Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2014. Том 55, № 3

УДК 517.5

ОЦЕНКИ ПРИБЛИЖЕНИЙ КЛАССОВ СВЕРТОК ЧЕРЕЗ ВТОРОЙ МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ

О. Л. Виноградов

Аннотация. Устанавливаются оценки наилучших приближений сверток с некоторыми ядрами целыми функциями конечной степени через второй модуль непрерывности. Частными случаями полученных оценок являются неравенства типа Джексона для производных четного порядка.

Ключевые слова: неравенства Джексона, второй модуль непрерывности, вполне монотонная функция.

§ 1. Введение

1.1. Обзор результатов. Далее $\lfloor x \rfloor$ — целая часть числа x, S_h — оператор Стеклова, т. е.

$$S_h f(x) = \frac{1}{h} \int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x-t)\, dt.$$

Многочлены Бернулли B_n и числа Бернулли $\mathscr{B}_n$ определяются равенствами

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n, \ |z| < 2\pi, \quad \mathscr{B}_n = B_n(0);$$

периодические ядра Бернулли d_n — равенствами $d_0(t) = -1$,

$$d_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{ikt}}{(ik)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда при $u \in (0, 2\pi)$

$$d_n(2\pi u) = -\frac{(2\pi)^n}{n!} B_n(u).$$

Известна [1, с. 73, 74, следствие 1] формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} h^{2k} \frac{B_{2k}(\frac{1}{2})}{(2k)!} S_h f^{(2k)}(x) + \frac{1}{h} \int\limits_{-h/2}^{h/2} f^{(m)}(x-t) \times \left(\frac{h}{2\pi}\right)^m \left\{ d_m\left(\frac{2\pi t}{h}\right) - d_m(\pi) \right\} dt. \quad (1)$$

Здесь $m \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f \in W_1^{(m)}\left[x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}\right]$ (определение соболевского класса см. в п. 1.2). Равенство (1) — частный случай разложения функции по многочленам Бернулли. Для нас будет удобнее смотреть на него как на разложение функции по разностям первого порядка ее последовательных производных начиная с первообразной. В теории приближений с помощью этой формулы удалось получить точное в равномерной метрике неравенство Джексона для первого модуля непрерывности производной нечетного порядка:

$$A_{\sigma-0}(f) \le \frac{\mathscr{K}_{2r+1}}{2\sigma^{2r+1}}\,\omega_1\left(f^{(2r+1)}, \frac{\pi}{\sigma}\right). \tag{2}$$

Здесь $\sigma > 0$, $A_{\sigma-0}$ — наилучшее приближение целыми функциями степени меньше σ,

$$\mathscr{K}_m = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(m+1)}}{(2\nu+1)^{m+1}}$$

— константы Фавара. Для периодических функций при $r = 0$ неравенство (2) установил В. В. Жук [2], при $r \in \mathbb{N}$ — А. А. Лигун [3] (см. [1, с. 198, следствие 4; 4, с. 271, теорема 6.2.7], для непериодических функций — А. Ю. Громов [5]. Трактуя функцию как свертку ее производной с ядром Бернулли, О. Л. Виноградов [6] обобщил формулу (1) на функции, представимые в виде свертки с некоторыми ядрами. В ряде случаев это позволило получить точные оценки наилучших приближений классов сверток через первый модуль непрерывности. В работе [7] О. Л. Виноградов и В. В. Жук получили аналог формулы (1) для разностей второго порядка:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r} h^{2k}(1-2k)\frac{\mathscr{B}_{2k}}{(2k)!}S_h^2 f^{(2k)}(x) + \frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h} f^{(2r)}(x-t)$$

$$\times\left\{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2r} d_{2r}\left(\frac{2\pi t}{h}\right)(h-|t|) + 2r\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2r+1} d_{2r+1}\left(\frac{2\pi t}{h}\right)\operatorname{sign} t\right\}dt. \tag{3}$$

Здесь $r \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f \in W_1^{(2r)}[x-h, x+h]$. Затем в той же работе с помощью формулы (3) авторы вывели оценки полуаддитивных функционалов через второй модуль непрерывности производных четного порядка. Полученные этим способом оценки наилучших приближений содержат меньшие постоянные, чем ранее известные.

В § 2 настоящей работы формула (3) обобщается на свертки с некоторыми ядрами. В § 3 с помощью этого обобщения устанавливаются оценки наилучших приближений сверток через второй модуль непрерывности. Затем оценки наилучших приближений из [7] выводятся как частные случаи полученных результатов.

1.2. Обозначения. Символами $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ обозначаются множества вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел соответственно, $[a:b] = [a,b] \cap \mathbb{Z}$. Рассматриваются следующие пространства функций: $UCB(\mathbb{R})$ — пространство равномерно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций, C — пространство 2π-периодических непрерывных функций с равномерными нормами $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$. Если $p \in [1, +\infty)$, то $L_p(E)$ и L_p — пространства измеримых, суммируемых с p-й степенью (на множестве E или на $E = [-\pi, \pi]$, 2π-периодических) функций f с нормами $\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\right)^{1/p}$, $L(E) = L_1(E)$, $L = L_1$, $L_\infty(E)$ — пространство измеримых существенно ограниченных на E функций f с нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in E}|f(x)|,$$

$\widetilde{L}_\infty$ — подпространство 2π-периодических функций из $L_\infty(\mathbb{R})$. Далее, $C(E)$ и $C^{(s)}(E)$ — множества непрерывных и s раз непрерывно дифференцируемых на множестве E функций, $W_p^{(s)}(E)$ — множество функций f из $L_p(E)$ таких, что $f^{(s-1)}$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(s)} \in L_p(E)$. Если из контекста не следует противное, то пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными.

Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство пространства $L_p(\mathbb{R})$ при $p \in [1, +\infty)$ или пространства $UCB(\mathbb{R})$ при $p = +\infty$, P — полунорма, заданная на $\mathfrak{M}$, и выполняются следующие условия.

1. Пространство $(\mathfrak{M}, P)$ инвариантно относительно сдвига, т. е. для любых $f \in \mathfrak{M}$ и $h \in \mathbb{R}$ будет $f(\cdot + h) \in \mathfrak{M}$ и $P(f(\cdot + h)) = P(f)$.

2. Существует такая постоянная B, что $P(f) \le B\|f\|_p$ для всех $f \in \mathfrak{M}$.

Тогда будем говорить, что пространство $(\mathfrak{M}, P)$ *принадлежит классу* $\mathscr{B}$. Примерами пространств класса $\mathscr{B}$ являются: $(UCB(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $(L_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ при $p \in [1, +\infty)$, пространства периодических функций $\big(\widetilde{C}, \|\cdot\|_p\big)$ при $p \in [1, +\infty]$, а также более общие пространства равномерно непрерывных почти-периодических функций, показатели которых принадлежат фиксированному множеству, с различными нормами. Через $\mathfrak{M}^{(s)}$ обозначим множество функций из $\mathfrak{M}$ таких, что $f^{(s-1)}$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(s)} \in \mathfrak{M}$.

Центральные разности и модули непрерывности порядка $m \in \mathbb{Z}_+$ определяются равенствами

$$\delta_t^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k f\left(x + \frac{mt}{2} - kt\right), \quad \omega_m(f, h)_P = \sup_{0 \le t \le h} P\big(\delta_t^m f\big).$$

Далее, $\mathbf{E}_\sigma$ и $\mathbf{E}_{\sigma-0}$ — множества целых функций степени не больше (меньше) $\sigma > 0$; наилучшее приближение функции f по полунорме P определяется равенством

$$A_\sigma(f)_P = \inf_{\substack{g \in \mathbf{E}_\sigma, \\ f - g \in \mathfrak{M}}} P(f - g)$$

($\inf \varnothing = +\infty$), аналогично определяется величина $A_{\sigma-0}(f)_P$. Индекс p у величины означает, что $P(f) = \|f\|_p$. Функции доопределяются в точке устранимого разрыва по непрерывности, в других случаях полагаем $\frac{0}{0} = 0$. Далее,

$$c(f, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt, \quad a(f, y) = c(f, y) + c(f, -y)$$

— комплексное преобразование и косинус-преобразование Фурье функции $f \in L(\mathbb{R})$. Для четной функции f выполнено равенство $a(f) = 2c(f)$. Свертка двух функций f и g определяется равенством

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t) g(t)\, dt,$$

при такой нормировке $c(f * g) = c(f)c(g)$. По определению полагаем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-N}^{N} a_k.$$

1.3. Ядра с вполне монотонным преобразованием Фурье. Сформулируем необходимые далее результаты из [6], ограничившись четными ядрами, и докажем еще одну лемму.

Пусть $y_0 > 0$. Обозначим через $CM_e^2(y_0)$ (от слов «completely monotone, even» — вполне монотонные, четные) множество четных функций c, заданных по крайней мере на $\mathbb{R} \setminus (-y_0, y_0)$ и таких, что при всех $y \geq y_0$

$$c(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2 u}\, d\Phi(u), \tag{4}$$

где Φ — возрастающая на $(0, +\infty)$ функция. Функции $y \mapsto e^{-\lambda y^2}$, $y \mapsto e^{-\lambda |y|}$, $y \mapsto |y|^{-\lambda}$ ($\lambda > 0$) принадлежат $CM_e^2(y_0)$ при всех $y_0 > 0$.

Через $\widehat{CM}_e^2(y_0)$ обозначим множество четных функций из $L(\mathbb{R})$, преобразование Фурье которых принадлежит $CM_e^2(y_0)$.

Пусть ядро G четно, $G \in L(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $G(t) = O(t^{-2})$ при $t \to \infty$. Положим [8, п. 87, с. 199–203]

$$\mathscr{L}_\sigma(G, z) = \frac{\cos \sigma z}{\sigma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{G\left(\frac{(2k+1)\pi}{2\sigma}\right)}{z - \frac{(2k+1)\pi}{2\sigma}}. \tag{5}$$

Тогда $\mathscr{L}_\sigma(G)$ — четная функция из $\mathbf{E}_\sigma \cap L(\mathbb{R})$, интерполирующая функцию G в точках $\frac{(2k+1)\pi}{2\sigma}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Обозначим

$$\mathscr{K}_{\sigma,G} = \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t) \operatorname{sign} \cos \sigma t\, dt \right| = \left| \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} a(G, (2\nu+1)\sigma) \right|.$$

Лемма А [6, лемма 7]. *Пусть $y_0 > 0$, $G \in \widehat{CM}_e^2(y_0)$, $c(G) \in C^{(2)}(\mathbb{R})$, $\sigma \geq y_0$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi} A_\sigma(G)_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G - \mathscr{L}_\sigma(G)| = \mathscr{K}_{\sigma,G}.$$

При этом подмодульные выражения в определении константы $\mathscr{K}_{\sigma,G}$ неотрицательны.

В связи с историей вопроса см. [8, 6].

Лемма 1. *Пусть $y_0 > 0$, функция c при $y \geq y_0$ выражается формулой* (4). *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$c \in C^{(\infty)}(y_0, +\infty)$, $c' \in L(y_0, +\infty)$, $c^{(r)} \in L[y_1, +\infty)$ при всех $r \geq 2$, $y_1 > y_0$;*

(2) *функция c убывает к нулю, а при всех $r \in \mathbb{N}$ функция $c^{(r)}$ представляется в виде разности двух возрастающих на $(y_0, +\infty)$ стремящихся к нулю функций.*

Первое утверждение для $r = 1, 2$ доказано в [6].

Доказательство. (1) Из конечности интеграла $c(y_0)$ следует, что функция c бесконечно дифференцируема на $(y_0, +\infty)$ и

$$c^{(r)}(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d^r}{dy^r} e^{-y^2 u}\, d\Phi(u), \quad y \geq y_0.$$

По индукции получаем, что

$$\frac{d^r}{dy^r}e^{-y^2u} = Q(y,u)e^{-y^2u},$$

где $Q(y,u)$ — линейная комбинация одночленов вида $y^k u^l$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \mathbb{N}$, $k \le l$. Взяв $y_2 \in (y_0, y_1)$, при $y \ge y_1$ будем иметь $y^2 - y_2^2 \ge \varepsilon y^2$, где $\varepsilon = 1 - \frac{y_2^2}{y_1^2} \in (0,1)$. Интегрирование по y дает

$$\int\limits_{y_1}^{+\infty} y^k u^l e^{-y^2u}\,dy \le e^{-y_2^2u}\int\limits_0^{+\infty} y^k u^l e^{-y^2\varepsilon u}\,dy = \frac{\Gamma\bigl(\frac{k+1}{2}\bigr)}{2\varepsilon^{\frac{k+1}{2}}}u^{l-\frac{k+1}{2}}e^{-y_2^2u}.$$

Поскольку $l - \frac{k+1}{2} \ge 0$, а $y_2 > y_0$, правая часть суммируема по функции Φ на $(0,+\infty)$.

(2) Из суммируемости $c^{(r+1)}$ и формулы Ньютона — Лейбница

$$c^{(r)}(y) = c^{(r)}(y_1) + \int\limits_{y_1}^{y} c^{(r+1)}$$

следует существование предела $c^{(r)}$ на бесконечности, а из суммируемости $c^{(r)}$ — равенство этого предела нулю. При $t > y_0$ положим $g^{\pm}(t) = -\int\limits_t^{+\infty}(c^{(r+1)})_{\pm}$, где $x_+ = \max\{x,0\}$, $x_- = x_+ - x$. Тогда функции $g^{\pm}$ возрастают, стремятся к нулю на бесконечности и

$$g^+(t) - g^-(t) = -\int\limits_t^{+\infty} c^{(r+1)} = c^{(r)}(t).$$

Убывание самой функции c очевидно. $\square$

§ 2. Разложение свертки

2.1. Эвристический вывод разложения. Пусть $y_0 > 0$, $G \in L(\mathbb{R})$, $0 < h < \frac{2\pi}{y_0}$. Будем искать представление «достаточно хорошего» ядра G в виде

$$G = K + \delta_h^2 H + M, \tag{6}$$

где функции K, H, M суммируемы на $\mathbb{R}$, четны, $\operatorname{supp} K \subset [-h,h]$, $\int\limits_0^h K = 0$, $M \in \mathbf{E}_{y_0}$. Сначала дадим эвристический вывод равенства (6) и формул для участвующих в этом представлении функций. Сформулировав гипотезу, можно уточнить условия на ядро G и перейти к доказательству.

Подберем четную функцию $M \in \mathbf{E}_{y_0} \cap L(\mathbb{R})$ так, что $c(M) \in C^{(2)}(\mathbb{R})$, $c(M,0) = c(G,0)$. Функция $c(G-M-K,y) = \bigl(2i\sin\frac{hy}{2}\bigr)^2 c(H,y)$ имеет нули не менее второй кратности в точках $y = 2\pi l/h$ ($l \in \mathbb{Z}$). Поэтому при всех $l \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$c\biggl(K,\frac{2\pi l}{h}\biggr) = c\biggl(G,\frac{2\pi l}{h}\biggr), \quad c'\biggl(K,\frac{2\pi l}{h}\biggr) = c'\biggl(G,\frac{2\pi l}{h}\biggr).$$

Кроме того, $c'(K,0)=0$ в силу четности K, а $c(K,0)=0$ по условию. Поскольку $\operatorname{supp} K \subset [-h,h]$, по теореме Пэли — Винера $c(K)\in \mathbf{E}_h$. Запишем для функции $c(K)$ интерполяционную формулу

$$c(K,y)=\sum_{l\in\mathbb{Z}} c\left(K,\frac{2\pi l}{h}\right)\frac{\sin^2\frac{hy}{2}}{\left(\frac{hy}{2}-\pi l\right)^2}+\frac{2}{h}\sum_{l\in\mathbb{Z}} c'\left(K,\frac{2\pi l}{h}\right)\frac{\sin^2\frac{hy}{2}}{\frac{hy}{2}-\pi l}.$$

При построении интерполяционной формулы используем следующие факты. Функция $\ell_0(y)=\frac{\sin^2\frac{hy}{2}}{(hy/2)^2}$ принадлежит $\mathbf{E}_h$ и имеет нули второй кратности в точках $y=\frac{2\pi l}{h}$ $(l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$, $\ell_0(0)=1$, $\ell_0'(0)=0$. Функция $\ell_1(y)=y\ell_0(y)$ принадлежит $\mathbf{E}_h$ и имеет нули второй кратности в точках $y=\frac{2\pi l}{h}$ $(l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$, $\ell_1(0)=0$, $\ell_1'(0)=1$. Подставляя значения функции $c(K)$ и ее производной, находим

$$c(K,y)=\sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} c\left(G,\frac{2\pi l}{h}\right)\frac{\sin^2\frac{hy}{2}}{(hy/2-\pi l)^2}+\frac{2}{h}\sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} c'\left(G,\frac{2\pi l}{h}\right)\frac{\sin^2\frac{hy}{2}}{hy/2-\pi l}.$$

Чтобы найти K, проинтегрируем ряды формально и воспользуемся при $|t|\le h$ равенствами

$$\frac{2}{h}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2\frac{hy}{2}}{hy/2-\pi l}e^{ity}\,dy=e^{i\frac{2\pi l}{h}t}\frac{2}{h}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2\frac{hy}{2}}{hy/2}e^{ity}\,dy=e^{i\frac{2\pi l}{h}t}\frac{2i\pi}{h^2}\operatorname{sign} t,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2\frac{hy}{2}}{(hy/2-\pi l)^2}e^{ity}\,dy=e^{i\frac{2\pi l}{h}t}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2\frac{hy}{2}}{(hy/2)^2}e^{ity}\,dy=e^{i\frac{2\pi l}{h}t}\frac{2\pi}{h^2}(h-|t|).$$

Получим

$$K(t)=\sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} c\left(G,\frac{2\pi l}{h}\right)e^{i\frac{2\pi l}{h}t}\frac{2\pi}{h^2}(h-|t|)+\frac{2i\pi}{h^2}\sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} c'\left(G,\frac{2\pi l}{h}\right)e^{i\frac{2\pi l}{h}t}(\operatorname{sign} t).$$

При $|y|\ge y_0$ будет $c(M,y)=0$, поэтому

$$\begin{aligned}c(H,y)&=\frac{c(G,y)-c(K,y)}{\left(2i\sin\frac{hy}{2}\right)^2}\\&=\sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{c\left(G,\frac{2\pi l}{h}\right)-c(G,y)}{4\left(\frac{hy}{2}-\pi l\right)^2}+\frac{1}{2h}\sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{c'\left(G,\frac{2\pi l}{h}\right)}{\frac{hy}{2}-\pi l}-\frac{c(G,y)}{(hy)^2}.\end{aligned}\qquad(7)$$

Здесь использовано разложение

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(a-\pi l)^2}=\frac{1}{\sin^2 a}.$$

2.2. Вспомогательные утверждения. Прежде чем формулировать основной результат о разложении (6), докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 2. *Пусть*

$$R(u)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1+2k^2u)e^{-k^2u}.$$

Тогда $R(u) > 0$ при всех $u > 0$.

Доказательство. При $u \ge \frac{1}{2}$ неравенство очевидно, поэтому остается доказать его при $u \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Применим формулу суммирования Пуассона [9, формула (2.8.1)]

$$\sqrt{\alpha}\left(\frac{f(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f(k\alpha)\right) = \sqrt{\beta}\left(\frac{F(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} F(k\beta)\right),$$

где

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(t)\cos zt\, dt, \quad \alpha\beta = 2\pi.$$

Возьмем $f(t) = (2t^2 - 1)e^{-t^2}$, $\alpha = \sqrt{u}$. Тогда $F(z) = -\frac{z^2}{2\sqrt{2}}e^{-z^2/4}$, $\beta = \frac{2\pi}{\sqrt{u}}$ и формула принимает вид

$$\sqrt[4]{u}\left(-\frac{1}{2} + R(u)\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt[4]{u}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^2}{u}k^2 e^{-\frac{k^2\pi^2}{u}}\right),$$

что равносильно равенству

$$R(u) = \frac{1}{2} - \frac{(2\pi)^{5/2}}{(2u)^{3/2}}\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\frac{k^2\pi^2}{u}}.$$

Обозначим $v = \frac{\pi^2}{u}$; тогда $v > 2\pi^2$, а

$$R(u) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}v^{3/2}\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k^2 v}.$$

Пользуясь элементарным неравенством $x^2 e^{-x} \le 4e^{-2}$, верным при всех $x \ge 0$, получаем, что

$$R(u) > \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}v^{3/2}\frac{4}{e^2 v^2}\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2} - \frac{4\pi^{3/2}}{3e^2 v^{1/2}} > \frac{1}{2} - \frac{4\sqrt{\pi}}{3e^2\sqrt{2}} > 0. \quad \square$$

Лемма 3. *Пусть $y_0 > 0$, $\xi \in CM_e^2(y_0)$, $0 < h < \frac{2\pi}{y_0}$,*

$$\eta(y) = \sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{\xi(2\pi l/h) - \xi(y)}{4\big(hy/2 - \pi l\big)^2} + \frac{1}{2h}\sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{\xi'(2\pi l/h)}{hy/2 - \pi l} - \frac{\xi(y)}{(hy)^2}, \quad |y| \ge y_0.$$

Тогда $-\eta \in CM_e^2(y_0)$.

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$, $\xi(y) = \xi_\lambda(y) = e^{-y^2\lambda}$ при $y \ge y_0$, соответствующую функцию η обозначим через η_λ. Тогда $\xi_\lambda'(y) = -2\lambda y e^{-y^2\lambda}$,

$$-\eta_\lambda(y) = \sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{e^{-y^2\lambda} - e^{-(\frac{2\pi l}{h})^2\lambda}}{4\big(\frac{hy}{2} - \pi l\big)^2} + \frac{1}{2h}\sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{2\lambda\frac{2\pi l}{h}e^{-(\frac{2\pi l}{h})^2\lambda}}{\frac{hy}{2} - \pi l} + \frac{e^{-y^2\lambda}}{h^2y^2}.$$

Группируя слагаемые с противоположными номерами и объединяя суммы, получаем

$$\begin{aligned} -\eta_\lambda(y) &= \frac{2}{h^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{y^2 + \big(\frac{2\pi l}{h}\big)^2}{\big(y^2 - \big(\frac{2\pi l}{h}\big)^2\big)^2}\big(e^{-y^2\lambda} - e^{-(\frac{2\pi l}{h})^2\lambda}\big) \\ &\quad + \frac{2}{h^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2\lambda\big(\frac{2\pi l}{h}\big)^2 e^{-(\frac{2\pi l}{h})^2\lambda}}{y^2 - \big(\frac{2\pi l}{h}\big)^2} + \frac{e^{-y^2\lambda}}{h^2y^2} = \frac{e^{-y^2\lambda}}{h^2y^2} \\ &\quad + \frac{2}{h^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\big(y^2 + \big(\frac{2\pi l}{h}\big)^2\big)\big(e^{-y^2\lambda} - e^{-(\frac{2\pi l}{h})^2\lambda}\big) + 2\lambda\big(\frac{2\pi l}{h}\big)^2\big(y^2 - \big(\frac{2\pi l}{h}\big)^2\big)e^{-(\frac{2\pi l}{h})^2\lambda}}{\big(y^2 - \big(\frac{2\pi l}{h}\big)^2\big)^2}. \end{aligned}$$

Начальное слагаемое записывается в виде

$$\frac{e^{-y^2\lambda}}{h^2y^2} = \frac{1}{h^2}\int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-y^2u}\,du.$$

Чтобы преобразовать сумму, обозначим для краткости $g(z) = e^{-z\lambda}$, $p = y^2$, $q = \left(\frac{2\pi l}{h}\right)^2$. Тогда l-е слагаемое в сумме записывается в виде

$$A_l = \frac{(p+q)(g(p)-g(q)) - 2q(p-q)g'(q)}{(p-q)^2}$$
$$= \frac{g(p)-g(q)}{p-q} + 2q\frac{g(p)-g(q)-(p-q)g'(q)}{(p-q)^2}.$$

Записывая остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме, получаем

$$A_l = \frac{1}{p-q}\int\limits_q^p g'(z)\,dz + \frac{2q}{(p-q)^2}\int\limits_q^p g''(z)(p-z)\,dz.$$

Делая замену переменной $z = q + \theta(p-q)$, находим

$$A_l = \int\limits_0^1 g'(q+\theta(p-q))\,d\theta + 2q\int\limits_0^1 g''(q+\theta(p-q))(1-\theta)\,d\theta.$$

Для функции $g(z) = e^{-z\lambda}$ производные равны

$$g'(z) = -\lambda e^{-z\lambda}, \quad g''(z) = \lambda^2 e^{-z\lambda}.$$

Сделаем еще замену переменной $\theta = \frac{u}{\lambda}$ и вернемся к исходным обозначениям. Получим

$$A_l = \int\limits_0^\lambda e^{-pu}e^{-q(\lambda-u)}(-1+2q(\lambda-u))\,du$$
$$= \int\limits_0^\lambda e^{-y^2u}e^{-(\frac{2\pi l}{h})^2(\lambda-u)}\left(-1+2\left(\frac{2\pi l}{h}\right)^2(\lambda-u)\right)du.$$

Из формулы суммирования Пуассона следует, что

$$\sum_{l=1}^\infty e^{-l^2t} = O(t^{-1/2}), \quad \sum_{l=1}^\infty 2l^2te^{-l^2t} = O(t^{-1/2}), \quad t\to 0+. \tag{8}$$

Отсюда интегралы

$$\int\limits_0^\lambda e^{-y^2u}\sum_{l=1}^\infty e^{-(\frac{2\pi l}{h})^2(\lambda-u)}\,du, \ \int\limits_0^\lambda e^{-y^2u}\sum_{l=1}^\infty e^{-(\frac{2\pi l}{h})^2(\lambda-u)}2\left(\frac{2\pi l}{h}\right)^2(\lambda-u)\,du$$

конечны. Следовательно, можно поменять порядок операций суммирования по l и интегрирования по u:

$$-\eta_\lambda(y) = \frac{1}{h^2}\int\limits_\lambda^{+\infty} e^{-y^2u}\,du + \frac{2}{h^2}\int\limits_0^\lambda e^{-y^2u}R_h(\lambda-u)\,du, \tag{9}$$

где

$$R_h(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \left(-1 + 2\left(\frac{2\pi l}{h}\right)^2 z \right) e^{-(\frac{2\pi l}{h})^2 z}.$$

По лемме 2 функция R_h положительна, откуда $-\eta_\lambda \in CM^2(y_0)$.

Для доказательства леммы в полной общности, т. е. для функции $\xi(y) = \int\limits_0^{+\infty} \xi_\lambda(y)\, d\Phi(\lambda)$, надо проинтегрировать равенство (9) по функции Φ.

Обоснуем почленное интегрирование левой части, т. е. докажем равенство

$$\eta(y) = \int\limits_0^{+\infty} \eta_\lambda(y)\, d\Phi(\lambda), \quad |y| \ge y_0,$$

и попутно установим сходимость рядов в определении $\eta(y)$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\frac{hy}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$; иначе надо выделить по одному слагаемому в суммах. Законность почленного интегрирования первой суммы очевидна. По первому из соотношений (8) и неравенствам $\frac{2\pi}{h} > y_0$, $\int\limits_0^{+\infty} e^{-y_0^2\lambda}\, d\Phi(\lambda) < +\infty$ получаем

$$\frac{1}{h^2} \int\limits_0^{+\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left| \frac{2\pi l}{\frac{hy}{2} - \pi l} \right| \lambda e^{-(\frac{2\pi l}{h})^2 \lambda}\, d\Phi(\lambda) < +\infty,$$

что обеспечивает законность почленного интегрирования второй суммы.

Интегрируя правую часть равенства (9) по функции Φ и меняя порядок интегрирования по теореме Тонелли, приводим интеграл к виду $\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2 u}\Psi(u)\, du$, где функция Ψ неотрицательна. $\square$

2.3. Основное тождество. Теперь сформулируем и докажем лемму о разложении (6).

Лемма 4. *Пусть* $y_0 > 0$, $G \in \widehat{CM}_e^2(y_0)$, $c(G) \in C^{(2)}(\mathbb{R} \setminus (-y_0, y_0))$, $0 < h < \frac{2\pi}{y_0}$. *Тогда функция* G *представляется в виде*

$$G = K + \delta_h^2 H + M,$$

где функции K, H, M *суммируемы на* $\mathbb{R}$, *четны*, $\operatorname{supp} K \subset [-h, h]$, $\int\limits_0^h K = 0$, $M \in \mathbf{E}_{y_0}$, $-H \in \widehat{CM}_e^2(y_0)$, $c(H) \in C^{(2)}(\mathbb{R})$.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $c(G) \in C^{(2)}(\mathbb{R})$. В противном случае возьмем четную функцию $g \in C^{(2)}(\mathbb{R})$, совпадающую с $c(G)$ на $\mathbb{R} \setminus (-y_0, y_0)$. Поскольку функция $g - c(G)$ дважды гладкая и финитная, она является преобразованием Фурье суммируемой функции, а тогда и функция g обладает этим свойством: $g = c(G_1)$, $G_1 \in L(\mathbb{R})$. Положим $M_1 = G - G_1$. Тогда $\operatorname{supp} c(M_1) \subset [-y_0, y_0]$, откуда $M_1 \in \mathbf{E}_{y_0}$, и далее можно рассматривать G_1 вместо G.

Положим при $|t| \le h$

$$K(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} c\left(G, \frac{2\pi l}{h}\right) e^{i\frac{2\pi l}{h}t} \frac{2\pi}{h^2}(h - |t|) + \frac{2i\pi}{h^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} c'\left(G, \frac{2\pi l}{h}\right) e^{i\frac{2\pi l}{h}t} (\operatorname{sign} t) \tag{10}$$

и продолжим функцию K нулем на $\mathbb{R} \setminus [-h, h]$. По утверждению (2) леммы 1 ряды сходятся при каждом t, за исключением, быть может, точек 0, $\pm h$.

Докажем, что $K \in L(\mathbb{R})$. Как известно (см., например, [10, с. 161]), тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются значениями в равноотстоящих точках преобразования Фурье суммируемой на оси функции, есть ряд Фурье суммируемой периодической функции. Это утверждение сразу применимо к первой сумме. Чтобы обосновать его применение ко второй сумме, заметим, что $c(G) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R} \setminus [-y_0, y_0])$, а $\frac{2\pi}{h} > y_0$. Возьмем $y_1 \in \bigl(y_0, \frac{2\pi}{h}\bigr)$. Существует функция $d \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, совпадающая с $c(G)$ на $\mathbb{R} \setminus [-y_1, y_1]$ и являющаяся преобразованием Фурье суммируемой функции D. По лемме 1 все производные функции d начиная с первой суммируемы на $\mathbb{R}$. Следовательно, D убывает быстрее любой степени, откуда функция $D_1(t) = -itD(t)$ суммируема и $d' = c(D_1)$. Осталось учесть, что в точках $\frac{2\pi l}{h}$ $(l \in \mathbb{N})$ значения d' и $c'(G)$ совпадают. Следовательно, $K \in L(\mathbb{R})$.

Умножая ряды Фурье на e^{-iyt} и интегрируя по t по отрезку $[-h, h]$ почленно, получаем

$$c(K, y) = \sum_{l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c\left(G, \frac{2\pi l}{h}\right) \frac{\sin^2 \frac{hy}{2}}{\bigl(\frac{hy}{2} - \pi l\bigr)^2} + \frac{2}{h} \sum_{l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c'\left(G, \frac{2\pi l}{h}\right) \frac{\sin^2 \frac{hy}{2}}{\frac{hy}{2} - \pi l}.$$

Поскольку $\operatorname{supp} K \subset [-h, h]$, верно включение $c(K) \in \mathbf{E}_h$.

Обозначим

$$\eta(y) = \frac{c(G, y) - c(K, y)}{\bigl(2i \sin \frac{hy}{2}\bigr)^2}, \quad |y| \geq y_0.$$

Тогда $-\eta \in CM_e^2(y_0) \cap C^{(2)}(\mathbb{R} \setminus (-y_0, y_0))$. Возьмем четную функцию $\psi \in C^{(2)}(\mathbb{R})$ такую, что $\psi(y) = \eta(y)$ при $|y| \geq y_0$. Функция

$$y \mapsto c(G, y) - c(K, y) - \left(2i \sin \frac{hy}{2}\right)^2 \psi(y)$$

принадлежит $C^{(2)}(\mathbb{R})$, и ее носитель содержится в отрезке $[-y_0, y_0]$. Следовательно, она является преобразованием Фурье некоторой функции $M \in \mathbf{E}_{y_0} \cap L(\mathbb{R})$.

Положим

$$H(t) = \int_{\to -\infty}^{\to +\infty} \psi(y) e^{ity}\, dy.$$

Из монотонного стремления ψ к нулю следует, что при всех t, за исключением, быть может, точки 0, интеграл сходится и $H \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. По построению выполняется равенство (6). По первому утверждению леммы 1 функции ψ' и ψ'' суммируемы. Дважды интегрируя по частям, находим, что $H(t) = O(t^{-2})$ при $t \to \infty$. Из равенства (6) и суммируемости G, K и M следует, что функция $\delta_h^2 H$ тоже суммируема на $\mathbb{R}$. Поскольку $H \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, отсюда следует суммируемость H. $\square$

Далее зависимость функций K, H и M от числа h и ядра G обозначать не будем.

§ 3. Оценки приближений через второй модуль непрерывности

3.1. Основная теорема. Пусть $y_0 > 0$, $\sigma \geq y_0$, $G \in \widehat{CM}_e^2(y_0)$, $c(G) \in C^{(2)}(\mathbb{R} \setminus (-y_0, y_0))$, $0 < h < \frac{2\pi}{y_0}$, функции f и φ связаны равенством

$$f = T + \varphi * G, \tag{11}$$

где $T \in \mathbf{E}_\sigma$. Тогда

$$\varphi * G = \varphi * K + \delta_h^2 \varphi * H + \varphi * M, \tag{12}$$

где функции K, H и M построены в лемме 4. Положим

$$\mathscr{Y}_{\sigma,h,G} f = T + \varphi * M + \delta_h^2 \varphi * \mathscr{L}_\sigma(H),$$

где оператор $\mathscr{L}_\sigma$ определен формулой (5). Ясно, что $\mathscr{Y}_{\sigma,h,G} f \in \mathbf{E}_\sigma$.

Напомним еще, что константа $\mathscr{K}_{\sigma,H}$ определена в п. 1.3.

Теорема 1. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathscr{B}$, $y_0 > 0$, $\sigma \geq y_0$, $G \in \widehat{CM}_e^2(y_0)$, $c(G) \in C^{(2)}(\mathbb{R} \setminus (-y_0, y_0))$, $0 < h < \frac{2\pi}{y_0}$, $\varphi \in \mathfrak{M}$, *функции* K *и* H *построены в лемме* 4, *функции* f *и* φ *связаны равенством* (11). *Тогда*

$$P(f - \mathscr{Y}_{\sigma,h,G} f) \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^h |K| + \mathscr{K}_{\sigma,H} \right) \omega_2(\varphi, h)_P.$$

Если в равенстве (11) $T \in \mathbf{E}_{\sigma-0}$, *то*

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^h |K| + \mathscr{K}_{\sigma,H} \right) \omega_2(\varphi, h)_P.$$

Доказательство. По определению оператора $\mathscr{Y}_{\sigma,h,G}$

$$f - \mathscr{Y}_{\sigma,h,G} f = \varphi * K + \delta_h^2 \varphi * (H - \mathscr{L}_\sigma(H)).$$

Второе слагаемое оценивается по лемме A с учетом леммы 4. Первое слагаемое оценивалось в [7, лемма 2] следующим образом. Запишем

$$\varphi * K = \frac{1}{2\pi} \int_0^h \delta_t^2 \varphi \, K(t) \, dt,$$

откуда

$$P(\varphi * K) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^h |K| \cdot \omega_2(\varphi, h)_P.$$

Переход к наилучшему приближению осуществляется стандартно [6, лемма 5]. □

Замечание 1. Слагаемое $\mathscr{K}_{\sigma,H}$ в правой части явно выражается через преобразование Фурье ядра H и, следовательно, исходного ядра G:

$$\mathscr{K}_{\sigma,H} = -\frac{2}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} a(H, (2s+1)\sigma).$$

Для точного вычисления интеграла $\int_0^h |K|$ требуется знать точки перемены знака функции K. Ясно, что функция K меняет знак, поскольку $\int_0^h K = 0$, однако сказать больше в общем случае затруднительно.

Замечание 2. Пусть $T = 0$. Если функция φ имеет период $\frac{2\pi}{\rho}$ $(\rho > 0)$, то $\mathscr{Y}_{\sigma,h,G} f$ — тригонометрический многочлен степени, меньшей, чем $\frac{\sigma}{\rho}$. В частности, если $\rho \geq \sigma$, то $\mathscr{Y}_{\sigma,h,G} f$ — постоянная. Если же функция φ является почти-периодической, то $\mathscr{Y}_{\sigma,h,G} f$ тоже почти-периодическая функция, показатели которой принадлежат функции φ.

Если $T = 0$ их $\varphi \perp \mathbf{E}_\sigma$, то $\mathscr{Y}_{\sigma,h,G} f = 0$. Поэтому для данного класса функций левые части неравенств теоремы 1 можно заменить на $P(f)$.

Замечание 3. Справедлива более тонкая оценка, в которой модуль непрерывности берется относительно полунормы $A_{\sigma-0}(\cdot)_P$. Аналогичное утверждение выполняется, когда в обеих частях участвует полунорма $A_\sigma(\cdot)_P$. Для доказательства надо применить теорему к полунормам $A_{\sigma-0}(\cdot)_P$ и $A_\sigma(\cdot)_P$.

Замечание 4. Неравенства теоремы 1 и замечания 3 стандартным образом (например, с помощью приближения функции φ ее интегралом Фейера) переносятся с множеств непрерывных функций на множества $L_\infty(\mathbb{R})$ и L_p при $p \in [1, +\infty]$ с полунормами $\|\cdot\|_p$, $\omega_m(\cdot, h)_p$, $A_\sigma(\cdot)_p$, $A_{\sigma-0}(\cdot)_p$.

3.2. Оценки приближений дифференцируемых функций. Конкретизируем теорему 1 для дифференцируемых функций. Как известно [8, пп. 101, 102], всякая функция $f \in W_p^{(s)}(\mathbb{R})$ при любом $y_0 > 0$ представляется в виде

$$f = T + f^{(s)} * G_s, \tag{13}$$

где $T \in \mathbf{E}_{y_0}$, $G_s \in L(\mathbb{R})$, четность G_s совпадает с четностью s, $c(G_s, y) = (iy)^{-s}$ при $|y| \geq y_0$, $c(G_s) \in C^{(2)}(\mathbb{R})$. Мы рассматриваем случай четного $s = 2r$.

Получим разложение (12) свертки с ядром G_{2r} и убедимся в том, что из этого разложения следует равенство (3). Участвующие в равенстве (12) функции K и H будем обозначать через K_{2r} и H_{2r}, а оператор $\mathscr{Y}_{\sigma,h,G_{2r}}$ — через $\mathscr{Y}_{\sigma,h,2r}$. Разумеется, функция H_{2r}, как и G_{2r}, определяется с точностью до слагаемого, принадлежащего $\mathbf{E}_{y_0}$.

При $|t| \leq h$, подставляя в формулу (10) значения

$$c(G_{2r}, y) = (iy)^{-2r}, \quad c'(G_{2r}, y) = -2ri(iy)^{-2r-1},$$

получаем

$$\begin{aligned} K_{2r}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} & \frac{1}{\left(i\frac{2\pi l}{h}\right)^{2r}} e^{i\frac{2\pi l}{h}t} \frac{2\pi}{h^2}(h - |t|) \\ & + \frac{2i\pi}{h^2} \sum_{l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{-2ri}{\left(i\frac{2\pi l}{h}\right)^{2r+1}} e^{i\frac{2\pi l}{h}t} (\operatorname{sign} t) \\ & = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2r} d_{2r}\left(\frac{2\pi t}{h}\right) \frac{2\pi}{h^2}(h - |t|) + \frac{4r\pi}{h^2} \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2r+1} d_{2r+1}\left(\frac{2\pi t}{h}\right) \operatorname{sign} t. \end{aligned}$$

Найдем функцию H_{2r}. По формуле (7) при $|y| \geq y_0$

$$c(H_{2r},y) = \frac{c(G_{2r},y) - c(K_{2r},y)}{\left(2i\sin\frac{hy}{2}\right)^2} = \frac{1}{-4\sin^2\frac{hy}{2}}\frac{1}{(iy)^{2r}}$$
$$+ \sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{\left(i\frac{2\pi l}{h}\right)^{2r} 4\left(\frac{hy}{2}-\pi l\right)^2} - \frac{2ri}{2h}\sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{\left(i\frac{2\pi l}{h}\right)^{2r+1}\left(\frac{hy}{2}-\pi l\right)}.$$

Вычислить суммы в правой части напрямую трудно, поэтому воспользуемся обходным путем. Рассмотрим разложение функции cosec^2 в ряд Лорана:

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}(2k-1)\frac{2^{2k}\mathscr{B}_{2k}}{(2k)!}z^{2k-2}, \quad |z| < \pi.$$

Делая замену переменной $z = \frac{hy}{2}$ и разбивая сумму на две, получаем

$$\frac{(iy)^{-2r}}{\left(2i\sin\frac{hy}{2}\right)^2} = -\left(\sum_{k=0}^{r} + \sum_{k=r+1}^{\infty}\right)h^{2k-2}(2k-1)\frac{\mathscr{B}_{2k}}{(2k)!}(iy)^{2k-2-2r}. \tag{14}$$

Функция

$$k_1(y) = (iy)^{-2r} + \left(2i\sin\frac{hy}{2}\right)^2\sum_{k=0}^{r}h^{2k-2}(2k-1)\frac{\mathscr{B}_{2k}}{(2k)!}(iy)^{2k-2-2r}$$

целая, так как в нуле она имеет устранимую особенность, а других особых точек у нее нет. Очевидно, что ее степень равна h, точки $y = \frac{2\pi l}{h}$ ($l \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$) являются нулями второй кратности функции $y \mapsto (iy)^{-2r} - k_1(y)$, а из равенства (14) следует, что $k_1(0) = k_1'(0) = 0$. Значит, $k_1 = c(K_{2r})$, а

$$c(H_{2r},y) = \frac{(iy)^{-2r} - k_1(y)}{\left(2i\sin\frac{hy}{2}\right)^2} = \sum_{k=0}^{r}h^{2k-2}(1-2k)\frac{\mathscr{B}_{2k}}{(2k)!}(iy)^{2k-2-2r}, \quad |y| \geq y_0.$$

Следовательно,

$$H_{2r} = \sum_{k=0}^{r}h^{2k-2}(1-2k)\frac{\mathscr{B}_{2k}}{(2k)!}G_{2r+2-2k},$$

где функции $G_{2r+2-2k}$ определяются с точностью до слагаемого, принадлежащего $\mathbf{E}_{y_0}$. Отсюда

$$\mathscr{K}_{\sigma,H_{2r}} = \sum_{k=0}^{r}(-1)^k h^{2k-2}(1-2k)\frac{\mathscr{B}_{2k}}{(2k)!}\frac{\mathscr{K}_{2r+2-2k}}{\sigma^{2r+2-2k}}.$$

Замечание 5. Предположим, что $f \in W_1^{(2r)}(\mathbb{R})$. Учитывая, что нормирующий множитель в определении свертки выбран равным $\frac{1}{2\pi}$, видим, что функция K_{2r} та же, что и в остаточном члене представления (3). Функция же H_{2r} совпадает с ядром, которое получается, если выразить главную часть формулы (3) в виде свертки $f^{(2r)}$ с помощью равенств (13) и учесть, что $\left(S_h^2 g\right)'' = h^{-2}\delta_h^2 g$. Действительно, обозначая коэффициенты в сумме через A_k, находим

$$\sum_{k=0}^{r}A_k S_h^2 f^{(2k)} = T_1 + \sum_{k=0}^{r}\frac{A_k}{h^2}\delta_h^2 f^{(2r)} * G_{2r+2-2k}, \quad T_1 \in \mathbf{E}_{y_0}.$$

Поскольку y_0 можно взять произвольным положительным числом, приходим к формуле (3) с точностью до слагаемого из $L(\mathbb{R}) \cap \bigcap\limits_{y_0>0} \mathbf{E}_{y_0}$, т. е. к формуле (3) в точности. Тем самым равенство (3) доказано новым способом для функций из $W_1^{(2r)}(\mathbb{R})$. Так как в этом равенстве участвуют лишь значения функции на отрезке $[x-h, x+h]$, а всякая функция из $W_1^{(2r)}[x-h, x+h]$ продолжается до функции из $W_1^{(2r)}(\mathbb{R})$, оно верно для всех $f \in W_1^{(2r)}[x-h, x+h]$.

Конечно, доказательство представления (3) с помощью интегрирования по частям, данное в [7], элементарно.

Обозначим через $\mathscr{X}_{\sigma,s}$ операторы Ахиезера — Крейна — Фавара [8, п. 87, с. 101–103; 1, с. 147]. Их можно определить формулой

$$f - \mathscr{X}_{\sigma,s} f = f^{(s)} * (G_s - \mathscr{L}_\sigma(G_s)).$$

Замечание 6. Справедливо равенство

$$\mathscr{Y}_{\sigma,h,2r} f = \sum_{k=0}^{r} h^{2k}(1-2k)\frac{\mathscr{B}_{2k}}{(2k)!}\mathscr{X}_{\sigma,2r+2-2k} S_h^2 f^{(2k)}. \tag{15}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{Z}_{\sigma,h,2r} f$ левую часть равенства (15). Записывая f по формуле (3) и учитывая замечание 5, имеем

$$\begin{aligned} f - \mathscr{Z}_{\sigma,h,2r} f &= f^{(2r)} * K_{2r} \\ &+ \sum_{k=0}^{r} h^{2k-2}(1-2k)\frac{\mathscr{B}_{2k}}{(2k)!}\delta_h^2 f^{(2r)} * (G_{2r+2-2k} - \mathscr{L}_\sigma(G_{2r+2-2k})) \\ &= f^{(2r)} * K_{2r} + \delta_h^2 f^{(2r)} * (H_{2r} - \mathscr{L}_\sigma(H_{2r})) = f - \mathscr{Y}_{\sigma,h,2r} f, \end{aligned}$$

откуда $\mathscr{Y}_{\sigma,h,2r} = \mathscr{Z}_{\sigma,h,2r}$. $\square$

Определим функции ψ_{2r} на $[0,1]$ равенством

$$K_{2r}(t) = 2\pi h^{2r-1}\psi_{2r}\left(\frac{t}{h}\right), \quad t \in [0,h].$$

Другими словами,

$$\psi_{2r}(u) = -\frac{B_{2r}(u)}{(2r)!}(1-u) - 2r\frac{B_{2r+1}(u)}{(2r+1)!}, \quad u \in [0,1].$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^h |K_{2r}| = h^{2r}\int_0^1 |\psi_{2r}|.$$

Функция ψ_{2r} уже не зависит от h.

Конкретизируем теорему 1 для дифференцируемых функций, положив при этом $h = \frac{\gamma\pi}{\sigma}$ и ограничившись первым неравенством.

Теорема 2. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathscr{B}$, $\sigma, \gamma > 0$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in \mathfrak{M}^{(2r)}$. *Тогда*

$$\begin{aligned} P(f - \mathscr{Y}_{\sigma,\frac{\gamma\pi}{\sigma},2r} f) \le \frac{\pi^{2r}}{\sigma^{2r}} \Bigg(& \gamma^{2r}\int_0^1 |\psi_{2r}| \\ & + \sum_{k=0}^{r}(-1)^k\gamma^{2k-2}(1-2k)\frac{\mathscr{B}_{2k}}{(2k)!}\frac{\mathscr{K}_{2r+2-2k}}{\pi^{2r+2-2k}}\Bigg)\omega_2\left(f^{(2r)}, \frac{\gamma\pi}{\sigma}\right)_P. \end{aligned}$$

Замечание 7. Теорема 2 доказана в [7] с помощью формулы (3). При этом оператор $\mathscr{Y}_{\sigma,h,2r}$ с самого начала определялся равенством (15). В [7] установлено, что функция $(-1)^r\psi_{2r}$ на отрезке $[0,1]$ меняет знак один раз с $+$ на $-$,

$$\int_0^1 |\psi_2| = \frac{1}{48}, \quad \int_0^1 |\psi_4| = \frac{10+7\sqrt{7}}{38880},$$

$$\int_0^1 |\psi_{2r}| = \frac{2}{(2r)!}\left| y_r \frac{B_{2r+1}(y_r)}{2r+1} + \frac{\mathscr{B}_{2r+2} - B_{2r+2}(y_r)}{2r+2} \right|,$$

где $y_r = 1 - x_r$, x_r — единственный корень функции ψ_{2r} на $(0,1)$.

Замечание 8. Выразим явно ядро K, соответствующее ядру Пуассона

$$P_\lambda(t) = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + t^2}, \quad \lambda > 0.$$

Ядро Пуассона принадлежит $\widehat{CM}_e^2(y_0)$ при всех $y_0 > 0$. Для него $c(P_\lambda, y) = e^{-\lambda|y|}$, $c'(P_\lambda, y) = (-\lambda \operatorname{sign} y)e^{-\lambda|y|}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} K(t) = &\sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} e^{-\lambda\frac{2\pi|l|}{h}} e^{i\frac{2\pi l}{h}t} \frac{2\pi}{h^2}(h-|t|) \\ &+ \frac{2\pi\lambda}{h^2} \sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} e^{-\lambda\frac{2\pi|l|}{h}} (-i\operatorname{sign} l) e^{i\frac{2\pi l}{h}t} (\operatorname{sign} t) \\ &= \frac{2\pi}{h^2}(h-|t|)\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{2\pi\lambda}{h}}{\operatorname{ch}\frac{2\pi\lambda}{h} - \cos\frac{2\pi t}{h}} - 1 \right) + \frac{2\pi\lambda}{h^2} \frac{\operatorname{sh}\frac{2\pi t}{h}}{\operatorname{ch}\frac{2\pi\lambda}{h} - \cos\frac{2\pi t}{h}} (\operatorname{sign} t) \end{aligned}$$

(мы воспользовались известными выражениями периодического ядра Пуассона и сопряженного к нему).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жук В. В.* Аппроксимация периодических функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.
2. *Жук В. В.* О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 6. С. 1283–1297.
3. *Лигун А. А.* О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 1. С. 21–30.
4. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
5. *Громов А. Ю.* О точных константах приближений целыми функциями дифференцируемых функций // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск, 1976. Вып. 7. С. 17–21.
6. *Виноградов О. Л.* Точные неравенства типа Джексона для приближений классов сверток целыми функциями конечной степени // Алгебра и анализ. 2005. Т. 17, № 4. С. 56–111.
7. *Виноградов О. Л., Жук В. В.* Оценки функционалов через второй модуль непрерывности четных производных // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2013. Т. 416. С. 70–90.
8. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
9. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
10. *Жук В. В., Кузютин В. Ф.* Аппроксимация функций и численное интегрирование. СПб: Изд. С.-Пб. ун-та, 1995.

Статья поступила 24 апреля 2013 г.

Виноградов Олег Леонидович
Санкт-Петербургский гос. университет,
Университетский пр., 28, Санкт-Петербург 198504
olvin@math.spbu.ru