}}$ — база сплетения. Из леммы 12 и утверждения (4) в доказательстве теоремы 1 получаем $Y \in \mathscr{P}_\pi$. Далее, $X/Y \cong \mathbb{Z}_p \in \mathscr{P}_\pi$. Таким образом, $X \in \mathrm{E}\mathscr{P}_\pi$. Но $X \notin \mathscr{P}_\pi$ по лемме 19; противоречие. Значит, $\mathrm{E}\mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi \Rightarrow \mathscr{E}_\pi = \mathscr{C}_\pi$. Обратная импликация следует из включения $\mathscr{C}_\pi \subseteq \mathscr{P}_\pi \subseteq \mathscr{E}_\pi$ и леммы 5. □

Ввиду леммы 5 утверждение (8) в доказательстве теоремы 1 очевидно.

Мы оставили тем не менее доказательство утверждения (8) в том виде, как оно есть, по двум причинам. Во-первых, такое доказательство, на наш

[4)]В качестве π можно взять множество $\{2, 3\}$. Тогда группа $S = \mathrm{SL}_3(3) = \mathrm{GL}_3(2)$ обладает ровно двумя классами сопряженных π-холловых подгрупп, переставляемых некоторым внешним автоморфизмом ι порядка 2 (см. [3, пример 4.1]).

взгляд, подчеркивает определенную двойственность в поведении классов $\mathscr{E}_\pi$ и $\mathscr{C}_\pi$ относительно операций S_n и E. Эта двойственность особенно хорошо видна при сопоставлении лемм 3 и 5, предложений 4 и 5 и утверждений (5) и (8) в доказательстве теоремы 1. Во-вторых, наше доказательство основано на предложении 4, которое представляет интерес само по себе.

Отметим, что утверждение, обратное к утверждению (8) в доказательстве теоремы 1, неверно. В самом деле, пусть $\pi = \{2, 7\}$. В этом случае $\mathscr{E}_\pi \neq \mathscr{C}_\pi$, поскольку $G = {}^2G_2(27) \in \mathscr{E}_\pi \setminus \mathscr{C}_\pi$ (см. [22, лемма 5.1]). В частности, $\mathrm{E}\mathscr{P}_\pi \neq \mathscr{P}_\pi$ в силу предложения 6. Но из результатов работы [22] следует, что $\mathrm{E}\mathscr{E}_\pi = \mathscr{E}_\pi$ (более точно, в [22] доказано, что в случае $3 \notin \pi$ конечная группа G обладает свойством $\mathscr{E}_\pi$ тогда и только тогда, когда этим свойством обладают все композиционные факторы группы G).

В связи с этим хотелось бы понять справедливо ли обращение утверждения(5), двойственного к утверждению (8)?

Проблема 3. *Верно ли, что если* $\mathrm{S}_n\mathscr{C}_\pi = \mathscr{C}_\pi$ *для некоторого множества* π *простых чисел, то* $\mathrm{S}_n\mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$?

Двойственность в поведении классов $\mathscr{E}_\pi$ и $\mathscr{C}_\pi$ делает также естественной следующую проблему.

Проблема 4. *Верно ли, что для любого множества* π *простых чисел* $\mathrm{S}_n\mathscr{P}_\pi = \mathscr{P}_\pi$ *тогда и только тогда, когда* $\mathscr{E}_\pi = \mathscr{C}_\pi$?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 6, N 22. P. 286–304.

2. *Вдовин Е. П.* Картеровы подгруппы в конечных почти простых группах // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 2. С. 157–216.

3. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 5. С. 3–46.

4. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* О пронормальности холловых подгрупп // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 35–43.

5. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 527–542.

6. *Ревин Д. О.* Вокруг гипотезы Ф. Холла // Сиб. электрон. мат. изв. 2009. Т. 6. С. 366–380.

7. *Gross F.* Conjugacy of odd order Hall subgroups // Bull. London Math. Soc. 1987. V. 19, N 4. P. 311–319.

8. *Guo W.* The theory of classes of groups. Beijing; New York: Kluwer Acad. Publ., 2006.

9. *Doerk K., Hawks T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

10. *Revin D. O., Vdovin E. P.* Generalizations of the Sylow theorem // Groups (St. Andrews, 2009, Bath). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011. V. 2. P. 488–519. (London Math. Soc. Lect. Notes Ser.; V. 388).

11. *Чунихин С. А.* Подгруппы конечных групп. Минск: Наука и техника, 1964.

12. *Wielandt H.* Entwicklungslinien in der Strukturtheorie der endlichen Gruppen // Proc. Int. Congress Math. (Edinburgh, 1958). London: Cambridge Univ. Press, 1960. P. 268–278.

13. *Suzuki M.* Group theory. II. New York; Berlin; Heidelberg; Tokyo: Springer-Verl., 1986.

14. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

15. *The Kourovka notebook.* Unsolved problems in group theory. 17-th. ed. Novosibirsk: Russ. Acad. Sci. Sib. Div., Inst. Math., 2010.

16. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О., Шеметков Л. А.* Формации конечных C_π-групп // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 1. С. 40–52.

17. *Ревин Д. О., Вдовин Е. П.* Критерий сопряженности холловых подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 506–516.

18. *Revin D. O., Vdovin E. P.* An existence criterion for Hall subgroups of finite groups // J. Group Theory. 2011. V. 14, N 1. P. 93–101.

19. *Чунихин С. А.* О силовски правильных группах // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 5. С. 773–774.
20. *Чунихин С. А.* О существовании и сопряженности подгрупп конечной группы // Мат. сб. 1953. Т. 33, № 1. С. 111–132.
21. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Нерадикальность класса E_π-групп // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2013. Т. 20, № 1. С. 35–39.
22. *Revin D. O., Vdovin E. P.* Hall subgroups of finite groups // Contemp. Math. 2006. V. 402. P. 229–265.
23. *Gross F.* On the existence of Hall subgroups // J. Algebra. 1986. V. 98, N 1. P. 1–13.
24. *Guo W., Li B.* On the Shemetkov problem for Fitting classes // Beiträge Algebra Geom. 2007. V. 48, N 1. P. 281–289.
25. *Guo W.* Formations determined by Hall subgroups // J. Appl. Algebra Discrete Struct. 2006. V. 4, N 3. P. 139–147.
26. *Guo W.* Some problems and results for the research on Sylow objects of finite groups // J. Xuzhou Norm. Univ. Nat. Sci. Ed. 2005. V. 23, N 3. P. 1–6.
27. *Hartley B.* A theorem of Sylow type for a finite groups // Math. Z. 1971. Bd 122, Heft 4. P. 223–226.
28. *Revin D. O., Vdovin E. P.* On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups // J. Algebra. 2010. V. 324, N 12. P. 3614–3652.
29. *Вдовин Е. П., Манзаева Н. Ч., Ревин Д. О.* О наследуемости свойства D_π подгруппами // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 44–52.
30. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Холловы подгруппы нечетного порядка конечных групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 1. С. 15–56.
31. *Воробьев С. Н., Залесская Е. Н.* Об аналоге гипотезы Шеметкова для классов Фишера конечных групп // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 5. С. 989–999.
32. *Загурский В. Н., Воробьев Н. Т.* Классы Фиттинга с заданными свойствами подгрупп Холла // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 2. С. 234–240.
33. *Мазуров В. Д., Ревин Д. О.* О холловом D_π-свойстве для конечных групп // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 106–113.
34. *Ревин Д. О.* Свойство D_π в одном классе конечных групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 3. С. 335–370.
35. *Ревин Д. О.* Свойство D_π в конечных простых группах // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 364–394.
36. *И Сяолан, Шеметков Л. А.* Формация конечных групп со сверхразрешимой π-холловой подгруппой // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 2. С. 280–286.
37. *Чунихин С. А.* О силовских свойствах конечных групп // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73, № 1. С. 29–32.
38. *Шеметков Л. А.* Новая D-теорема в теории конечных групп // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160, № 2. С. 290–293.
39. *Шеметков Л. А.* Силовские свойства конечных групп // Мат. сб. 118. Т. 76. С. 271–287.
40. *Шеметков Л. А.* О силовских свойствах конечных групп // Докл. АН БССР. 1972. Т. 16, № 10. С. 881–883.
41. *Шеметков Л. А.* Два направления в развитии теории непростых конечных групп // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30, № 2. С. 179–198.
42. *Шеметков Л. А.* Обобщения теоремы Силова // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, №6. С. 1425–1431.

Статья поступила 17 августа 2013 г.

Го Веньбинь (Wenbin Guo)
University of Science and Technology of China, School of Mathematical Science,
Hefei, 230026, P. R. China
wguo@ustc.edu.cn

Ревин Данила Олегович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
revin@math.nsc.ru