Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2014. Том 55, № 3

УДК 517.51

ВЕСОВОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО ХАРДИ НА МНОЖЕСТВЕ $\overset{\circ}{AC}(I)$

А. М. Абылаева,
А. О. Байарыстанов, Р. Ойнаров

Аннотация. Рассматривается весовое дифференциальное неравенство Харди на множестве локально абсолютно непрерывных функций, обращающихся в нуль на концах интервала, для которого получены более общие результаты, охватывающие ранее известные, и даны более точные оценки для наилучшей постоянной.

Ключевые слова: весовое дифференциальное неравенство Харди, пространство Лебега, локально абсолютно непрерывные функции.

§ 1. Введение

Пусть $I = (a, b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, $0 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, ρ, v и $\rho^{1-p'} = \frac{1}{\rho^{p'-1}}$ — неотрицательные локально суммируемые на I функции, причем $v \not\equiv 0$.

Пусть $0 < p < \infty$, $L_{p,\rho} \equiv L_{p,\rho}(I)$ — пространство измеримых на I функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,\rho} = \left(\int_a^b \rho(t)|f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $W^1_{p,\rho} \equiv W^1_p(\rho, I)$, $p > 1$, — совокупность локально абсолютно непрерывных на I функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_{W^1_{p,\rho}} = \|f'\|_{p,\rho} + |f(t_0)|, \tag{1}$$

где $t_0 \in I$ — некоторая фиксированная точка. Пусть $\lim\limits_{t \to a^+} f(t) \equiv f(a)$, $\lim\limits_{t \to b^-} f(t) \equiv f(b)$ и $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I) = \{f \in W^1_{p,\rho} : f(a) = f(b) = 0\}$, $AC_{p,l}(\rho, I) = \{f \in W^1_{p,\rho} : f(a) = 0\}$, $AC_{p,r}(\rho, I) = \{f \in W^1_{p,\rho} : f(b) = 0\}$.

Замыкания множеств $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$, $AC_{p,l}(\rho, I)$ и $AC_{p,r}(\rho, I)$ по норме (1) соответственно обозначим через $\overset{\circ}{W}_p(\rho, I)$, $W^1_{p,l}(\rho, I)$ и $W^1_{p,r}(\rho, I)$.

На множестве $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$ рассмотрим весовое неравенство Харди в дифференциальной форме [1]:

$$\left(\int_a^b v(t)|f(t)|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_a^b \rho(t)|f'(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета Науки МОН РК (грант № 1529/ГФ).

© **2014 Абылаева А. М., Байарыстанов А. О., Ойнаров Р.**

Неравенство (2) и его различные обобщения в последние 50 лет стали предметом исследования для многих специалистов и в основном изучены на множествах $AC_{p,l}(\rho, I)$ и $AC_{p,r}(\rho, I)$. Историю вопроса и результаты можно найти в [1–3]. В последние годы получены многочисленные эквивалентные критерии их выполнения (см., например, [4, 5]). Однако неравенство (2) на множестве $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$ исследовано очень слабо. Некоторые результаты приведены в [1, 2], причем только в [1] даны двухсторонние оценки для наилучшей константы $C > 0$ в (2).

В связи с различными приложениями неравенства (2) в качественной теории дифференциальных уравнений (см. [6–9]) возникает необходимость исследовать его на множестве $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$ с более точными оценками его наилучшей постоянной.

В настоящей статье методом, отличным от примененного в [1], получен более общий результат, охватывающий результаты выше указанных работ, и даны более точные двухсторонние оценки для наилучшей константы $C > 0$ в (2).

§ 2. Необходимые обозначения и утверждения

Исследования неравенства (2) на множестве $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$ проводится в зависимости от поведения функции ρ на концах интервала I. Весовая функция ρ на концах интервала I может вырождаться, поэтому имеет место

Теорема A. *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда*

(i) *если $\rho^{1-p'} \in L_1(I)$, то для любой функции $f \in W_p^1(\rho, I)$ существуют $\lim\limits_{t\to a+} f(t) \equiv f(a)$, $\lim\limits_{t\to b-} f(t) \equiv f(b)$ и*

$$\overset{\circ}{W}_p(\rho, I) = \big\{f \in W_p^1(\rho, I) : f(a) = f(b) = 0\big\} \equiv \overset{\circ}{AC}_p(\rho, I);$$

(ii) *если $\rho^{1-p'} \in L_1(a, c)$ и $\rho^{1-p'} \notin L_1(c, b)$, $c \in I$, то для любой функции $f \in W_p^1(\rho, I)$ существуют $f(a)$ и*

$$\overset{\circ}{W}_p(\rho, I) = W_{p,l}^1(\rho, I) = \big\{f \in W_p^1(\rho, I) : f(a) = 0\big\} \equiv AC_{p,l}(\rho, I);$$

(iii) *если $\rho^{1-p'} \notin L_1(a, c)$ и $\rho^{1-p'} \in L_1(c, b)$, $c \in I$, то для любой функции $f \in W_p^1(\rho, I)$ существуют $f(b)$ и*

$$\overset{\circ}{W}_p(\rho, I) = W_{p,r}^1(\rho, I) = \big\{f \in W_p^1(\rho, I) : f(b) = 0\big\} \equiv AC_{p,r}(\rho, I_0);$$

(iv) *если $\rho^{1-p'} \notin L_1(a, c)$ и $\rho^{1-p'} \notin L_1(c, b)$, $c \in I$, то*

$$\overset{\circ}{W}_p(\rho, I) = W_{p,l}^1(\rho, I) = W_{p,r}^1(\rho, I) = W_p^1(\rho, I).$$

Утверждения теоремы A, вообще говоря известны, и их можно вывести из результатов работ [10–12]. Мы приведем доказательство утверждения (ii), а остальные утверждения доказываются аналогичным образом.

Пусть $\rho^{1-p'} \in L_1(a, c)$ и $\rho^{1-p'} \notin L_1(c, b)$, $c \in I$. Тогда для $f \in W_p^1(\rho, I)$

$$\int_a^c |f'(t)|\,dt \le \left(\int_a^c \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_a^b \rho(t)|f'(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Отсюда вытекает существование $f(a)$.

Пусть $f \in W^1_{p,l}(\rho, I)$. Тогда найдется последовательность $\{f_n\} \subset AC_{p,l}(\rho, I)$ такая, что $\|f - f_n\|_{W^1_{p,\rho}} \to 0$ при $n \to \infty$. Так как

$$|f(t) - f_n(t)| \le \int_t^{t_0} |f'(s) - f_n'(s)|ds + |f(t_0) - f_n(t_0)|$$

при $a < t < t_0 < b$, применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$|f(t) - f_n(t)| \le \max\left\{1, \left(\int_a^{t_0} \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right\}\|f - f_n\|_{W^1_{p,\rho}}.$$

Стало быть, $f(a) = 0$.

Пусть $a < \alpha \le t_0 < b$. Тогда

$$|f(\alpha)| \le \left(\int_a^{\alpha} \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_a^{\alpha} \rho(t)|f'|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

или

$$|f(\alpha)|\left(\int_a^{\alpha} \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} \le \left(\int_a^{\alpha} \rho(t)|f'|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть точка $\alpha^* = \alpha^*(a, \alpha) \in (a, \alpha)$ такова, что

$$\int_{\alpha^*}^{\alpha} \rho^{1-p'} = \int_a^{\alpha^*} \rho^{1-p'}.$$

Введем функцию

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & a < t \le \alpha^*, \\ f(\alpha)\left(\int\limits_{\alpha^*}^{t} \rho^{1-p'}\right)\left(\int\limits_{\alpha^*}^{\alpha} \rho^{1-p'}\right)^{-1}, & \alpha^* \le t \le \alpha, \\ f(t), & \alpha \le t < b. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_\alpha \in AC_{p,l}(\rho, I)$. Имеем

$$\|f - f_\alpha\|_{W^1_p} = \left(\int_a^{\alpha} \rho|f' - f_\alpha'|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left(\int_a^{\alpha} \rho|f'|^p\right)^{\frac{1}{p}} + |f(\alpha)|\left(\int_{\alpha^*}^{\alpha} \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} \le (1 + 2^{\frac{1}{p'}})\left(\int_a^{\alpha} \rho|f'|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

откуда следует, что $\|f - f_\alpha\|_{W^1_p} \to 0$ при $\alpha \to 0$. Значит, $f \in W^1_{p,l}(\rho, I)$ и $W^1_{p,l}(\rho, I) = \{f \in W^1_p(\rho, I) : f(a) = 0\}$.

Покажем, что $\overset{\circ}{W}{}_p(\rho, I) = W^1_{p,l}(\rho, I)$. В силу $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I) \subset W^1_{p,l}(\rho, I)$ достаточно показать, что $\overset{\circ}{W}{}_p(\rho, I) \supset W^1_{p,l}(\rho, I)$. Пусть $f \in W^1_{p,l}(\rho, I)$ и $a < \alpha \le t_0 < \beta < b$.

Ввиду условия $\int\limits_{\beta}^{b} \rho^{1-p'}\,ds = \infty$ для каждого $\beta \in I$ найдется точка $\beta^* = \beta^*(\beta, b) \in (\beta, b)$ такая, что

$$|f(\beta)|\left(\int_{\beta}^{\beta^*} \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} \le \left(\int_{\beta}^{b} \rho(t)|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Построим функцию $f_{\alpha,\beta} \in \overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$:

$$f_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} f_\alpha(t), & a < t \le \beta, \\ f(\beta)\left(\int\limits_{\beta}^{\beta^*} \rho^{1-p'}\right)^{-1} \int\limits_{t}^{\beta^*} \rho^{1-p'}, & \beta \le t \le \beta^*, \\ 0, & \beta^* \le t < b. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\|f - f_{\alpha,\beta}\|_{W^1_{p,\rho}} \\ &\quad \le \left(\int_a^\alpha \rho|f' - f'_\alpha|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\beta^{\beta^*} \rho|f' - f'_{\alpha,\beta}|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\beta*}^{b} \rho|f'|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \le (1 + 2^{\frac{1}{p'}})\left(\int_a^\alpha \rho|f'|^p\right)^{\frac{1}{p}} + 2\left(\int_\beta^b \rho|f'|^p\right)^{\frac{1}{p}} + |f(\beta)|\left(\int_\beta^{\beta^*} \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} \\ &\quad \le (1 + 2^{\frac{1}{p'}})\left(\int_a^\alpha \rho|f'|^p\right)^{\frac{1}{p}} + 3\left(\int_\beta^b \rho|f'|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Отсюда $\|f - f_{\alpha,\beta}\|_{W^1_{p,\rho}} \to 0$, при $\alpha \to a$, $\beta \to b$. Следовательно, $f \in \overset{\circ}{W}_p(\rho, I)$. Теорема А доказана.

Пусть $a \le \alpha < \beta \le b$. Положим

$$A_1(\alpha,\beta,x) = \left(\int_\alpha^x \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_x^\beta v(t)dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$A_2(\alpha,\beta,x) = \left(\int_\alpha^x \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_\alpha^x v(t)\left(\int_\alpha^t \rho^{1-p'}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$A_1^*(\alpha,\beta,x) = \left(\int_x^\beta \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\alpha^x v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$A_2^*(\alpha,\beta,x) = \left(\int_x^\beta \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_x^\beta v(t)\left(\int_t^\beta \rho^{1-p'}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \alpha < x < \beta.$$

$$A_i(\alpha,\beta)=\sup_{\alpha<x<\beta}A_i(\alpha,\beta,x),$$
$$A_i^*(\alpha,\beta)=\sup_{\alpha<x<\beta}A_i^*(\alpha,\beta,x),\quad i=1,2,$$
$$\gamma_1=\min(p^{\frac1q}(p')^{\frac{1}{p'}},q^{\frac1q}(q')^{\frac{1}{p'}}),\quad \gamma_2=p'.$$

Наилучшую постоянную C в (2) на множествах $\overset{\circ}{AC}_p(\rho,(\alpha,\beta))$, $AC_{p,l}(\rho,(\alpha,\beta))$ и $AC_{p,r}(\rho,(\alpha,\beta))$ соответственно обозначим через $C=J_0(\alpha,\beta)$, $C=J_l(\alpha,\beta)$ и $C=J_r(\alpha,\beta)$.

Из [3, 13] следует

Теорема B. *Пусть* $1<p\le q<\infty$. *Тогда*

$$\max\{A_1(\alpha,\beta),A_2(\alpha,\beta)\}\le J_l(\alpha,\beta)\le\min\{\gamma_1A_1(\alpha,\beta),\gamma_2A_2(\alpha,\beta)\},\tag{3}$$
$$\max\{A_1^*(\alpha,\beta),A_2^*(\alpha,\beta)\}\le J_r(\alpha,\beta)\le\min\{\gamma_1A_1^*(\alpha,\beta),\gamma_2A_2^*(\alpha,\beta)\}.\tag{4}$$

Пусть

$$B(\alpha,\beta)=\left(\int_\alpha^\beta\left(\int_x^\beta v\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\int_\alpha^x\rho\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\rho(x)\,dx\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$
$$B^*(\alpha,\beta)=\left(\int_\alpha^\beta\left(\int_\alpha^x v\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\int_x^\beta\rho\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\rho(x)\,dx\right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Из [3, 14], а также с учетом того, что по условию функция $\rho^{1-p'}$ локально суммируема на I, вытекает (см. [14, замечание])

Теорема C. *Пусть* $0<q<p<\infty$, $p>1$. *Тогда*

$$\mu^-B(\alpha,\beta)\le J_l(\alpha,\beta)\le\mu^+B(\alpha,\beta),\quad \mu^-B^*(\alpha,\beta)\le J_r(\alpha,\beta)\le\mu^+B^*(\alpha,\beta),$$

где $\mu^-=\left(\frac{p-q}{p}\right)^{\frac{1}{q'}}$, $\mu^+=(p')^{\frac{1}{pq'}}q^{\frac1q}$ *при* $1<q<p<\infty$ *и* $\mu^-=q^{\frac1q}(p')^{\frac{1}{q'}}\frac{p-q}{p}$, $\mu^+=p^{\frac1p}(p')^{\frac{1}{q'}}\left(\frac{p}{p-q}\right)^{\frac{p-q}{pq}}$ *при* $0<q<1<p<\infty$.

§ 3. Основные результаты

3.1. Случай $1<p\le q<\infty$**.** Пусть

$$\int_a^b\rho^{1-p'}(s)\,ds<\infty.\tag{5}$$

Определение 1. Точку $c_i\in I$, $i=1,2$, назовем *серединной точкой* для (A_i,A_i^*), если $A_i(a,c_i)=A_i^*(c_i,b)\equiv T_{c_i}(a,b)<\infty$, $i=1,2$.

Теорема 1. *Пусть* $1<p\le q<\infty$ *и выполняется* (5). *Тогда неравенство* (2) *выполнено на множестве* $\overset{\circ}{AC}_p(\rho,I)$ *тогда и только тогда, когда существует серединная точка* $c_i\in I$ *для* (A_i,A_i^*) *хотя бы при одном* $i=1,2$ *и при этом для наилучшей постоянной* $J_0(a,b)$ *в* (2) *имеет место оценка*

$$2^{\frac{q-p}{pq}}\max\{T_{c_1}(a,b),T_{c_2}(a,b)\}\le J_0(a,b)\le\min\{\gamma_1T_{c_1}(a,b),\gamma_2T_{c_2}(a,b)\}.\tag{6}$$

Следствие 1 [9]. *В случае $p = q$ справедлива оценка*

$$\max\{T_{c_1}(a,b), T_{c_2}(a,b)\} \le J_0(a,b) \le \min\{p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}} T_{c_1}(a,b), p' T_{c_2}(a,b)\}.$$

В доказательстве теоремы 1 используется следующая

Лемма 1. *Пусть $1 < p \le q < \infty$ и выполнено* (5). *Тогда серединная точка для (A_i, A_i^*), $i = 1, 2$, существует тогда и только тогда, когда для $c \in I$*

$$\limsup_{x \to a} A_i(a, c, x) < \infty, \quad \limsup_{x \to b} A_i^*(c, b, x) < \infty, \quad i = 1, 2. \tag{7}$$

Доказательство леммы 1. Достаточность. Из условия (7) следует, что

$$\lim_{c \to a} A_i(a, c) < \infty, \quad \lim_{c \to b} A_i^*(c, b) < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Покажем, что

$$\lim_{c \to b} A_i(a, c) > \lim_{c \to b} A_i^*(c, b), \quad i = 1, 2. \tag{8}$$

Действительно, если

$$\lim_{c \to b} A_i(a, c) \le \lim_{c \to b} A_i^*(c, b) < \infty, \tag{9}$$

то в силу (5) имеем

$$\int_c^b v(t)\, dt < \infty, \quad c \in I.$$

Тогда

$$\lim_{c \to b} A_i^*(c, b) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{10}$$

При $i = 1$ равенство (10) очевидно, а при $i = 2$ оно вытекает из неравенства

$$\left(\int_c^b \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_c^b v(t) \left(\int_t^b \rho^{1-p'}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\int_c^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_c^b v(t)\, dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Так как $A_i(a, c)$ — неотрицательная, неубывающая и непрерывная функция по $c \in I$, из (9) и (10) следует, что $A_i(a, b) = 0$, $i = 1, 2$. Тогда $v(t) \equiv 0$ на I, что противоречит условию, наложенному на v. Следовательно, имеет место (8). Точно так же устанавливаем, что

$$\lim_{c \to a} A_i^*(c, b) > \lim_{c \to b} A_i(a, c), \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

Из (8) и (11) в силу непрерывности и монотонности $A_i(a, c)$, $A_i^*(c, b)$ по $c \in I$, вытекает существование точек $c_i \in I$ таких, что $A_i(a, c_i) = A_i^*(c_i, b)$, $i = 1, 2$.

Необходимость. Пусть существует серединная точка $c_i \in I$ для (A_i, A_i^*), $i = 1, 2$. Тогда по определению серединной точки c_i

$$A_i(a, c_i) = A_i^*(c_i, b) < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Если $c \geq c_1$, то в силу условия (5)

$$\limsup_{x\to a} A_1(a,c,x) = \lim_{t\to a} \sup_{a<x<t} \left(\int_a^x \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_x^c v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \sup_{a<x<c_1} \left(\int_a^x \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_x^{c_1} v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} + \lim_{t\to a} \sup_{a<x<t} \left(\int_a^x \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{c_1}^c v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= A_1(a,c_1) + \lim_{t\to a} \left(\int_a^t \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{c_1}^c v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} = A_1(a,c_1) < \infty,$$

$$\limsup_{x\to b} A_1^*(c,b,x) = \lim_{t\to b} \sup_{t<x<b} \left(\int_x^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_c^x v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \sup_{c_1<x<b} \left(\int_x^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{c_1}^x v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} = A_1^*(c_1,b) < \infty.$$

В случае $c < c_1$ аналогично

$$\limsup_{x\to a} A_1(a,c,x) \leq A_1(a,c_1) < \infty,$$

$$\limsup_{x\to b} A_1^*(c,b,x) = \lim_{t\to b} \sup_{t<x<b} \left(\int_x^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_c^x v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq A_1^*(c_1,b) + \lim_{t\to a} \left(\int_t^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_c^{c_1} v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} = A_1^*(c_1,b) < \infty.$$

В случае A_2 и A_2^* для любого $c \in I$

$$\limsup_{x\to a} A_2(a,c,x) = \lim_{t\to a} \sup_{a<x<t} \left(\int_a^x \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_a^x v(t) \left(\int_a^t \rho^{1-p'}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \sup_{a<x<c_2} \left(\int_a^x \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_a^x v(t) \left(\int_a^t \rho^{1-p'}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} = A_2(a,c_2) < \infty$$

и аналогично

$$\limsup_{x\to b} A_2^*(c,b,x) \leq A_2^*(c_2,b) < \infty.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть неравенство (2) на множестве $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$ выполнено с наилучшей константой $C = J_0(a,b)$. Пусть

$a < c^- < c < c^+ < b$. Положим

$$f_0(t) = \begin{cases} \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-1} \int\limits_a^t \rho^{1-p'}, & a < t < c^-, \\ 1, & c^- \le t \le c^+, \\ \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{-1} \int\limits_t^b \rho^{1-p'}, & c^+ < t < b. \end{cases} \tag{12}$$

Функция f_0 локально абсолютно непрерывная на I, и

$$\begin{aligned} \int\limits_a^b \rho(s)|f_0'(s)|^p\,ds &= \int\limits_a^{c^-} \rho(s)|f_0'(s)|^p\,ds + \int\limits_{c^-}^{c^+} \rho(s)|f_0'(s)|^p\,ds + \int\limits_{c^+}^b \rho(s)|f_0'(s)|^p\,ds \\ &= \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-p} \int\limits_a^{c^-} \rho\rho^{p(1-p')} + \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{-p} \int\limits_{c^+}^b \rho\rho^{p(1-p')} \\ &= \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p} < \infty. \end{aligned} \tag{13}$$

Поэтому $f_0 \in W_p^1(\rho, I)$, причем по построению

$$\lim_{t\to a+} f_0(t) \equiv f_0(a) = 0, \quad \lim_{t\to b-} f_0(t) \equiv f_0(b) = 0.$$

Тогда $f_0 \in \overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$. Подставляя функцию f_0 в (2), имеем

$$J_0(a,b) \ge \frac{\left(\int\limits_a^b v(t)|f_0(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int\limits_a^b \rho(t)|f_0'(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}}. \tag{14}$$

Непосредственное вычисление дает

$$\begin{aligned} \int\limits_a^b v(t)|f_0(t)|^q\,dt &= \int\limits_a^{c^-} v(t)|f_0(t)|^q\,dt + \int\limits_{c^-}^{c^+} v(t)|f_0(t)|^p\,dt + \int\limits_{c^+}^b v(t)|f_0(t)|^q\,dt \\ &= \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-q} \int\limits_a^{c^-} v(t)\left(\int\limits_a^t \rho^{1-p'}\right)^q dt \\ &\quad + \int\limits_{c^-}^{c^+} v(t)\,dt + \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{-q} \int\limits_{c^+}^b v(t)\left(\int\limits_t^b \rho^{1-p'}\right)^q dt. \end{aligned} \tag{15}$$

Из (13)–(15) получаем неравенства

$$J_0^q(a,b) \geq \frac{\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-q} \int\limits_a^{c^-} v(t)\left(\int\limits_a^t \rho^{1-p'}\right)^q dt}{\left(\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$+ \frac{\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{-q} \int\limits_{c^+}^b v(t)\left(\int\limits_t^b \rho^{1-p'}\right)^q dt}{\left(\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{q}{p}}}, \quad (16)$$

$$J_0^q(a,b) \geq \frac{\int\limits_{c^-}^{c} v(t)\,dt + \int\limits_{c}^{c^+} v(t)\,dt}{\left(\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{q}{p}}}. \quad (17)$$

Умножая числитель и знаменатель правых частей (16) и (17) на $\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}$, имеем

$$J_0^q(a,b) \geq \frac{\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{q}{p}} \int\limits_a^{c^-} v(t)\left(\int\limits_a^t \rho^{1-p'}\right)^q dt}{\left(1 + \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{p-1}\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$+ \frac{\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{-q} \int\limits_{c^+}^b v(t)\left(\int\limits_t^b \rho^{1-p'}\right)^q dt}{\left(1 + \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{p-1}\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{q}{p}}}, \quad (18)$$

$$J_0^q(a,b) \geq \frac{\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \int\limits_{c^-}^{c} v(t)\,dt + \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \int\limits_{c}^{c^+} v(t)\,dt}{\left(1 + \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{p-1}\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{q}{p}}}. \quad (19)$$

Так как левые части (18) и (19) не зависят от $c^- \in (a,c)$, переходя к пределу при $c^- \to a$, в их правых частях получим

$$J_0^q(a,b) \geq \frac{\limsup\limits_{x\to a}\left(\int\limits_a^x \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{q}{p}} \int\limits_a^x v(t)\left(\int\limits_a^t \rho^{1-p'}\right)^q dt}{\left(1 + \lim\limits_{c^-\to a}\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{p-1}\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$+ \frac{\lim\limits_{c^-\to a}\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{-q} \int\limits_{c^+}^b v(t)\left(\int\limits_t^b \rho^{1-p'}\right)^q dt}{\left(1 + \lim\limits_{c^-\to a}\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{p-1}\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$= \lim_{x\to a}\sup\left(\int_a^x \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{q}{p'}} \int_a^x v(t)\left(\int_a^t \rho^{1-p'}\right)^q dt = \lim_{x\to a}\sup A_2^q(a,c,x), \quad (20)$$

$$J_0^q(a,b) \geq \frac{\lim\limits_{x\to a}\sup\left(\int\limits_a^x \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \int\limits_x^c v(t)\,dt + \lim\limits_{c^-\to a}\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \int\limits_c^{c^+} v(t)\,dt}{\left(1+\lim\limits_{c^-\to a}\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{p-1}\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$= \lim_{x\to a}\sup\left(\int_a^x \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \int_x^c v(t)\,dt = \lim_{x\to a}\sup A_1^q(a,c,x). \quad (21)$$

Умножая числитель и знаменатель правых частей (16) и (17) на $\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}$ и переходя к пределу при $c^+ \to b$, получим

$$J_0^q(a,b) \geq \frac{\lim\limits_{c^+\to b}\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-q} \int\limits_a^{c^-} v(t)\left(\int\limits_a^t \rho^{1-p'}\right)^q dt}{\left(\lim\limits_{c^+\to b}\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{p-1}\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p} + 1\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$+ \frac{\lim\limits_{x\to b}\sup\left(\int\limits_x^b \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{q}{p}} \int\limits_x^b v(t)\left(\int\limits_t^b \rho^{1-p'}\right)^q dt}{\left(\lim\limits_{c^+\to b}\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{p-1}\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p} + 1\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$= \lim_{x\to b}\sup\left(\int_x^b \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{q}{p}} \int_x^b v(t)\left(\int_t^b \rho^{1-p'}\right)^q dt = \lim_{x\to b}\sup(A_2^*(c,b,x))^q, \quad (22)$$

$$J_0^q(a,b) \geq \frac{\lim\limits_{c^+\to b}\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \int\limits_{c^-}^c v(t)\,dt + \lim\limits_{x\to b}\sup\left(\int\limits_x^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \int\limits_c^x v(t)\,dt}{\left(\lim\limits_{c^+\to b}\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{p-1}\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p} + 1\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$= \lim_{x\to b}\sup\left(\int_x^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \int_c^x v(t)\,dt = \lim_{x\to b}\sup(A_1^*(c,b,x))^q. \quad (23)$$

Из (20)–(23) следует, что выполнено (7). Тогда по лемме 1 существуют серединные точки $c_i \in I$ для (A_i, A_i^*), $i = 1,2$. Значит, по определению 1 $A_i(a,c_i) = A_i^*(c_i,b) \equiv T_{c_i}(a,b) < \infty$, $i = 1,2$.

Так как $A_i(a,c_i,x)$, $A_i^*(c_i,b,x)$ непрерывны по x соответственно на $(a,c_i]$, $[c_i,b)$ и

$$A_i(a,c_i) \geq \lim_{x\to a}\sup A_i(a,c_i,x), \quad A_i^*(c_i,b) \geq \lim_{x\to b}\sup A_i^*(c_i,b,x),$$

имеются две возможности. Если $A_i(a,c_i)=\lim\limits_{x\to a}\sup A_i(a,c_i,x)$ или $A_i^*(c_i,b)=\lim\limits_{x\to b}\sup A_i^*(c_i,b,x)$, то из (20)–(23) имеем оценку $J_0(a,b)\ge T_{c_i}(a,b)$, $i=1,2$, т. е. выполнена левая часть оценки (6). В противном случае существуют точки c_i^-, c_i^+, $a<c_i^-\le c_i$, $c_i\le c_i^+<b$, такие, что $A_i(a,c_i)=A_i(a,c_i,c_i^-)$, $A_i^*(c_i,b)=A_i^*(c_i,b,c_i^+)$, причем $c_1^-\ne c_1$, $c_1^+\ne c_1$.

Чтобы получить левую оценку (6), в этом случае оцениваем $T_{c_1}(a,b)$, $T_{c_2}(a,b)$ по отдельности. Сначала оценим $T_{c_2}(a,b)$.

Пусть в (16) $c^-=c_2^-$. Тогда из (18) имеем

$$J_0^q(a,b)\ge\frac{\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{-\frac{q}{p}}\int\limits_a^{c_2^-}v(t)\left(\int\limits_a^t\rho^{1-p'}\right)^q dt\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$+\frac{\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{-\frac{q}{p}}\int\limits_{c_2^+}^b v(t)\left(\int\limits_t^b\rho^{1-p'}\right)^q dt\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

(учитываем выражения для $A_2(a,c_2,c_2^-)$, $A_2^*(c_2,b,c_2^+)$)

$$=\frac{(A_2(a,c_2,c_2^-))^q\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}+(A_2^*(c_2,b,c_2^+))^q\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

(по определению точки c_2: $A_2(a,c_2)=A_2(a,c_2,c_2^-)$ и $A_2^*(a,c_2)=A_2^*(c_2,b,c_2^+)$)

$$=\frac{(A_2(a,c_2))^q\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}+(A_2^*(c_2,b))^q\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

(так как c_2 серединная точка для (A_2,A_2^*))

$$=(T_{c_2}(a,b))^q\frac{\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}\ge 2^{1-\frac{q}{p}}(T_{c_2}(a,b))^q. \quad (24)$$

Оценим $T_{c_1}(a,b)$. Аналогично, полагая $c=c_1$, $c^-=c_1^-$, $c^+=c_2^+$ в (17), из

(19) получим

$$J_0^q(a,b) \geq \frac{\left(\int\limits_a^{c_1^-}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\int\limits_{c_1^-}^{c_1} v(t)\,dt\left(\int\limits_{c_1^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$+\frac{\left(\int\limits_{c_1^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\int\limits_{c_1}^{c_1^+} v(t)\,dt\left(\int\limits_a^{c_1^-}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$=\frac{(A_1(a,c_1,c_1^-))^q\left(\int\limits_{c_1^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}+(A_1^*(c_1,b,c_1^+))^q\left(\int\limits_a^{c_1^-}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$=\frac{(A_1(a,c_1))^q\left(\int\limits_{c_1^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}+(A_1^*(c_1,b))^q\left(\int\limits_a^{c_1^-}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$=(T_{c_1}(a,b))^q\frac{\left(\int\limits_{c_1^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}+\left(\int\limits_a^{c_1^-}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}\geq 2^{1-\frac{q}{p}}(T_{c_1}(a,b))^q. \quad (25)$$

Из (24) и (25) имеем левую оценку (6). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть существует серединная точка $c_i \in I$ для (A_i, A_i^*), $i = 1,2$. Тогда $A_i(a,c_i) = A_i^*(c_i,b) = T_{c_i}(a,b) < \infty$, $i = 1,2$. Так как $f(a) = f(b) = 0$ для $f \in \overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$, сужения функции $f \in \overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$ на интервалах (a,c_i) и (c_i,b) соответственно принадлежат $AC_{p,l}(\rho,(a,c_i))$ и $AC_{p,r}(\rho,(c_i,b))$.

Поэтому на основании теоремы B

$$\int\limits_a^b v(t)|f(t)|^q\,dt=\int\limits_a^{c_i} v(t)|f(t)|^q\,dt+\int\limits_{c_i}^b v(t)|f(t)|^q\,dt$$

$$\leq(\gamma_i A_i(a,c_i))^q\left(\int\limits_a^{c_i}\rho(s)|f'(s)|^p\,ds\right)^{\frac{q}{p}}+(\gamma_i A_i^*(c_i,b))^q\left(\int\limits_{c_i}^{b}\rho(s)|f'(s)|^p\,ds\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\leq(\gamma_i T_{c_i}(a,b))^q\left(\int\limits_a^{c_i}\rho(s)|f'(s)|^p\,ds+\int\limits_{c_i}^{b}\rho(s)|f'(s)|^p\,ds\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$= (\gamma_i T_{c_i}(a,b))^q \left(\int_a^b \rho(s)|f'(s)|^p\,ds \right)^{\frac{q}{p}},$$

т. е. выполняется неравенство (2) и для наилучшей постоянной $C = J_0(a,b)$ в (2) имеет место оценка

$$J_0(a,b) \le \min\{\gamma_1 T_{c_1}(a,b), \gamma_2 T_{c_2}(a,b)\},$$

которая дает правую часть (6). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Теорема 1 расширяет оценки величины $J_0(a,b)$, приведенные в [1]. Например, в теореме 8.8 из [1] в предположении $A_1(a,a) = A_1^*(b,b) = 0$ (что равносильно условиям $\lim\limits_{x\to a} A_1(a,c,x) = 0$, $\lim\limits_{x\to b} A_1^*(c,b,x) = 0$) получено

$$2^{-\frac{1}{p}} A \le J_0(a,b) \le \left(1 + \frac{q}{p'}\right)^{\frac{1}{q}} \left(1 + \frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}} A,$$

где $A = \inf\limits_{a<c<b} \max\{A_1(a,c), A_1^*(c,b)\}$.

В указанных предположениях легко установить, что $A = T_1(a,b)$.

Пусть

$$\int_a^c \rho^{1-p'}(s)\,ds < \infty, \quad \int_c^b \rho^{1-p'}(s)\,ds = \infty, \quad c \in I, \tag{26}$$

или

$$\int_a^c \rho^{1-p'}(s)\,ds = \infty, \quad \int_c^b \rho^{1-p'}(s)\,ds < \infty, \quad c \in I. \tag{27}$$

Теорема 2. *Пусть $1 < p \le q < \infty$. Если выполняется* (26) *или* (27)*, то для наилучшей постоянной $J_0(a,b)$ в* (2) *соответственно имеет место оценка*

$$\max\{A_1(a,b), A_2(a,b)\} \le J_0(a,b) \le \min\{\gamma_1 A_1(a,b), \gamma_2 A_2(a,b)\} \tag{28}$$

или

$$\max\{A_1^*(a,b), A_2^*(a,b)\} \le J_0(a,b) \le \min\{\gamma_1 A_1^*(a,b), \gamma_2 A_2^*(a,b)\}. \tag{29}$$

Доказательство теоремы 2. Так как множество $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$ всюду плотно в $\overset{\circ}{W}_p(\rho, I)$,

$$J_0(a,b) = \sup_{f\in\overset{\circ}{AC}_p(\rho,I)} \frac{\left(\int_a^b v(t)|f(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int_a^b \rho(t)|f'(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}} = \sup_{f\in\overset{\circ}{W}_p(\rho,I)} \frac{\left(\int_a^b v(t)|f(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int_a^b \rho(t)|f'(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}}. \tag{30}$$

Пусть выполнены условия (26). Тогда по п. (ii) теоремы A $\overset{\circ}{W}_p(\rho, I) = \left\{f \in W_p^1(\rho, I) : f(a) = 0\right\} = AC_{p,l}(\rho, I)$. Следовательно, $J_0(I) = J_l(I)$, и оценка (28) вытекает из теоремы B. Аналогично доказывается справедливость оценки (29) в случае (27). Теорема 2 доказана.

Наконец, пусть

$$\int_a^c \rho^{1-p'}(s)\,ds = \infty, \quad \int_c^b \rho^{1-p'}(s)\,ds = \infty, \quad c \in I. \tag{31}$$

Теорема 3. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$ *и выполняется* (31). *Тогда неравенство* (2) *не имеет места на множестве* $\overset{\circ}{W}_p(\rho, I)$, *т. е.* $J_0(a,b) = \infty$.

Доказательство теоремы 3. По условию выполнено (31). Тогда по теореме A (п. (iv)) $\overset{\circ}{W}_p(\rho, I) = W_p^1(\rho, I)$. Так как $f(x) \equiv 1 \in W_p^1(\rho, I)$, на основании (30) $J_0(a,b) = \infty$. Теорема 3 доказана.

3.2. Случай $0 < q < p < \infty$.

Определение 2. Точку $c \in I$ назовем *серединной точкой для* (B, B^*), если $B(a,c) = B^*(c,b) \equiv T(a,b) < \infty$.

Очевидно, что для существования серединной точки для (B, B^*) необходимо и достаточно, чтобы $B(a,\beta) < \infty$, $\beta \in I$, $B^*(\alpha, b) < \infty$, $\alpha \in I$.

Теорема 4. *Пусть* $0 < q < p < \infty$, $p > 1$ *и выполняется* (5). *Тогда неравенство* (2) *выполнено на множестве* $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$ *тогда и только тогда, когда существует серединная точка* $c \in I$ *для* (B, B^*), *при этом для наилучшей постоянной* $J_0(a,b)$ *в* (2) *имеет место оценка*

$$q^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p-q}{p-1}\right)^{\frac{1}{q'}} T(a,b) \le J_0(a,b) \le 2^{\frac{p-q}{pq}} \mu^+ T(a,b). \tag{32}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $0 < q < p < \infty$, $p > 1$ и (2) выполнено на множестве $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$ с постоянной $C = J_0(a,b)$.

Пусть $a < \alpha < \beta < b$. Тогда в силу условий на весовые функции v и ρ величины $B(\alpha, c)$, $c \in (\alpha, b)$, $B^*(c, \beta)$, $c \in (a, \beta)$ конечны. Тем самым существует серединная точка $c = c(\alpha, \beta) \in (\alpha, \beta)$ для $B(\alpha, \beta)$ и $B^*(\alpha, \beta)$, т. е.

$$\int_\alpha^c \left(\int_x^c v\right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\int_\alpha^x \rho^{1-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \rho^{1-p'}(x)\,dx = \int_c^\beta \left(\int_c^x v\right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\int_x^\beta \rho^{1-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \rho^{1-p'}(x)\,dx. \tag{33}$$

Введем функцию

$$f_0(t) = \begin{cases} 0, & a < t \le \alpha, \\ \frac{1}{b_1} \int_\alpha^t \left(\int_x^c v\right)^{\frac{1}{p-q}} \left(\int_\alpha^x \rho^{1-p'}\right)^{\frac{(q-1)}{p-q}} \rho^{1-p'}(x)\,dx, & \alpha \le t \le c, \\ \frac{1}{b_2} \int_t^\beta \left(\int_c^x v\right)^{\frac{1}{p-q}} \left(\int_x^\beta \rho^{1-p'}\right)^{\frac{(q-1)}{p-q}} \rho^{1-p'}(x)\,dx, & c \le t \le \beta, \\ 0, & \beta \le t < b, \end{cases}$$

где

$$b_1 = \int_\alpha^c \left(\int_x^c v\right)^{\frac{1}{p-q}} \left(\int_\alpha^x \rho^{1-p'}\right)^{\frac{(q-1)}{p-q}} \rho^{1-p'}(x)\,dx,$$

$$b_2 = \int\limits_c^\beta \left(\int\limits_c^x v \right)^{\frac{1}{p-q}} \left(\int\limits_x^\beta \rho^{1-p'} \right)^{\frac{(q-1)}{p-q}} \rho^{1-p'}(x)\,dx.$$

Очевидно, что $f_0 \in \overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$. Для функции f_0 имеем

$$\left(\int\limits_a^b \rho(t)|f_0'(t)|^p\,dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{b_1^p}(B(\alpha,c))^{\frac{qp}{p-q}} + \frac{1}{b_2^p}(B^*(c,\beta))^{\frac{qp}{p-q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= (T(\alpha,\beta))^{\frac{q}{p-q}} \left(\frac{1}{b_1^p} + \frac{1}{b_2^p} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (34)$$

$$\int\limits_a^b v(t)|f_0(t)|^q\,dt = \int\limits_\alpha^c v(t)(f_0(t))^q\,dt + \int\limits_c^\beta v(t)(f_0(t))^q\,dt$$

$$= q \int\limits_\alpha^c f_0'(t)(f_0(t))^{q-1} \int\limits_t^c v(s)\,dsdt + q \int\limits_c^\beta (-f_0'(t))(f_0(t))^{q-1} \int\limits_c^t v(s)\,dsdt. \quad (35)$$

Так как

$$f_0(t) \geq \frac{1}{b_1} \left(\int\limits_t^c v \right)^{\frac{1}{p-q}} \int\limits_\alpha^t \left(\int\limits_\alpha^x \rho^{1-p'} \right)^{\frac{q-1}{p-q}} \rho^{1-p'}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{b_1} \frac{p-q}{p-1} \left(\int\limits_t^c v \right)^{\frac{1}{p-q}} \left(\int\limits_\alpha^t \rho^{1-p'} \right)^{\frac{p-1}{p-q}}$$

при $\alpha \leq t \leq c$ и аналогично

$$f_0(t) \geq \frac{1}{b_1} \frac{p-q}{p-1} \left(\int\limits_c^t v \right)^{\frac{1}{p-q}} \left(\int\limits_t^\beta \rho^{1-p'} \right)^{\frac{p-1}{p-q}}$$

при $c \leq t \leq \beta$, имеем

$$\int\limits_\alpha^c f_0'(t)(f_0(t))^{q-1} \int\limits_t^c v(s)\,dsdt \geq \left(\frac{1}{b_1} \frac{p-q}{p-1} \right)^{q-1} (B(\alpha,c))^{\frac{pq}{p-q}},$$

$$\int\limits_c^\beta (-f_0'(t))(f_0(t))^{q-1} \int\limits_c^t v(s)\,dsdt \geq \left(\frac{1}{b_2} \frac{p-q}{p-1} \right)^{q-1} (B^*(c,\beta))^{\frac{pq}{p-q}}.$$

Поэтому согласно (35)

$$\left(\int\limits_a^b v(t)|f_0(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \geq q^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p-q}{p-1} \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\frac{1}{b_1^q}(B(\alpha,c))^{\frac{qp}{p-q}} + \frac{1}{b_2^q}(B^*(c,\beta))^{\frac{qp}{p-q}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= q^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p-q}{p-1} \right)^{\frac{1}{q'}} (T(\alpha,\beta))^{\frac{p}{p-q}} \left(\frac{1}{b_1^q} + \frac{1}{b_2^q} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Поскольку $\frac{p}{q} > 1$, то $\left[\left(\frac{1}{b_1^q} + \frac{1}{b_2^q}\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{1}{p}} \geq \left(\frac{1}{b_1^p} + \frac{1}{b_2^p}\right)^{\frac{1}{p}}$. Тем самым

$$\left(\int_a^b v(t)|f_0(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \geq q^{\frac{1}{q}}\left(\frac{p-q}{p-1}\right)^{\frac{1}{q'}}(T(\alpha,\beta))^{\frac{p}{p-q}}\left(\frac{1}{b_1^p} + \frac{1}{b_2^p}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{36}$$

Из (2), (34) и (36) вытекает, что

$$q^{\frac{1}{q}}\left(\frac{p-q}{p-1}\right)^{\frac{1}{q'}} T(\alpha,\beta) \leq J_0(a,b). \tag{37}$$

Из абсолютной непрерывности интеграла легко следует, что $T(\alpha,\beta)$ непрерывна по α,β при $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Значит, из независимости от α,β, $a < \alpha < \beta < b$, правой части (37) имеем

$$q^{\frac{1}{q}}\left(\frac{p-q}{p-1}\right)^{\frac{1}{q'}} T(a,b) \leq J_0(a,b), \tag{38}$$

т. е. существует серединная точка $c \in I$ для (B, B^*) и выполнена оценка (38).

Достаточность. Пусть существует серединная точка $c \in I$ для (B, B^*), т. е. $B(a,c) = B^*(c,b) = T(a,b) < \infty$. Рассуждая так же, как при доказательстве достаточной части теоремы 1, на основании теоремы C имеем

$$\begin{aligned}\int_a^b v(t)|f(t)|^q\,dt &= \int_\alpha^c v(t)|f(t)|^q\,dt + \int_c^\beta v(t)|f(t)|^q\,dt \\ &\leq (\mu^+ B(a,c))^q\left(\int_a^c \rho(s)|f'(s)|^p\,ds\right)^{\frac{q}{p}} + (\mu^+ B^*(c,b))^q\left(\int_c^b \rho(s)|f'(s)|^p\,ds\right)^{\frac{q}{p}} \\ &\leq (\mu^+ T(a,b))^q 2^{\frac{p-q}{p}}\left(\int_\alpha^c \rho(s)|f'(s)|^p\,ds + \int_c^\beta \rho(s)|f'(s)|^p\,ds\right)^{\frac{q}{p}},\end{aligned}$$

т. е. неравенство (2) выполняется с оценкой $J_0(a,b) \leq \mu^+ 2^{\frac{p-q}{pq}} T(a,b)$, которая вместе с (38) дает (32). Теорема 4 доказана.

Замечание 2. Сравнение оценки (32) с оценкой

$$2^{-\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}}\left(\frac{p-q}{p-1}\right)^{\frac{1}{q'}} \widetilde{B} \leq J_0(a,b) \leq 2^{\frac{p-q}{pq}}(p')^{\frac{1}{pq'}} q^{\frac{1}{q}} \widetilde{B},$$

где $\widetilde{B} = \min\limits_{a<c<b} \max\{B(a,c), B(b,c)\}$, полученной для случая $1 \leq q < p < \infty$ в теореме 8.17 из [1], показывает, что оценка в (32) лучше, чем в [1].

Теорема 5. *Пусть $0 < q < p < \infty$, $p > 1$. Если выполняется* (26) *или* (27), *то для наилучшей постоянной $J_0(a,b)$ в* (2) *соответственно имеют место оценки $\mu^- B(a,b) \leq J_0(a,b) \leq \mu^+ B(a,b)$ или $\mu^- B^*(a,b) \leq J_0(a,b) \leq \mu^+ B^*(a,b)$.*

Теорема 6. *Пусть $0 < q < p < \infty$, $p > 1$, и выполняется* (31). *Тогда неравенство* (2) *не выполняется на множестве $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$, т. е. $J_0(a,b) = \infty$.*

Теоремы 5 и 6 доказываются аналогично теоремам 2 и 3 соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Opic B., Kufner A.* Hardy-type inequalities. Harlow: Longman, 1990.

2. *Kufner A., Persson L.-E.* Weighted inequalities of Hardy type. New Jersey; London; Singapore; Hong Kong: World Sci., 2003.

3. *Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E.* The Hardy inequality. About its history and some related results. Pilsen, 2007.

4. *Gogatishvili A., Kufner A., Persson L.-E., Wedestig A.* An equivalence theorem for integral conditions related to Hardy's inequality // Real Anal. Exchange. 2003/2004. V. 29. P. 867–880.

5. *Kufner A., Persson L.-E., Wedestig A.* A study of some constants characterizing the weighted Hardy inequality // Banach Center Publ. Warsaw: Polish Acad. Sci., 2004. V. 64. Orlicz Centenary Volume. P. 135–146.

6. *Drabek P., Kufner A.* Hardy inequality and properties of the quasilinear Sturm–Liouville problem // Rend. Lincei Mat. Appl. 2007. V. 18. P. 125–138.

7. *Oinarov R., Rakhimova S. Y.* Weighted Hardy inequalities and their application to oscillation theory of half-linear differential equations // Eurasian Math. J. 2010. V. 1, N 2. P. 110–124.

8. *Oinarov R., Rakhimova S. Y.* Oscillation and nonoscillation of two terms linear and half-linear equations of higher order // Electron. J. Qual. Theory of Differ. Equ., Hungary. 2010. V. 49. P. 1–15.

9. *Kudabayeva S. Y., Oinarov R.* The criteria of disconjugate of half–linear second order differential equations // Math. J., Kazakhstan. 2010. V. 10, N 2. P. 56–67. (in Russian).

10. *Лизоркин П. И.* О замыкании множества финитных функции в весовом пространстве $W^l_{p,\phi}$ // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 789–792.

11. *Кудрявцев Л. Д.* О плотности финитных функций в весовых пространствах // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 1. С. 46–49.

12. *Oinarov R.* On weighted norm inequalities with three weights // J. London Math. Soc. 1993. V. 48, N 2. P. 103–116.

13. *Persson L.-E., Stepanov V. D.* Weighted integral inequalities with the geometric mean operator // J. Inequal. Appl. 2002. V. 7, N 5. P. 727–746.

14. *Sinnamon G., Stepanov V. D.* The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ // J. Math. Soc. 1996. V. 54, N 2. P. 89–101.

Статья поступила 29 июля 2013 г.

Абылаева Акбота Мухамедяровна, Байарыстанов Аскар Ойнарович,
Ойнаров Рыскул
Евразийский нац. университет им. Л. Н. Гумилева,
ул. Мирзояна, 2, Астана 010080, Казахстан
abylayeva_b@mail.ru, oskar_62@mail.ru, o_ryskul@mail.ru