Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2014. Том 55, № 2

УДК 531.911.5

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ И ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

И. А. Финогенко

Аннотация. Для неавтономных дифференциальных включений вводится понятие предельных дифференциальных включений, изучаются их свойства, исследуются свойства типа инвариантности ω-предельных множеств решений и устанавливается аналог принципа инвариантности Ла-Салля с использованием функций Ляпунова со знакопостоянной производной. Метод исследований в равной степени может применяться для дифференциальных уравнений и при соответствующих предположениях приводит к известным результатам.

Ключевые слова: предельное дифференциальное включение, неавтономная система, полуинвариантное множество, функция Ляпунова, принцип инвариантности.

1. Введение и постановка задачи

Исследование асимптотической устойчивости с использованием функций Ляпунова со знакопостоянными производными восходят к известным теоремам Барбашина — Красовского [1] для автономных систем $\dot{x} = f(x)$, где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ — n-мерное векторное пространство с евклидовой нормой $\|\cdot\|$. При этом требовался дополнительный анализ множества $E(\dot{V} = 0) \overset{\Delta}{=} \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ нулей производной функции Ляпунова $V(x)$ на наличие в нем целых траекторий системы. Выводы, которые можно сделать лишь из свойства знакопостоянства производной $\dot{V}(x)$, позднее были аккумулированы в теореме Ла-Салля, известной как принцип инвариантности (см. [2, с. 190]): для автономного дифференциального уравнения ω-предельное множество решения содержится в наибольшем полуинвариантном подмножестве множества $E(\dot{V} = 0)$. Для неавтономных уравнений на этом пути возникают трудности, связанные с тем, что ω-предельные множества не обладают какими-либо свойствами инвариантности относительно исходных уравнений. Кроме того, возникает вопрос о том, что понимать под множеством $E(\dot{V} = 0)$, так как производная $\dot{V}$ зависит не только от переменной x, но от t.

Попытки преодолеть эти трудности и перенести принцип инвариантности на неавтономные уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

привели к понятиям предельных уравнений, порождаемых сдвигами $f^\tau(t, x) = f(t + \tau, x)$ функции $f : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке междисциплинарного проекта СО РАН № 80, программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 17 и РФФИ (код проекта 13–01–00287–а).

Суть метода предельных уравнений состоит в следующем. Пусть $x(t)$ — ограниченное решение уравнения (1), определенное на промежутке $(\alpha, +\infty)$. Через Λ^+ обозначим ω-предельное множество этого решения. Желая подчеркнуть зависимость Λ^+ от решения $x(t)$ и следуя [2, с. 189]), в дальнейшем полагаем, что $\Lambda^+ = \Lambda^+(x)$. Предположим, что $y_0 \in \Lambda^+(x)$. Тогда существует последовательность точек $x(t_k) \to y_0$ при $t_k \to +\infty$, $t_k \geq \alpha$. Обозначим $y_k(t) = x(t + t_k)$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, $t \geq 0$. Тогда функции $y_k(t)$ являются решениями уравнений

$$\dot{y}_k(t) = f(t + t_k, y_k(t)). \tag{2}$$

При определенных условиях теорема Арцела позволяет для любого отрезка $I = [0, T]$ выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность из последовательности функций $y_k(t)$. Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что сама последовательность равномерно сходится. Возникает вопрос об уравнении, которому удовлетворяет предельная функция $y(t)$. Очевидно, что $y(t) \in \Lambda^+(x)$, поэтому ответ на поставленный вопрос дает некоторое свойство типа инвариантности множества $\Lambda^+(x)$. При условии равномерной непрерывности и ограниченности функции $f(t, x)$ на каждом множестве вида $(\alpha, +\infty) \times K$, где $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество, семейство сдвигов $f^\tau(t, x)$ предкомпактно в некотором полном функциональном пространстве со сходимостью в компактно-открытой топологии. В этом случае для каждой последовательности $t_k \to +\infty$ существует подпоследовательность $\{t_{k_i}\}$ такая, что $f^{t_{k_i}}(t, x) \to f'(t, x)$. Предельное уравнение определяется в виде

$$\dot{x} = f'(t, x), \tag{3}$$

и предельная функция $y(t)$ является его решением. Далее, если $V(t, x)$ — функция Ляпунова, удовлетворяющая неравенству $\dot{V}(t, x) \leq w(t, x) \leq 0$ в силу уравнения (1), то некоторый аналог принципа инвариантности для неавтономного уравнения (1) может быть установлен в терминах так называемой предельной пары (f', w'). Обзор результатов и библиография работ в этом направлении (применительно к более общим функционально-дифференциальным уравнениям $\dot{x}(t) = f(t, x_t(\cdot))$, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$) имеются в [3].

Еще одна возможность для исследований состоит в том, что предельная функция $f'(t, x)$ удовлетворяет равенству

$$\lim_{t_k \to +\infty} \int_0^t f^{t_k}(s, x)\, ds = \int_0^t f'(s, x)\, ds \tag{4}$$

для любого фиксированного $t \geq 0$ при условиях правомерности такого предельного перехода. Отметим также, что при некоторых условиях предельные уравнения могут быть записаны в операторном виде (см. [4–7]).

В данной работе предельные отображения построены на выводе, который можно сделать из одного лишь факта сходимости последовательности абсолютно непрерывных функций $y_k(t)$, установленного в теореме 4.1 из [8]. Сформулируем ее в следующем виде.

Утверждение 1. *Пусть последовательность $\{y_k(\cdot)\}$ абсолютно непрерывных функций $y_k : I \to \mathbb{R}^n$, $I = [a, b]$, удовлетворяет условиям:*

1) $y_k(t) \to y(t)$ при любом фиксированном $t \in I$;

2) $\|\dot{y}_k(t)\| \leq g(t)$ для п. в. $t \in I$, где $g : I \to \mathbb{R}^1$ — суммируемая по Лебегу функция.

Тогда $y(t)$ — абсолютно непрерывная функция такая, что

$$\dot{y}(t) \in \bigcap_{n\geq 1} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k\geq n} \dot{y}_k(t) \tag{5}$$

для п. в. $t \in I$, где $\overline{\mathrm{co}}$ — символ выпуклой замкнутой оболочки множества.

Введем в рассмотрение многозначное, вообще говоря, отображение

$$F'(t,x) = \bigcap_{n\geq 1} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k\geq n} f(t+t_k,x).$$

Из результатов, установленных в данной статье, будет вытекать, что при условии ограниченности функции $f(t,x)$ множество $F'(t,x)$ непустое, выпуклое и компактное, а предельная для последовательности решений $y_k(t)$ уравнений (2) функция $y(t)$ является решением дифференциального включения

$$\dot{x} \in F'(t,x). \tag{6}$$

Это обстоятельство дает основание считать $F'(t,x)$ предельным отображением для функции $f(t,x)$, а включение (6) — предельным дифференциальным включением.

Сравнительный анализ предельной функции $f'(t,x)$ из правой части уравнения (3) и отображения $F'(t,x)$ показывает: если последовательность сдвигов $f^{t_k}(t,x)$ сходится поточечно при каждых фиксированных (t,x) к функции $f'(t,x)$, то

$$F'(t,x) = f'(t,x). \tag{7}$$

Это имеет место в случае сходимости последовательности сдвигов $\{f^{t_k}(t,x)\}$ в компактно-открытой топологии. Точнее, из последовательности точек $\{t_k\}$ можно выделить подпоследовательность, для которой последовательность сдвигов для каждого фиксированного x будет сходиться к некоторой предельной функции $f'(t,x)$ равномерно на каждом конечном отрезке $I = [0,T]$ и поточечно на $R^+ = [0,+\infty)$. Равенство (7) выполняется для отображений F' и f', соответствующих этой подпоследовательности.

При условии ограниченности последовательности функций $t \to f^{t_k}(t,x)$ при каждом фиксированном x по норме пространства $L_1(I,\mathbb{R}^n)$ классов эквивалентности функций, суммируемых по Лебегу, равенство (4) является необходимым и достаточным условием слабой сходимости этой последовательности в пространстве $L_1(I,\mathbb{R}^n)$ для любого отрезка $I = [0,T]$ (см. [9, с. 295]). Тогда из нее можно выделить подпоследовательность выпуклых комбинаций, сходящуюся сильно в этом пространстве (см. [10, с. 79]), из которой, в свою очередь, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду. Таким образом, при условии ограниченности последовательности сдвигов $f^{t_k}(t,x)$ в пространстве $L_1(I,\mathbb{R}^n)$ при каждом фиксированном x для предельной функции $f'(t,x)$, определенной равенством (4), выполняется $f'(t,x) \in F'(t,x)$ для п. в. $t \in [0,+\infty)$ при любом фиксированном x.

Упомянем еще работу [11], где неавтономные системы (1) исследуются при помощи предельной многозначной функции $F^*(x)$, которая определяется следующим образом: для любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n$ и для любого $\epsilon > 0$ существует $T \geq 0$ такое, что $\operatorname*{ess\,sup}_{t\geq T} d(f(t,x),F^*(x)) < \epsilon$ для всех $x \in K$, где d — расстояние от точки до множества в пространстве $\mathbb{R}^n$. Здесь можно утверждать, что $F'(t,x) \subset F^*(x)$ для почти всех t.

В данной работе исследуется дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{8}$$

для которого в разд. 3 с помощью многозначного оператора сдвига $F(t+\tau, x)$ вводятся два типа предельных многозначных отображений, структура которых определяется в соответствии с формулой (5), и изучаются их свойства. В разд. 4 в терминах предельных дифференциальных включений, одно из которых автономно, устанавливаются свойства типа инвариантности ω-предельных множеств решений включения (8) и с использованием функций Ляпунова со знакопостоянной производной доказывается аналог принципа инвариантности.

2. Предварительные сведения и вспомогательные утверждения

Для любых непустых ограниченных подмножеств A и B из пространства $\mathbb{R}^n$ используется обозначение $\rho(B, A) = \sup\limits_{b \in B} d(b, A)$, где $d(b, A) = \inf\limits_{a \in A} \|b - a\|$. Через $A^\epsilon = \{x : d(x, A) < \epsilon\}$ обозначается ϵ-окрестность множества A и через $\overline{A}$ — замыкание множества A. Очевидно, что $\rho(B, A) = \rho(\overline{B}, \overline{A})$ и неравенство $\rho(B, A) < \epsilon$ равносильно тому, что $B \subset A^\epsilon$.

Ниже приведены некоторые определения и факты теории многозначных отображений (см. [12–15]), используемые в дальнейшем.

Пусть $\operatorname{comp} \mathbb{R}^n$ ($\operatorname{conv} \mathbb{R}^n$) — совокупность всех непустых компактных (выпуклых компактных) подмножеств из $\mathbb{R}^n$. Отображение $G : \mathbb{R}^n \to \operatorname{comp} \mathbb{R}^n$ будем называть *полунепрерывным сверху* в точке x_0, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $\|x - x_0\| < \delta$, выполняется $G(x) \subset (G(x_0))^\epsilon$, и соответственно *полунепрерывным снизу*, если $G(x_0) \subset (G(x))^\epsilon$. Полунепрерывность сверху (полунепрерывность снизу) многозначного отображения $G(x)$ означает, что $\rho(G(x), G(x_0)) \to 0$ (соответственно $\rho(G(x_0), G(x)) \to 0$) при $x \to x_0$.

Многозначное отображение $G(x)$ называется *непрерывным* в точке x_0, если оно одновременно полунепрерывно сверху и снизу в этой точке.

Метрика Хаусдорфа в пространстве $\operatorname{comp} \mathbb{R}^n$ определяется равенством (см. [12, с. 223])

$$\operatorname{dist}(A, B) = \max\{\rho(B, A), \rho(A, B)\}.$$

Непрерывность отображений со значениями в $\operatorname{comp} \mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа понимается в обычном для метрических пространств смысле и совпадает с приведенным выше определением непрерывности.

Будем говорить, что точка p принадлежит *нижнему пределу* $\operatorname{Li} A_n$ последовательности множеств $A_1, A_2, \dots \in \operatorname{comp} \mathbb{R}^n$, если любая окрестность точки p пересекается со всеми множествами A_n начиная с некоторого номера. Точка p принадлежит *верхнему пределу* $\operatorname{Ls} A_n$ последовательности $A_1, A_2, \dots$, если любая окрестность точки p пересекается с бесконечным числом множеств A_n. Справедливо следующее утверждение (см. [12, с. 343–345]):

$$p \in \operatorname{Li} A_n \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} d(p, A_n) = 0, \quad p \in \operatorname{Ls} A_n \Leftrightarrow \liminf_{n \to +\infty} d(p, A_n) = 0. \tag{9}$$

Последовательность множеств $A_1, A_2, \dots$ называется *сходящейся* к множеству A, если $A = \operatorname{Li} A_n = \operatorname{Ls} A_n$, при этом используется обозначение $A = \operatorname*{Lim}\limits_{n \to +\infty} A_n$ В дальнейшем без оговорок используем тот факт, что сходимость ограниченной последовательности множеств в пространстве $\mathrm{comp}\,\mathbb{R}^n$ в смысле метрики Хаусдорфа совпадает со сходимостью в смысле операции Lim [14, с. 56].

Для ограниченных множеств $A \subset \mathbb{R}^n$ справедливы равенства (см. [15, с. 50])

$$\overline{\mathrm{co}} A = \mathrm{co}\, \overline{A} = \overline{\mathrm{co}} \overline{A}, \quad (\mathrm{co}\, A)^{\epsilon} = \mathrm{co}(A^{\epsilon}), \tag{10}$$

где символ co (соответственно $\overline{\mathrm{co}}$) обозначает выпуклую (соответственно выпуклую замкнутую) оболочку множества. Отметим также неравенства

$$\rho(\mathrm{co}\, A, \mathrm{co}\, B) \leq \rho(A, B), \quad \mathrm{dist}(\mathrm{co}\, A, \mathrm{co}\, B) \leq \mathrm{dist}\,(A, B), \tag{11}$$

справедливые для любых множеств $A, B \subset \mathrm{comp}\,\mathbb{R}^n$. Из (11) вытекает, что если отображение $G : \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}\,\mathbb{R}^n$ полунепрерывно сверху, полунепрерывно снизу или непрерывно, то соответствующими свойствами обладает и отображение $\mathrm{co}\, G : \mathbb{R}^n \to \mathrm{conv}\,\mathbb{R}^n$, $(\mathrm{co}\, G)(x) = \mathrm{co}\, G(x)$.

Пусть $J = [a, b]$ — отрезок числовой прямой $\mathbb{R}^1$ с мерой Лебега μ. Будем использовать определение измеримости отображения $H : J \to \mathrm{comp}\,\mathbb{R}^n$ из [13]. Измеримость многозначного отображения $H(t)$ эквивалентна свойству Лузина: для любого $\epsilon > 0$ существует замкнутое множество $J_\epsilon \subset J$ такое, что $\mu(J \backslash J_\epsilon) < \epsilon$ и сужение $H(t)$ на J_ϵ непрерывно. Отметим, что полунепрерывное сверху или полунепрерывное снизу отображение $H(t)$ измеримо.

Ниже рассматриваем неограниченные измеримые множества и измеримые многозначные отображения, определенные на всей числовой оси $\mathbb{R}^1$ или на множествах вида $R_\gamma = [\gamma, +\infty)$. Множество $E \subset \mathbb{R}^1$ называется *измеримым*, если для любого натурального n измеримо множество $E(n) = E \cap [-n, n]$ и тогда мера множества E определяется равенством $\mu E = \lim\limits_{n \to +\infty} \mu E(n)$ (см. [16]). Пусть E — измеримое множество, $h > 0$ и $E(t_0, h) = E \cap [t_0 - h, t_0 + h]$. Если

$$\lim_{h \to +0} \frac{\mu E(t_0, h)}{2h} = 1,$$

то t_0 называется *точкой плотности* множества E. Функция $f : J \to \mathbb{R}^1$ *аппроксимативно непрерывна* в точке $t_0 \in (a, b)$, если существует измеримое множество E, имеющее t_0 точкой плотности, такое, что $f(t)$ непрерывна в точке t_0 вдоль множества E. Справедлива (см. [16, с. 285])

Теорема Данжуа. *Если $f(t)$ — измеримая почти везде конечная функция на отрезке J, то она аппроксимативно непрерывна почти во всех точках из J.*

Свойство функции $f(t)$ быть аппроксимативно непрерывной в точке t_0 локально. Поэтому теорему Данжуа можно распространить на измеримые функции, определенные и почти всюду конечные на всей числовой прямой. Для это достаточно применить теорему Данжуа к любому отрезку $[-n, n]$ и затем удалить из числовой прямой объединение $N_0 = \bigcup\limits_n N_n$ множеств $N_n \subset [-n, n]$ нулевой меры, на которых свойство аппроксимативной непрерывности функции $f(t)$ не выполняется. Очевидно, что $\mu N_0 = 0$ и в оставшихся точках функция $f(t)$ аппроксимативно непрерывна. Более того, доказательство теоремы Данжуа целиком опирается лишь на свойство Лузина измеримых функций, так что эта теорема останется справедливой для любых почти везде конечных отображений, обладающих свойством Лузина. В частности, все вышесказанное справедливо для измеримых отображений $H : \mathbb{R}^1 \to \mathrm{comp}\,\mathbb{R}^n$, и, таким образом, справедлива

Лемма 1. *Пусть $H : \mathbb{R}^1 \to \operatorname{comp}\mathbb{R}^n$ — измеримое отображение. Тогда существует множество $N_0 \subset \mathbb{R}^1$ нулевой меры такое, что $H(t)$ аппроксимативно непрерывно в каждой точке $t \in \mathbb{R}^1 \backslash N_0$.*

Всюду в этом разделе рассматриваем измеримые и ограниченные на каждом множестве $[\gamma, +\infty)$ отображения $H : \mathbb{R}^1 \to \operatorname{comp}\mathbb{R}^n$ и через N_0 обозначаем любое множество, существование которого утверждается в лемме 1.

Для любого числа τ отображение $H^\tau(t) = H(t+\tau)$ называется *сдвигом* отображения $H(t)$. Для любых чисел t, b и множества N нулевой меры обозначаем

$$H(t,b;N) = \Big\{ \bigcup_{\tau > b} H^\tau(t) : t+\tau \notin N \Big\}, \quad H_N(t) = \bigcap_{b>0} \overline{\text{co}} H(t,b;N).$$

Лемма 2. *Для любых чисел t и b справедливо равенство*

$$\overline{\text{co}} H(t,b;N_0) = \bigcap_{\mu N = 0} \overline{\text{co}} H(t,b;N). \tag{12}$$

Доказательство. Покажем, что для любого множества $N \subset \mathbb{R}^1$ с мерой $\mu N = 0$ выполняется

$$H(t,b;N_0) \subset \overline{H(t,b;N)}. \tag{13}$$

Пусть $y_0 \in H(t,b;N_0)$. Тогда найдется точка $t_0 \in (t+b, +\infty)\backslash N_0$ такая, что $y_0 \in H(t_0)$ и отображение $H(t)$ непрерывно в точке t_0 вдоль некоторого измеримого множества E, для которого эта точка является точкой плотности. Тогда t_0 будет точкой плотности для любого множества $E' = E\backslash N$, $\mu N = 0$, поэтому будет предельной точкой множества E'. Следовательно, $H(t_i) \to H(t_0)$ для некоторой последовательности точек $t_i \to t_0$, $t_i \in E'$, стало быть, найдется последовательность точек $y_i \in H(t_i)$, сходящаяся к y_0. Так как $t_i \in (t+b, +\infty)\backslash N$ начиная с некоторого достаточно большого номера i_0, то $y_0 \in \overline{H(t,b;N)}$ и тем самым (13) установлено.

Из включения (13) получаем, что $H(t,b;N_0) \subset \bigcap\limits_{\mu N=0} \overline{\text{co}} H(t,b;N)$. Следовательно, $\bigcap\limits_{\mu N=0} \overline{\text{co}} H(t,b;N) \neq \varnothing$ и $\overline{\text{co}} H(t,b;N_0) \subset \bigcap\limits_{\mu N=0} \overline{\text{co}} H(t,b;N)$. Обратное включение очевидно, и тогда справедливо (12). Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любого множества N с мерой $\mu N = 0$ множество $H_N(t)$ непусто, выпукло, компактно и справедливо равенство*

$$\lim_{b \to +\infty} \operatorname{dist}(\overline{\text{co}} H(t,b;N), H_N(t)) = 0. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $b_k \to +\infty$ — произвольная последовательность. Тогда из нее можно выделить бесконечно большую монотонно возрастающую подпоследовательность, и для краткости будем считать, что сама последовательность обладает этими свойствами. Обозначим

$$P_N(t) = \bigcap_{k \geq 1} \overline{\text{co}} H(t,b_k;N).$$

Так как последовательность непустых компактных множеств $\overline{\text{co}} H(t,b_k;N)$ монотонно убывает по включению (при любом фиксированном t и для достаточно больших номеров k таких, что $t + b_k > \gamma$), из теоремы в [12, с. 422] получаем, что множество $P_N(t)$ непусто, компактно и справедливо равенство

$$\lim_{k\to+\infty} \operatorname{dist}(\overline{\mathrm{co}}H(t, b_k; N), P_N(t)) = 0. \tag{15}$$

Легко видеть, что множество $P_N(t)$ совпадает с $H_N(t)$ и как пересечение выпуклых множеств выпукло. Итак, из любой последовательности $b_k \to +\infty$ можно выделить подпоследовательность, для которой выполняется (15) с одним и тем же значением предела, равным $H_N(t)$. Тогда справедливо равенство (14). Лемма доказана.

Обозначим

$$H^*(t) = \bigcap_{b>0} \bigcap_{\mu N=0} \overline{\mathrm{co}}H(t, b; N). \tag{16}$$

Лемма 4. *Множество $H^*(t)$ непусто, выпукло, компактно, и справедливы равенства*

$$\lim_{b\to+\infty} \operatorname{dist}(\overline{\mathrm{co}}H(t, b; N_0), H^*(t)) = 0, \tag{17}$$

$$H^*(t) = \bigcap_{b>0} \overline{\mathrm{co}}H(t, b; N_0). \tag{18}$$

Доказательство вытекает из лемм 2 и 3.

Многозначное отображение $H^*(t)$, определенное равенством (16) или, эквивалентно, любым из равенств (17), (18), будем называть *предельным для семейства сдвигов* $\{H^\tau(t)\}$.

Замечание 1. Множество $H^*(t)$ не зависит от t, т. е. $H^*(t) \equiv H^* \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^1$ для всех $t \in \mathbb{R}^n$. Действительно, в силу (17) для любого $b' > 0$ выполняется

$$\lim_{b\to+\infty} \operatorname{dist}(\overline{\mathrm{co}}H(t, b + b'; N_0), H^*(t)) = 0.$$

С другой стороны, для любых b и b' справедливо равенство

$$\overline{\mathrm{co}}H(t, b + b'; N_0) = \overline{\mathrm{co}}H(t + b', b; N_0),$$

поэтому

$$\lim_{b\to+\infty} \operatorname{dist}(\overline{\mathrm{co}}H(t, b + b'; N_0), H^*(t + b')) = 0.$$

Следовательно, $H^*(t) = H^*(t + b')$, и легко видеть, что $H^*(t) = H^*(t')$ для любых $t, t' \in \mathbb{R}^1$.

С учетом замечания 1 всюду в дальнейшем зависимость отображения $H^*(t)$ от t не указываем, полагая $t = 0$ в равенствах (16)–(18).

Замечание 2. Для непрерывных функций $N_0 = \varnothing$. Определение множества H^* с использованием точек аппроксимативной непрерывности отображения $H(t)$ связано со стремлением избежать излишнего расширения этого множества для измеримых отображений $H(t)$. Для примера рассмотрим функцию $\chi(t)$, равную нулю в иррациональных точках числовой прямой и единице — в рациональных. Тогда каждое иррациональное число t является точкой аппроксимативной непрерывности функции $\chi(t)$ и $\chi^* = 0$. Если же в равенстве (18) допустить, что $N_0 = \varnothing$, то получили бы $\chi^* = [0, 1]$. По сути дела H^* — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее все предельные значения многозначной функции $H(t)$, когда $t \to +\infty$, $t \notin N$ для любого множества N с мерой $\mu N = 0$. Это тот же прием, который использовался в работах А. Ф. Филиппова при доопределении (в конечных точках) разрывных измеримых по (t, x) функций $f(t, x)$ из правых частей дифференциальных уравнений с разрывной правой частью (см. [15, с. 66]).

Лемма 5. *Множество H^* представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных значений функций $h(t) \in H(t)$ при условии, что $t \to +\infty$, $t \notin N_0$.*

Доказательство. Лемма будет доказана, если установим, что множество H^* представляет собой выпуклую замкнутую оболочку пределов всех сходящихся последовательностей $\{h(t_n)\}$ таких, что

$$h(t_n) \in H(t_n), \quad t_n \to +\infty,\ t_n \notin N_0. \tag{19}$$

Обозначим $P(b) = H(b; N_0) = \{\bigcup H(\tau) : \tau \in (b, +\infty)\backslash N_0\}$ и $P^* = \bigcap\limits_{b>0} \overline{P(b)}$. Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 3, убеждаемся, что P^* — непустое компактное множество и

$$\lim_{b\to+\infty} \operatorname{dist}(\overline{P(b)}, P^*) = 0. \tag{20}$$

Из соотношений (10), (11), равенства (20) и леммы 4 вытекает, что $\operatorname{co} P^* = H^*$. Таким образом, осталось доказать, что P^* — множество пределов всех последовательностей со свойством (19).

Пусть $b_n \to +\infty$ — произвольная последовательность. Из равенства (20) и свойств операций Lim, Li и Ls [12, с. 344–347] заключаем, что

$$\operatorname{Li} P(b_n) = \operatorname{Ls} P(b_n) = P^*. \tag{21}$$

Возьмем произвольный элемент $p \in P^*$. Из (9) и (21) вытекает, что существует последовательность $p_n \in P(b_n)$, сходящаяся к p. Значит, найдется последовательность элементов $h(t_n)$, удовлетворяющих условиям (19) и таких, что $p_n = h(t_n) \to p$.

Обратно, пусть p — предел некоторой сходящейся последовательности $\{h(t_n)\}$ со свойством (19). Тогда, очевидно, $h(t_{k_n}) \in P(b_n)$, если только $t_{k_n} > b_n$. Таким образом, p является пределом некоторой подпоследовательности последовательности $\{h(t_n)\}$. Еще раз воспользовавшись соотношениями (9) и (21), заключаем, что $p \in P^*$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $H : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — ограниченная измеримая функция. Тогда $H^* = [\alpha, \beta]$, где*

$$\alpha = \lim_{b\to+\infty} \inf_{t\in(b,+\infty)\backslash N_0} H(t), \quad \beta = \lim_{b\to+\infty} \sup_{t\in(b,+\infty)\backslash N_0} H(t).$$

Доказательство вытекает из леммы 5 и определения точек α и β.

Для произвольной последовательности $t_k \to +\infty$ и любого числа t обозначим $H^n(t) = \{\bigcup H(t + t_k) : k \geq n\}$. Так же, как при доказательстве леммы 3, убеждаемся, что множество

$$H'(t) = \bigcap_{n\geq 1} \overline{\operatorname{co}} H^n(t) \tag{22}$$

непустое, выпуклое, компактное и справедливо равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(\overline{\operatorname{co}} H^n(t), H'(t)) = 0. \tag{23}$$

Многозначное отображение $H' : \mathbb{R}^1 \to \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$, определенное равенством (22) или, эквивалентно, равенством (23), будем называть *предельным для семейства сдвигов $\{H^\tau(t)\}$ относительно последовательности $\{t_k\}$.*

Лемма 7. *Для любого предельного относительно последовательности $t_k \to +\infty$ отображения $H'(t)$ справедливы следующие утверждения.*

1. *$H'(t)$ измеримо.*

2. *Существует множество $N_0' \subset \mathbb{R}^1$ нулевой меры (свое для каждого отображения $H'(t)$) такое, что для любого $t \in \mathbb{R}^n \backslash N_0'$ выполняется*

$$H'(t) \subset H^*. \tag{24}$$

3. *Множество $H'(t)$ представляет собой выпуклую замкнутую оболочку предельных точек всех последовательностей $h_k \in H(t+t_k)$.*

Доказательство. Отображение $H'(t)$ получается из измеримых отображений $H^{t_k}(t)$ счетным множеством операций объединения, перехода к выпуклой замкнутой оболочке и пересечения, следовательно, является измеримым отображением (см. [13]).

Докажем утверждение 2. Исходя из свойства конгруэнтности измеримых по Лебегу множеств [16, с. 87], заключаем, что любое множество вида $N_0 - t_k$ измеримо и имеет нулевую меру. Тогда множество $N_0' = \{\bigcup(N_0 - t_k) : k \geq 1\}$ также измеримо и имеет нулевую меру. Пусть $t \notin N_0'$. Тогда, очевидно, $t + t_k \notin N_0$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ и для любого $b > 0$ существует номер n_b такой, что выполняется $\overline{\text{co}} H^n(t) \subset \overline{\text{co}} H(b; N_0)$ для всех $n \geq n_b$. Включение (24) вытекает из (22) и (18) с учетом замечания 1 при $t = 0$.

Утверждение 3 доказывается аналогично лемме 4 с использованием определения многозначного отображения $H^n(t)$ и равенства (23). Лемма доказана.

Для любого множества $A \in \operatorname{comp} \mathbb{R}^n$ через $\overline{\text{ext}} \operatorname{co} A$ обозначим замыкание всех крайних точек множества $\operatorname{co} A$. Тогда в соответствии с теоремой Крейна — Мильмана (см. [17, с. 973–975]) верны следующие соотношения: $\overline{\text{ext}} \operatorname{co} A \subset A$, $\operatorname{co} \overline{\text{ext}} \operatorname{co} A = \operatorname{co} A$.

Определим многозначные отображения $(\operatorname{co} H)(t) = \operatorname{co} H(t)$, $(\overline{\text{ext}} \operatorname{co} H)(t) = \overline{\text{ext}} \operatorname{co} H(t)$.

Лемма 8. *Справедливы равенства*

$$(\overline{\text{ext}} \operatorname{co} H)^* = H^* = (\operatorname{co} H)^*, \quad (\overline{\text{ext}} \operatorname{co} H)'(t) = H'(t) = (\operatorname{co} H)'(t). \tag{25}$$

Доказательство. Если многозначное отображение $H(t)$ измеримо, то отображение $\operatorname{co} H(t)$ также измеримо. Из леммы 1.1 в [18] следует, что для непрерывного отображения $\operatorname{co} H(t)$ многозначное отображение $\overline{\text{ext}} \operatorname{co} H(t)$ полунепрерывно снизу. Тогда из свойства Лузина отображения $\operatorname{co} H(t)$ вытекает, что отображение $\overline{\text{ext}} \operatorname{co} H(t)$ измеримо. Следовательно, предельные отображения для отображений $\operatorname{co} H(t)$ и $\overline{\text{ext}} \operatorname{co} H(t)$ определены и принимают значения в пространстве $\operatorname{conv} \mathbb{R}^n$. Равенства (25) вытекают из определений и равенств $\operatorname{co} \bigcup \operatorname{co} A_j = \operatorname{co} \bigcup A_j = \operatorname{co} \bigcup \overline{\text{ext}} \operatorname{co} A_j$, справедливых для любых компактных множеств A_j, где знак объединения распространяется на произвольное множество индексов j. Лемма доказана.

3. Предельные дифференциальные включения

Для отображения $F : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{comp} \mathbb{R}^n$ определим *предельное многозначное отображение*

$$F^*(x) = \bigcap_{b>0} \bigcap_{\mu N = 0} \overline{\text{co}} F(b, x; N), \tag{26}$$

где $F(b,x;N) = \{\bigcup F(\tau,x) : \tau \in (b,+\infty)\backslash N\}$.

Для последовательности $t_k \to +\infty$ (одной и той же для любой точки $(t,x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$) *определим предельное относительно этой последовательности отображение*

$$F'(t,x) = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\mathrm{co}} F^n(t,x), \tag{27}$$

где $F^n(t,x) = \{\bigcup F(t+t_k,x) : k \geq n\}$.

Сформулируем предположения, в рамках которых будут изучаться свойства предельных отображений $F^*(t,x)$ и $F'(t,x)$.

A1. Для любого числа γ существует константа $M > 0$ такая, что для любых точек $(t,x) \in [\gamma,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$|F(t,x)| \leq M(1+\|x\|), \tag{28}$$

где $|F(t,x)| = \mathrm{dist}(0,F(t,x))$.

A2. Для любого фиксированного x многозначное отображение $t \to F(t,x)$ измеримо.

A3. Многозначное отображение $x \to F(t,x)$ полунепрерывно сверху в каждой точке x равномерно при $t \to +\infty$, т. е. для любого $\epsilon > 0$ существуют числа $\gamma = \gamma(\epsilon,x) > 0$ и $\delta = \delta(\epsilon,x) > 0$ такие, что выполняется

$$F(t,x') \subset (F(t,x))^{\epsilon} \tag{29}$$

для всех $t > \gamma$ и $\|x'-x\| < \delta$.

Отметим, что условие A3 равносильно условию

$$\lim_{x' \to x,\, t \to +\infty} \beta(F(t,x'),F(t,x)) = 0.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* A1–A3. *Тогда отображение* $F^* : \mathbb{R}^n \to \mathrm{conv}\,\mathbb{R}^n$ *полунепрерывно сверху в каждой точке* $x \in \mathbb{R}^n$ *и выполняется неравенство*

$$|F^*(x)| \leq M(1+\|x\|) \tag{30}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Из условий A1, A2 и леммы 4 вытекает, что для любого x множество $F^*(x)$ непусто, выпукло, компактно и справедливо равенство

$$F^*(x) = \bigcap_{b>0} \overline{\mathrm{co}} F(b,x;N_0), \tag{31}$$

где $F(b,x;N_0) = \{\cup F(\tau,x) : \tau \in (b,+\infty)\backslash N_0\}$ и N_0 — множество нулевой меры (при фиксированном x) такое, что в каждой точке $t \in \mathbb{R}^1\backslash N_0$ отображение $t \to F(t,x)$ аппроксимативно непрерывно.

Зафиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^n$, и пусть $\{x_i\}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к x_0 при $i \to +\infty$. Обозначим $N_0 = \left\{\bigcup N_0^i : i = 0,1,2,\dots\right\}$, где N_0^i — множества нулевой меры такие, что каждое многозначное отображение $t \to F(t,x_i)$, $i = 0,1,2,\dots$, аппроксимативно непрерывно в точках $t \in \mathbb{R}^1\backslash N_0^i$. Тогда $\mu N_0 = 0$ и все эти отображения аппроксимативно непрерывны в точках $t \in \mathbb{R}^1\backslash N_0$. Поэтому для каждого $i = 1,2,\dots$ справедливы равенства

$$F^*(x_i) = \bigcap_{b>0} \overline{\mathrm{co}} F(b,x_i;N_0), \tag{32}$$

где $F(b, x_i; N_0) = \{\cup F(\tau, x_i) : \tau \in (b, +\infty)\backslash N_0\}$.

Пусть $\epsilon > 0$ произвольно. Из условия A3 вытекает, что существуют число $\gamma = \gamma(\epsilon, x_0) > 0$ и номер i_ϵ такие, что $F(t, x_i) \subset (F(t, x_0))^{\epsilon/2}$ для любых $t > \gamma$ и $i \geq i_\epsilon$. Тогда из равенства (3) из [15, с. 50] получаем

$$\overline{\text{co}}F(b, x_i; N_0) \subset (\overline{\text{co}}F(b, x_0; N_0))^\epsilon \tag{33}$$

для любых $b > \gamma$ и $i \geq i_\epsilon$. Учитывая (31), лемму 4 и переходя в (33) к пределу в метрике Хаусдорфа при $b \to +\infty$ при каждом фиксированном $i \geq i_\epsilon$, получаем $F^*(x_i) \subset \overline{(F^*(x_0))^\epsilon}$. Из последнего соотношения следует, что $\beta(F^*(x_i), F^*(x_0)) \to 0$ при $i \to +\infty$, что в силу произвольности последовательности $\{x_i\}$ означает полунепрерывность сверху в точке x_0 многозначного отображения $F^*(x)$. Неравенство (30), очевидно, выполняется ввиду условия A1 и формулы (26). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* A1–A3. *Тогда для любой последовательности $t_k \to +\infty$ и предельного относительно этой последовательности многозначного отображения $F' : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \text{conv}\,\mathbb{R}^n$ справедливы утверждения:*

1) *$F'(t, x)$ полунепрерывно сверху по переменной x равномерно относительно $t \in \mathbb{R}^1$;*

2) *$F'(t, x)$ измеримо по t для любого фиксированного x;*

3) *существует множество N_0' нулевой меры (свое для каждого отображения $F'(t, x)$ и для каждой фиксированной точки x) такое, что*

$$F'(t, x) \subset F^*(x)$$

для всех $t \in \mathbb{R}^1\backslash N_0'$;

4) *существует число $M > 0$ такое, что для любых $(t, x) \in R^{1+n}$ выполняется неравенство*

$$|F'(t, x)| \leq M(1 + \|x\|). \tag{34}$$

Доказательство. Докажем утверждение 1. Для этого нужно показать, что для любого x и произвольного $\epsilon > 0$ существует $\delta = \delta(x, \epsilon) > 0$ такое, что выполняется неравенство

$$\beta(F'(t, x'), F'(t, x)) < \epsilon \tag{35}$$

для всех $t \in \mathbb{R}^1$ и $\|x' - x\| < \delta$.

Из условия A3 получаем, что для любых (t, x) и произвольного $\epsilon > 0$ существуют число $\delta = \delta(x, \epsilon) > 0$ и номер $m = m(x, t, \epsilon)$ такие, что

$$\overline{\text{co}}F^n(t, x') \subset (\overline{\text{co}}F^n(t, x))^\epsilon \tag{36}$$

для всех $n \geq m$ и $\|x' - x\| < \delta$. С учетом равенства (23) перейдем в (36) к пределу в метрике Хаусдорфа при $n \to +\infty$ при каждых фиксированных (t, x'). Тогда $F'(t, x') \subset \overline{(F'(t, x))^\epsilon}$, откуда вытекает (35).

Утверждения 2 и 3 следуют из леммы 7. Неравенство (34) получаем из условия A1 (например, при $\gamma = 0$) и равенства (27). Теорема доказана.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{37}$$

где $F : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \text{comp}\,\mathbb{R}^n$. Под *решением* задачи (37), определенном на промежутке (α, ω), понимается абсолютно непрерывная на каждом отрезке $[t_1, t_2]$, $\alpha' < t_1 < t_2 < \omega$, функция $x(t)$ такая, что ее производная $\dot{x}(t)$ для п. в. $t \in (\alpha, \omega)$ удовлетворяет дифференциальному включению $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$.

Дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F^*(x) \tag{38}$$

называется *предельным* для дифференциального включения (37).

Дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F'(t, x) \tag{39}$$

называется *предельным относительно последовательности* $t_k \to +\infty$, которая определяет отображение $F'(t, x)$.

Теорема 3. *При выполнении условий* A1–A3 *предельные дифференциальные включения* (38), (39) *для любых начальных данных* (t_0, x_0) *имеют решения, любое их решение продолжимо на правый максимальный промежуток существования* $[t_0, +\infty)$ *и любое решение включения* (39) *является одновременно решением включения* (38).

Доказательство. Существование и продолжимость решений включений (38), (39) вытекают из свойств предельных отображений $F^*(x)$ и $F'(t, x)$, установленных в теоремах 1 и 2, и общих теорем существования решений дифференциальных включений (см., например, [13]).

Пусть $y(t)$ — решение включения (39), определенное на некотором промежутке (α, ω), и $\epsilon > 0$ произвольно. Из утверждений 1 и 3 теоремы 2 вытекает, что для любой точки $t \in (\alpha, \omega)$ и любого числа $\eta > 0$ существует число $0 < h < \eta$ такое, что для почти всех $s \in [t, t + h]$ выполняется

$$\dot{y}(s) \in F'(s, y(s)) \subset (F'(s, y(t)))^\epsilon \subset (F^*(y(t)))^\epsilon.$$

Тогда из формулы среднего значения для интеграла Лебега (см. [15, с. 51]) имеем

$$\int\limits_t^{t+h} \dot{y}(s)ds \in h(F^*(y(t)))^\epsilon,$$

откуда вытекает, что

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \in (F^*(y(t)))^\epsilon.$$

Устремляя η к нулю, получаем, что $\dot{y}(t) \in (F^*(y(t)))^\epsilon$ в каждой точке t, в которой производная $\dot{y}(t)$ существует, т. е. почти всюду. Так как $\epsilon > 0$ произвольно, $y(t)$ — решение включения (38). Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* A1–A3 *и* $x(t)$ — *ограниченное решение включения* (37), *определенное на промежутке* $(\alpha, +\infty)$. *Тогда для любой последовательности* $t_k \to +\infty$ *и для любого числа* $T > 0$ *из последовательности функций* $y^k(t) = x(t + t_k)$, $t \in I = [0, T]$, *можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность и предел* $y(t)$ *любой сходящейся на отрезке* I *последовательности* $\{y^k(\cdot)\}$ *является решением включения* (39) *с предельным относительно последовательности* $\{t_k\}$ *многозначным отображением* $F'(t, x)$ *в правой части.*

Доказательство. Так как $x(t)$ — ограниченное решение, существование равномерно сходящейся на любом отрезке I подпоследовательности последовательности функций $y^k(t)$ вытекает из условия A1 и теоремы Арцела.

Пусть последовательность функций $y^k(t)$ равномерно на отрезке I сходится к функции $y(t)$. Так как $\dot{y}^k(t) \in F(t + t_k, y^k(t))$ для почти всех $t \in I$, в соответствии с формулой (5) получаем

$$\dot{y}(t) \in \bigcap_{n\geq 1} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k\geq n} F(t+t_k, y^k(t)) \tag{40}$$

для почти всех $t \in I$. Пусть $\epsilon > 0$ и $t \in I$ произвольны. Из условия A3 и сходимости последовательности функций $y_k(t)$ к $y(t)$ вытекает, что найдется номер $n_{\epsilon,t}$ такой, что

$$F(t+t_k, y^k(t)) \subset (F(t+t_k, y(t)))^{\epsilon}$$

для всех $k \geq n_{\epsilon,t}$. Тогда для любого $n \geq n_{\epsilon,t}$ выполняется

$$\bigcup_{k\geq n} F(t+t_k, y^k(t)) \subset (F^n(t, y(t)))^{\epsilon}.$$

Из последнего включения и леммы 9 [15, с. 50] следует, что

$$\mathrm{co} \bigcup_{k\geq n} F(t+t_k, y^k(t)) \subset (\mathrm{co}\, F^n(t, y(t)))^{\epsilon},$$

тем самым из (40) получаем $\dot{y}(t) \in (\overline{\mathrm{co}} F^n(t, y(t)))^{\epsilon}$ для почти каждого $t \in I$ и для любого номера $n \geq n_{\epsilon,t}$. Так как $\overline{\mathrm{co}} F^n(t, y(t)) \to F'(t, y(t))$ при $n \to +\infty$ в силу произвольности $\epsilon > 0$ имеем $\dot{y}(t) \in F'(t, y(t))$ для почти всех $t \in I$. Теорема доказана.

4. Принцип инвариантности

Будем говорить, что множество $D \subset \mathbb{R}^n$ *полуинвариантно* (*квазиинвариантно*) относительно включения (37), если для любой точки $y_0 \in D$ существует решение $y(t)$ включения (38) (включения (39) с некоторым отображением $F'(t,x)$ в правой части) такое, что $y(0) = y_0$ и $y(t) \in D$ для всех $t \geq 0$. Отметим, что для любого ограниченного решения $x(t)$ дифференциального включения (37) множество $\Lambda^+(x)$ непусто, связно, компактно и $d(x(t), \Lambda^+(x)) \to 0$ при $t \to +\infty$ (см., например, [15, с. 98]).

Лемма 9. *Если выполняются условия* A1–A3, *то для любого ограниченного решения* $x(t)$ *включения* (37), *определенного на промежутке* $(\alpha, +\infty)$, *множество* $\Lambda^+(x)$ *квазиинвариантно.*

Доказательство. Пусть $y_0 \in \Lambda^+(x)$ и $x(t_k) \to y_0$ для последовательности $t_k \to +\infty$. В соответствии с теоремой 4 для любого отрезка $I_1 = [0, T]$ из последовательности функций $y^k(t) = x(t+t_k)$, определенных на I_1, можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{y^{k_{1,s}}(\cdot)\}$, предел $y_1(t)$ которой является решением для включения (39) с предельным относительно последовательности $\{t_k\}$ отображением $F'(t,x)$ в правой части. При этом очевидно, что $y_1(0) = y_0$ и $y_1(t) \in \Lambda^+(x)$ для всех $t \in I_1$. Для отрезка $I_2 = [0, 2T]$ из последовательности $\{y^{k_{1,s}}(\cdot)\}$ также можно выделить сходящуюся к функции $y_2(t)$ подпоследовательность $\{y^{k_{2,s}}(\cdot)\}$, которая в соответствии с теоремой 3 является решением (39) с тем же самым предельным относительно последовательности $\{t_k\}$ отображением $F'(t,x)$ в правой части. При этом $y_2(t) \in \Lambda^+(x)$ для всех $t \in I_2$ и $y_2(t) = y_1(t)$ для всех $t \in I_1$. Продолжая этот процесс, получим последовательность функций $y_m(t)$, определенных на отрезках $I_m = [0, mT]$, которые являются решениями включения (39) с одним и тем же отображением $F'(t,x)$ в правой части и $y_m(t) \in \Lambda^+(x)$ и $y_m(t) = y_{m+1}(t)$ для всех $t \in I_m$, $m = 1, 2, \ldots$. Тогда функция $y(t) = y_m(t)$, $t \in I_m$, корректно определена для любого $t \in [0, +\infty)$, является решением включения (39) и для нее выполняются условия $y(0) = y_0$, $y(t) \in \Lambda^+(x)$ для всех $t \geq 0$. Лемма доказана.

Заметим, что в силу теоремы 3 свойство квазиинвариантности влечет свойство полуинвариантности для любого множества D, в том числе и для множества $\Lambda^+(x)$. Однако для произвольного множества D эти свойства имеют смысл только при условии существования и продолжимости решений включений (39) и (38) для любых начальных данных.

Для непрерывно дифференцируемой функции $V : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ положим

$$\dot{V}^+(t,x) = \sup_{u \in F(t,x)} (V_t + \langle \nabla V, u \rangle), \tag{41}$$

где V_t — производная функции $V(t,x)$ по переменной t, ∇V — градиент функции $V(t,x)$ по переменной x, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — знак скалярного произведения. Согласно [15, с. 116] для любого решения $x(t)$ включения (58) для почти всех t из промежутка существования этого решения выполняется

$$\frac{d}{dt} V(t, x(t)) = V_t + \langle \nabla V(t, x(t)), \dot{x}(t) \rangle \leq \dot{V}^+(t, x(t)). \tag{42}$$

Через $w(t,x) \geq 0$ будем обозначать измеримую по t при любом x, непрерывную по x при почти всех t и ограниченную на каждом множестве $(\gamma, +\infty) \times K$ функцию, где $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество. Будем предполагать также условие

$$\lim_{x' \to x,\, t \to +\infty} |w(t,x') - w(t,x)| = 0, \tag{43}$$

которое означает выполнение для функции $w(t,x)$ условия A3. При этих предположениях существуют предельное для функции $w(t,x)$ отображение $w^*(x)$ и предельное относительно любой последовательности $\{t_k\}$ отображение $w'(t,x)$. Эти отображения в общем случае многозначны. В соответствии с леммой 6

$$w^*(x) = [\alpha(x), \beta(x)], \tag{44}$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ для каждого фиксированного x представляют собой нижний и соответственно верхний пределы функции $w(t,x)$ при $t \to +\infty$, $t \notin N_0$ и N_0 — множество нулевой меры такое, что функция $t \to w(t,x)$ аппроксимативно непрерывна в каждой точке $t \in \mathbb{R}^1 \backslash N_0$.

Лемма 10. *Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ непрерывны.*

Доказательство. Пусть точка x_0 и последовательность $x_i \to x_0$ произвольны. Используя условие (43), такими рассуждениями, как при доказательстве теоремы 1, убеждаемся, что для любого $\epsilon > 0$ существуют число γ и номер i_ϵ такие, что выполняются соотношения

$$\overline{\text{co}} w(b, x_i; N_0) \subset (\overline{\text{co}} w(b, x_0; N_0))^\epsilon, \quad \overline{\text{co}} w(b, x_0; N_0) \subset (\overline{\text{co}} w(b, x_i; N_0))^\epsilon$$

для всех $b > \gamma$ и $i \geq i_\epsilon$. Переходя к пределу при $b \to +\infty$, заключаем, что многозначное отображение $w^*(x)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа. Легко видеть, что непрерывность $w^*(x)$ равносильна непрерывности функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Лемма доказана.

Отметим, что отображение $w'(t,x)$ измеримо по t, непрерывно (вообще говоря, в метрике Хаусдорфа) по x и ограничено на любом множестве вида $(\gamma, +\infty) \times K$, где K — компактное множество.

Лемма 11. *Пусть выполняется условие* A1, *функция $V(t,x)$ ограничена снизу на любом множестве $(\gamma, +\infty) \times K$, где $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество,* *и выполняется неравенство*

$$\dot{V}^{+}(t,x) \le -w(t,x). \tag{45}$$

Предположим, что $x(t)$ *— ограниченное решение включения* (37), *определенное на промежутке* $(\alpha,+\infty)$. *Тогда для любого числа* $T>0$ *из любой последовательности функций* $y^k(t)=x(t+t_k)$ *можно выделить равномерно на отрезке* $I=[0,T]$ *сходящуюся подпоследовательность* $\{y^{k_i}(\cdot)\}$, *предел* $y(t)$ *которой для почти всех* $t\in I$ *удовлетворяет равенству*

$$w'(t,y(t))=0, \tag{46}$$

где $w'(t,x)$ *— предельное относительно последовательности* $\{t_{k_i}\}$ *отображение.*

Доказательство. Существование равномерно сходящейся подпоследовательности последовательности функций $y^k(t)$ вытекает из ограниченности решения $x(t)$, условия A1 и теоремы Арцела. Не ограничивая общности рассуждений, полагаем, что сама эта последовательность равномерно на отрезке I сходится к $y(t)$.

Из условий (45) и (42) получаем, что функция $V(t,x(t))$ невозрастающая и

$$V(t_k+T,y^k(T))-V(t_k,y^k(0)) \le -\int\limits_0^T w(t_k+t,y^k(t))\,dt \le 0. \tag{47}$$

Так как функция $V(t,x(t))$ ограничена снизу, существует $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t,x(t))=c$ и из (47) получаем, что

$$\lim_{k\to+\infty}\int\limits_0^T w(t_k+t,y^k(t))\,dt=0. \tag{48}$$

Из неравенства (43) вытекает, что

$$\lim_{k\to+\infty}|w(t+t_k,y^k(t))-w(t+t_k,y(t))|=0 \tag{49}$$

для любого $t\in I$. Так как

$$\left|\int\limits_0^T w(t+t_k,y^k(t))dt-\int\limits_0^T w(t+t_k,y(t))\,dt\right| \le \int\limits_0^T |w(t+t_k,y^k(t))-w(t+t_k,y(t))|\,dt,$$

из (48), (49) и теоремы Лебега об ограниченной сходимости получаем

$$\lim_{k\to+\infty}\int\limits_0^T w(t_k+t,y(t))\,dt=0. \tag{50}$$

Поскольку $w(t,x)\ge 0$, условие (50) означает сходимость последовательности функций $w_k(t)=w(t_k+t,y(t))$ к нулю в пространстве $L_1(I,\mathbb{R}^1)$, поэтому из нее можно выделить подпоследовательность функций $w_{k_i}(t)$, сходящуюся к нулю почти всюду на отрезке I. Тогда из утверждения 3 леммы 7 следует, что $0=\lim\limits_{k_i\to+\infty} w_{k_i}(t)=w'(t,y(t))$ для п. в. $t\in I$, где $w'(t,x)$ — предельная относительно последовательности $\{t_{k_i}\}$ функция. Следовательно, справедливо равенство (46), и лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть выполняются все условия леммы* 11 *и дополнительно условия* A2, A3. *Тогда для любых* $y_0\in\Lambda^+(x)$ *и* $T>0$ *существуют предельные относительно одной и той же последовательности* $\{t_k\}$ *отображения* $F'(t,x)$,

$w'(t,x)$ и решение $y(t)$ включения (39) *с начальным условием $y(0) = y_0$ такое, что выполняется равенство* (46).

Доказательство вытекает из теоремы 4 и леммы 11.

Теорема 6. *Пусть выполняются все условия теоремы* 5. *Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ включения* (37), *определенного на промежутке $(\alpha, +\infty)$, множество $\Lambda^+(x)$ принадлежит наибольшему квазиинвариантному подмножеству множества*

$$E(\alpha = 0) \stackrel{\Delta}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) = 0\}, \tag{51}$$

где $\alpha(x) = \lim\limits_{b\to+\infty} \inf\limits_{t\in(b,+\infty)\setminus N_0} w(t,x)$.

Доказательство. Пусть $y_0 \in \Lambda^+(x)$. Из теорем 4 и 5 вытекает, что существует последовательность функций $y^k(t)$, равномерно на отрезке $I = [0, T]$ сходящаяся к функции $y(t)$, которая является решением включения (39) с начальным условием $y(0) = y_0$, и выполняется равенство (46). Тогда из равенства (44) и включения $w'(t, y(t)) \subset w^*(y(t))$ вытекает, что $\alpha(y(t)) = 0$ для почти всех $t \in I$. В силу леммы 10 функция $\alpha(y(t))$ непрерывна. Тогда $\alpha(y(0)) = 0$. Теорема доказана.

Замечание 3. Ввиду теоремы 3 в теореме 6 можно утверждать, что множество $\Lambda^+(x)$ содержится в наибольшем полуинвариантном подмножестве множества (51).

Пусть непрерывно дифференцируемая функция $V = V(x)$ не зависит от t. Введем обозначения:

$$\dot V^*(x) = \sup_{u\in F^*(x)} \langle \nabla V(x), u\rangle, \quad \dot V'(t,x) = \sup_{u\in F'(t,x)} \langle \nabla V(x), u\rangle.$$

Теорема 7. *Пусть $x(t)$ — ограниченное решение включения* (37), *определенное на $(\alpha, +\infty)$, выполняются условия* A1–A3 *и неравенство*

$$\dot V^+(t,x) = \sup_{u\in F(t,x)} \langle \nabla V(x), u\rangle \le 0. \tag{52}$$

Тогда

(1) *для любого $y_0 \in \Lambda^+(x)$ существуют предельное относительно некоторой последовательности $\{t_k\}$ отображение $F'(t,x)$ и решение $y(t)$ включения* (39) *с начальным условием $y(0) = y_0$, определенное на промежутке $[0, +\infty)$, такое, что*

$$\dot V'(t, y(t)) = 0 \tag{53}$$

для почти всех $t \ge 0$;

(2) *множество $\Lambda^+(x)$ содержится в наибольшем полуинвариантном подмножестве множества*

$$E(\dot V^* = 0) \stackrel{\Delta}{=} \{x : \dot V^*(x) = 0\}. \tag{54}$$

Доказательство. 1. Из неравенств (52) и (42) вытекает, что функция $V(x(t))$ монотонно не убывает. Так как решение $x(t)$ ограничено, множество $\{\overline{\bigcup x(t)} : t \ge t_0\}$ компактно и в силу непрерывности функция $V(x)$ ограничена на нем. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty} V(x(t)) = c$, и, очевидно, $\Lambda^+(x) \subset \{x : V(x) = c\}$.

Пусть $y_0 \in \Lambda^+(x)$. В силу леммы 9 существуют предельное относительно некоторой последовательности $\{t_k\}$ отображение $F'(t,x)$ и решение $y(t)$ включения (39) с начальным условием $y(0) = y_0$ такие, что $y(t) \in \Lambda^+(x)$ для всех

$t \geq 0$. Тогда
$$\frac{dV(y(t))}{dt} = 0 \tag{55}$$
для всех $t \geq 0$. (В точке $t = 0$ рассматривается правая производная.)

Неравенство $\langle \nabla V(x), u_k \rangle \leq 0$ сохраняется при замене u_k любыми значениями u из выпуклого замыкания множества пределов всех сходящихся последовательностей $\{u_k\}$. Поэтому из (52), леммы 5 и утверждения 3 леммы 7 вытекают неравенства
$$\dot{V}^*(x) \leq 0, \quad \dot{V}'(t, x) \leq 0. \tag{56}$$
Из второго неравенства (56) и равенства (55) получаем (53).

2. Из теоремы 3 следует, что функция $y(t)$ удовлетворяет также дифференциальному включению
$$\dot{y}(t) \in F^*(y(t)) \tag{57}$$
для почти всех $t \geq 0$. В силу теоремы 1 многозначное отображение $F^*(x)$ полунепрерывно сверху и при этом имеет выпуклые компактные значения. Из [15, с. 56] вытекает, что включение (57) равносильно включению $\operatorname{Cont} y(t) \subset F^*(y(t))$ для каждой точки $t \geq 0$, где $\operatorname{Cont} y(t)$ — контингенция функции $y(t)$ в каждой точке t, т. е. представляет собой множество z предельных точек последовательностей $(y(t_i) - y(t))/(t_i - t)$ при $t_i \to t$. (В точке $t = 0$ рассматривается правая контингенция.)

Пусть $z \in \operatorname{Cont} y(t_0)$. Тогда $0 = V(y(t_i)) - V(y(t_0)) = \langle \nabla V(y(t_0)), z \rangle (t_i - t_0) + o(t_i - t_0)$ и при $t_i \to t_0$ получаем $0 = \langle \nabla V(y_0)), z \rangle \leq \dot{V}^*(y_0)$. Из первого неравенства (56) вытекает $y_0 \in E(\dot{V}^* = 0)$, следовательно, справедливо равенство (54). Теорема доказана.

Замечание 4. Наряду с включением (37) рассмотрим также включения
$$\dot{x} \in \operatorname{co} F(t, x), \tag{58}$$
$$\dot{x} \in \overline{\operatorname{ext}} \operatorname{co} F(t, x). \tag{59}$$

В силу леммы 8 при выполнении условий A1, A2 предельные отображения для многозначных отображений из правых частей (37), (58) и (59) совпадают с $F'(t, x)$ и $F^*(x)$. Так как множество $\operatorname{co} F(t, x)$ представляет собой выпуклую замкнутую оболочку множества всех своих крайних точек $\operatorname{ext} \operatorname{co} F(t, x)$, в силу леммы 8 из [15, с. 50] значение $\dot{V}^+(t, x)$ не изменится при замене в формуле (41) множества $F(t, x)$ множеством $\operatorname{ext} \operatorname{co} F(t, x)$ или множеством $\operatorname{co} F(t, x)$. Таким образом, все результаты разд. 3 и 4 данной статьи останутся справедливыми и для ограниченных решений включений (58) и (59).

Условия A1–A3 обеспечивают существование решений включений (38) и (39) в теореме 3, а также справедливость утверждения теоремы 4 для любого ограниченного решения включения (37). Но условия существования решений включения (37) требуют дополнительного рассмотрения. С учетом вышесказанного приведем условия существования и продолжимости решений включений (37), (58), (59).

A$'$1. Условие подлинейного роста: $|F(t, x)| \leq l(t)(1 + \|x\|)$, где $l(t)$ — интегрируемая по Лебегу на каждом конечном отрезке функция.

A$'$2. Для любого фиксированного x многозначное отображение $t \to F(t, x)$ измеримо.

A$'$3. $F(t, x)$ полунепрерывно сверху в каждой точке x для любого фиксированного t.

A$'$4. $F(t,x)$ полунепрерывно снизу в каждой точке x для любого фиксированного t.

При выполнении условий A$'$1–A$'$3 включение (58) (или включение (37) с выпуклой правой частью) для любых начальных данных (t_0, x_0) имеет решение, которое может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования $[t_0, +\infty)$. Это вытекает из того, что условия A$'$1–A$'$3 будут выполняться также и для отображения $\mathrm{co}\, F(t,x)$ и тогда можно воспользоваться общими теоремами существования и продолжимости для дифференциальных включений с выпуклой правой частью (см. [13]).

При выполнении условий A$'$1–A$'$4 теоремы существования и продолжимости решений будут справедливы включений (37), (59). Эти утверждения (применительно к конечномерному пространству $\mathbb{R}^n$) вытекают из результатов статьи [18].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
2. *Руш Н., Абетс М., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.
3. *Андреев А. С.* Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2009. № 9. С. 4–55.
4. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equation // J. Differ. Equations. 1977. V. 23. P. 216–223.
5. *Artstein Z.* Topological dynamics of ordinary differential equations // J. Differ. Equations. 1977. V. 23. P. 224–243.
6. *Artstein Z.* The limiting equations of nonautonomous ordinary differential equations // J. Differ. Equations. 1977. V. 25. P. 184–202.
7. *Artstein Z.* Uniform asymptotic stability via limiting equations // J. Differ. Equations. 1978. V. 27. P. 172–189.
8. *Davy J. L.* Properties of solution set of a generalized differential equation // Bull. Austral. Math. Soc. 1972. V. 6. P. 379–398.
9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
10. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
11. *Logemann H., Ryan E. P.* Non-autonomous systems: asymptotic behaviour and weak invariance principles // J. Differ. Equations. 2003. V. 189. P. 440–460.
12. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1966. Т. 1.
13. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005.
14. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1969. Т. 2.
15. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
16. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Гостехиздат, 1957.
17. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.
18. *Толстоногов А. А., Финогенко И. А.* О решениях дифференциальных включений с полунепрерывной снизу невыпуклой правой частью в банаховом пространстве // Мат. сб. 1984. Т. 125, № 2. С. 199–230.

Статья поступила 8 июля 2012 г.

Финогенко Иван Анатольевич
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
fin@icc.ru