Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2014. Том 55, № 2

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ КРИТИЧЕСКИХ ПОДГРУПП

В. Н. Семенчук, В. Ф. Велесницкий

Аннотация. Изучается строение конечных групп, у которых минимальные не $\mathfrak{H}$-группы ($\mathfrak{H}$ — насыщенная наследственная формация) обобщенно субнормальны. В частности, получено детальное описание строения конечных групп, у которых группы Шмидта $\mathfrak{F}$-достижимы ($\mathfrak{F}$ — насыщенная наследственная формация с решеточным свойством).

Ключевые слова: формация с решеточным свойством, корадикал, обобщенно субнормальная подгруппа, группа Шмидта, критическая подгруппа.

Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечны. Важнейшей задачей теории конечных групп является задача изучения строения конечных групп, которые не принадлежат некоторому классу групп $\mathfrak{F}$, а все собственные подгруппы которых принадлежат $\mathfrak{F}$. В настоящее время такие группы называются *минимальными не $\mathfrak{F}$-группами* (*критическими группами*).

Начало исследований критических групп восходят к работе Миллера и Морено [1], в которой изучены минимальные неабелевы группы (группы Миллера — Морено). Следующий важный шаг в данном направлении сделал в 1924 г. О. Ю. Шмидт в работе [2], в которой изучены минимальные ненильпотентные группы (группы Шмидта). Хупперт в [3], а затем Дерк в [4] изучили минимальные несверхразрешимые группы. В [5] В. Н. Семенчуком рассмотрены разрешимые минимальные не $\mathfrak{F}$-группы для произвольных насыщенных наследственных формаций $\mathfrak{F}$.

Важность изучения критических групп следует из того факта, что любая конечная группа, не принадлежащая некоторому классу групп $\mathfrak{F}$, содержит минимальную не $\mathfrak{F}$-группу. Как показали исследования многих ведущих математиков мира, минимальные не $\mathfrak{F}$-группы играют важную роль при выяснении строения конечных групп.

В частности, в [6] В. Н. Семенчуком начато исследование строения конечных групп, у которых группы Шмидта субнормальны. Следующий важный шаг в данном направлении был сделан В. С. Монаховым и В. Н. Княгиной в [7]. Полное описание таких групп получено В. А. Ведерниковым в [8].

В теории конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-достижимости (обобщенной субнормальности), предложенное Кегелем в [9]. Настоящая работа посвящена изучению строения конечных групп, у которых минимальные не $\mathfrak{H}$-группы ($\mathfrak{H}$ — насыщенная наследственная формация) обобщенно субнормальны. В частности, получено детальное описание строения конечных групп, у которых группы Шмидта $\mathfrak{F}$-

достижимы ($\mathfrak{F}$ — насыщенная наследственная формация с решеточным свойством).

Предварительные сведения

Необходимые обозначения и определения можно найти в [10]. Напомним лишь некоторые из них.

Если $\mathfrak{F}$ — класс групп и G — группа, то *корадикал* $G^{\mathfrak{F}}$ — пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$. *Классом Фиттинга* называется класс $\mathfrak{X}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{X}$-подгрупп. *Гомоморф* — класс групп, замкнутый относительно фактор-групп. *Формация* — класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *наследственной*, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $H \leq G$ вытекает, что $H \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная формация. Обозначим через $\pi(\mathfrak{F})$ множество всех простых чисел p, для которых в $\mathfrak{F}$ имеется неединичная p-группа; $G_{\mathfrak{X}}$ — $\mathfrak{X}$-радикал группы G, т. е. произведение всех нормальных $\mathfrak{X}$-подгрупп ($\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп) группы G.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — непустые формации конечных групп. Напомним, что *произведением формаций* называется множество $\mathfrak{F}\mathfrak{X} = \{G \mid G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{F}\}$.

Если $\mathfrak{F}$ — класс групп, то группа называется *минимальной не $\mathfrak{F}$-группой* (*критической группой*), если она не принадлежит $\mathfrak{F}$, а любая ее собственная подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$. Множество всех таких минимальных не $\mathfrak{F}$-групп обозначается через $M(\mathfrak{F})$. Минимальная ненильпотентная группа называется *группой Шмидта.*

Напомним, что группа G называется *p-замкнутой* (*p-нильпотентной*), если ее силовская p-подгруппа (силовское p-дополнение) нормальна в G, и *p-разложимой*, если она одновременно p-замкнута и p-нильпотентна. Если фактор-группа $G/F(G)$ нильпотентна, то группа G называется *метанильпотентной.*

В теории классов конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-достижимости. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппу H называют *$\mathfrak{F}$-субнормальной в смысле Кегеля* или *$\mathfrak{F}$-достижимой*, если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Очевидно, что любая $\mathfrak{N}$-достижимая ($\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп) группа субнормальна, и наоборот.

Напомним, что некоторое множество подгрупп $\mathfrak{M}$ конечных групп G образует решетку, если $A \cap B \in \mathfrak{M}$, $\langle A, B\rangle \in \mathfrak{M}$ для любых двух подгрупп A и B из $\mathfrak{M}$.

Согласно классическому результату Виландта множество всех субнормальных подгрупп в любой конечной группе образует решетку. Кегель [9] и Л. А. Шеметков [10] поставили задачу отыскания новых формаций $\mathfrak{F}$, обладающих тем свойством, что множество всех $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп в любой конечной группе образует решетку. В настоящее время такие формации называются *формациями с решеточным свойством.* Полное решение данной задачи о нахождении насыщенных наследственных формаций с решеточным свойством дано в [11]. В частности, из полученных результатов следует, что формации всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$, всех p-разложимых групп обладают решеточным свойством.

В следующих леммах приводятся известные свойства обобщенных субнормальных подгрупп, которые сыграли важную роль при доказательстве основных результатов.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, H и N — подгруппы группы G, причем N нормальна в G. Тогда*

1) *если H $\mathfrak{F}$-достижима в G, то HN $\mathfrak{F}$-достижима в G и HN/N $\mathfrak{F}$-достижима в G/N;*

2) *если $N \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$-достижима в G тогда и только тогда, когда H/N $\mathfrak{F}$-достижима в G/N.*

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H — подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G;*

2) *если H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то $H \cap K$ — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа K для любой подгруппы K группы G;*

3) *если H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то $H^{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа G;*

4) *если H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы K и K — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G.*

Далее приведем одно из ключевых свойств критических подгрупп.

Лемма 3. *Каждая группа G, не принадлежащая некоторому классу групп $\mathfrak{X}$, содержит по крайней мере одну минимальную не $\mathfrak{X}$-подгруппу.*

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех простых чисел, любая минимальная не $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G разрешима и $\mathfrak{F}$-достижима. Тогда в группе G произвольная минимальная нормальная подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Если N разрешима, то она является p-группой. Поскольку по условию $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, то $N \in \mathfrak{F}$.

Пусть N неразрешима. Если $N \notin \mathfrak{F}$, то по лемме 3 N содержит минимальную не $\mathfrak{F}$-подгруппу K. Согласно условию K разрешима и $\mathfrak{F}$-достижима в G. Очевидно, что $K^{\mathfrak{F}} \neq 1$. По лемме 2 $K^{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа группы G. Очевидно, что $1 \neq K^{\mathfrak{F}} \subseteq F(G)$. Тогда $N \cap F(G)$ — неединичная нормальная подгруппа группы G. Так как N неразрешима, $N \cap F(G)$ — собственная подгруппа N, что невозможно. Лемма доказана. $\square$

Пусть K — подгруппа группы G. Подгруппа H называется *добавлением к подгруппе* K, если $KH = G$ и $KH_1 \neq G$ для любой подгруппы H_1 из H, отличной от H. Понятно, что любая подгруппа обладает по крайней мере одним добавлением. Следующая лемма характеризует их известное свойство.

Лемма 5. *Подгруппа H является добавлением к нормальной подгруппе K в группе G тогда и только тогда, когда $HK = G$ и $H \cap K \subseteq \Phi(H)$.*

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — гомоморф, содержащий все нильпотентные группы, R — подгруппа группы G, порожденная всеми минимальными не $\mathfrak{F}$-подгруппами группы G. Тогда $G/R \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Предположим, что $G/R \notin \mathfrak{F}$. Пусть L — добавление к R в G. Согласно лемме 5 $G = RL$ и $R \cap L \subseteq \Phi(L)$. Так как $\mathfrak{F}$ — гомоморф, очевидно, что $L \notin \mathfrak{F}$. По лемме 3 L содержит минимальную не $\mathfrak{F}$-подгруппу K. Ясно, что $K \subseteq R$. Тогда $K \subseteq R \cap L \subseteq \Phi(L)$. Следовательно, K — нильпотентная группа, и согласно условию $K \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Лемма доказана. □

Напомним также некоторые свойства формаций групп с решеточным свойством, которые получены А. Ф. Васильевым, С. Ф. Каморниковым, В. Н. Семенчуком в [11]. Данные свойства сыграли важнейшую роль при доказательстве основных результатов работы.

Лемма 7 [11]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством для $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп;*

2) *группа $G = \langle A_1, A_2 \rangle$ принадлежит $\mathfrak{F}$, если A_1, A_2 — $\mathfrak{F}$-достижимые $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G;*

3) *$\mathfrak{F}$ — формация Фиттинга и всякая $\mathfrak{F}$-достижимая $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G содержится в $\mathfrak{F}$-радикале этой группы.*

Лемма 8 [11]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная наследственная формация с решеточным свойством. Тогда любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа G является группой одного из следующих типов:*

1) *$|G| = p$ — простое число, $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;*

2) *G — группа Шмидта;*

3) *$G/\Phi(G)$ — монолитическая группа с неабелевым монолитом $N/\Phi(G)$ такая, что G/N — циклическая примарная группа и $N/\Phi(G) = (G/\Phi(G))^{\mathfrak{F}}$.*

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, $\mathfrak{H}$ — формация. Тогда $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — насыщенная формация.*

Доказательство. Пусть $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, а тогда $(G/\Phi(G))^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$. Известно, что $(G/\Phi(G))^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}\Phi/\Phi(G)$. Тогда $G^{\mathfrak{H}}\Phi(G)/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. По следствию 4.2.1 из [10] $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$. Это значит, что $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Лемма доказана. □

Лемма 10. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация с решеточным свойством, $\mathfrak{X}$ — насыщенная наследственная формация такая, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$. Пусть в группе G все минимальные не $\mathfrak{X}$-подгруппы $\mathfrak{F}$-достижимы. Если N — нормальная подгруппа группы G, то в фактор-группе G/N все минимальные не $\mathfrak{X}$-подгруппы $\mathfrak{F}$-достижимы.*

Доказательство. Пусть K/N — минимальная не $\mathfrak{X}$-подгруппа группы G/N. Пусть L — добавление к N в K. Согласно лемме 5 $L \cap N \subseteq \Phi(L)$. Так как $K/N = LN/N \simeq L/L \cap N$, то $L/L \cap N$ — минимальная не $\mathfrak{X}$-подгруппа, а тогда и $L/\Phi(L)$ — минимальная не $\mathfrak{X}$-подгруппа. Покажем, что L порождается всеми своими минимальными не $\mathfrak{X}$-подгруппами. Пусть R — подгруппа, порожденная всеми минимальными не $\mathfrak{X}$-подгруппами из L. Очевидно, что R — нормальная подгруппа из L. Если $R\Phi(L)/\Phi(L)$ — собственная подгруппа из $L/\Phi(L)$, то $R\Phi(L)/\Phi(L) \simeq R/R \cap \Phi(L) \in \mathfrak{X}$ и по следствию 4.2.1 из [10] $R \in \mathfrak{X}$, что невозможно. Итак, $R\Phi(L) = L$. Отсюда следует, что $L = R$. Поскольку формация $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством, подгруппа, порожденная $\mathfrak{F}$-достижимыми подгруппами $\mathfrak{F}$-достижима. Следовательно, L — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G. Но тогда по лемме 1 $K = LN$ — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа из G. Отсюда по лемме 1 K/N $\mathfrak{F}$-достижима в G/N. Итак, в G/N все минимальные не $\mathfrak{X}$-подгруппы $\mathfrak{F}$-достижимы. Лемма доказана. $\square$

Следствие 10.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация с решеточным свойством. Пусть в группе G все подгруппы Шмидта $\mathfrak{F}$-достижимы. Если N — нормальная подгруппа группы G, то в фактор-группе G/N все подгруппы Шмидта $\mathfrak{F}$-достижимы.*

Доказательство следует из леммы 10 в том случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$.

Лемма 11. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная наследственная формация с решеточным свойством, $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех простых чисел и любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа разрешима. Если в группе G все подгруппы Шмидта $\mathfrak{F}$-достижимы, то $G/G_{\mathfrak{F}}$ нильпотентна.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G = G_{\mathfrak{F}}$ и теорема очевидна. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 3 G содержит минимальную не $\mathfrak{F}$-группу H. Так как H разрешима, по лемме 8 H либо группа простого порядка, либо группа Шмидта. Поскольку $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех простых чисел и $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, H — группа Шмидта. По условию H $\mathfrak{F}$-достижима в G. Согласно лемме 2 $1 \neq H^{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа группы G. Очевидно, что $1 \neq F(H^{\mathfrak{F}}) \subseteq F(G)$. Следовательно, G имеет минимальную нормальную разрешимую подгруппу N.

Для доказательства леммы надо показать, что $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Доказательство проведем индукцией по порядку группы G. Согласно лемме 10 все группы Шмидта из G/N $\mathfrak{F}$-достижимы. По индукции $G/N \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

Пусть T — отличная от N минимальная нормальная подгруппа группы G. Как и выше, нетрудно показать, что $G/T \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Так как $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ — формация, $G \simeq G/T \cap N \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$; противоречие. Итак, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Пусть $\Phi(G) \neq 1$. Как и выше, нетрудно показать, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Поскольку $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ — насыщенная формация, $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Итак, $\Phi(G) = 1$. Отсюда следует, что $F(G) = N$ и в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $N \cap M = 1$. Если $M \notin \mathfrak{F}$, то согласно лемме 3 M содержит минимальную не $\mathfrak{F}$-группу P. Как и выше, согласно лемме 8 нетрудно показать, что P — группа Шмидта. По условию P $\mathfrak{F}$-достижима в G. С учетом леммы 2 $1 \neq P^{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа группы G. Очевидно, что $1 \neq F(P^{\mathfrak{F}}) \subseteq F(G) = N$, что невозможно. Итак, $M \in \mathfrak{F}$. Если $M \in \mathfrak{N}$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $M \neq \mathfrak{N}$, тогда M содержит группу Шмидта. Обозначим через R подгруппу, порожденную всеми группами Шмидта из M. Поскольку по условию все группы Шмидта $\mathfrak{F}$-достижимы в G и $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством, R — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G. Так как $R \subseteq M \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, $R \in \mathfrak{F}$. По лемме 7 $R \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. По лемме 6 $M/R \in \mathfrak{N}$. Ввиду того, что $G = G_{\mathfrak{F}}M$, имеем $G/G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}M/G_{\mathfrak{F}} \simeq M/M \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 12. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная наследственная формация с решеточным свойством. Если в группе G выполняется условие $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, то для любых подгрупп H, содержащих $G_{\mathfrak{F}}$, следует, что $H_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа группы G такая, что $G_{\mathfrak{F}} \subseteq H$. Покажем, что $G_{\mathfrak{F}} = H_{\mathfrak{F}}$. Предположим противное. Тогда в $H_{\mathfrak{F}}$ найдется силовская p-подгруппа P такая, что $P \nsubseteq G_{\mathfrak{F}}$.

Рассмотрим подгруппу $G_{\mathfrak{F}}P$. Так как $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}P$, по лемме 2 $G_{\mathfrak{F}}P$ $\mathfrak{F}$-достижима в G. Поскольку $G_{\mathfrak{F}}P \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, P $\mathfrak{F}$-достижима в $G_{\mathfrak{F}}P$. По лемме 1 P — $\mathfrak{F}$-достижимая в G. Так как $P \in \mathfrak{F}$, по лемме 8 $P \subseteq G_{\mathfrak{F}}$; противоречие. Лемма доказана. $\square$

Лемма 13 [12]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация с решеточным свойством. Если группа Шмидта $H = [H_p]H_q$, где $\mid H_q \mid = q$, принадлежит $\mathfrak{F}$, то формация $\mathfrak{F}$ содержит любую группу $G = [G_p]G_q$, где G_q — циклическая подгруппа.*

Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная наследственная формация с решеточным свойством, $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех простых чисел и любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа разрешима. Если в группе G все подгруппы Шмидта $\mathfrak{F}$-достижимы, то $G/G_{\mathfrak{F}}$ абелева.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G = G_{\mathfrak{F}}$ и теорема очевидна. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 3 G содержит минимальную не $\mathfrak{F}$-группу H. Так как H разрешима, по лемме 8 H либо группа простого порядка, либо группа Шмидта. Поскольку $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех простых чисел и $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, H — группа Шмидта. По условию H разрешима и $\mathfrak{F}$-достижима в G. Согласно лемме 2 $1 \neq H^{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа группы G. Очевидно, что $1 \neq F(H^{\mathfrak{F}}) \subseteq F(G)$. Следовательно, G имеет минимальную нормальную разрешимую подгруппу N.

Пусть $\mathfrak{U}$ — формация всех абелевых групп. Тогда для доказательства теоремы надо доказать, что $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{U}$. Доказательство проведем индукцией по порядку группы G. Рассмотрим фактор-группу G/N. Согласно следствию 10.1 из леммы 10 в G/N все подгруппы Шмидта $\mathfrak{F}$-достижимы. Следовательно, по индукции $G/N \in \mathfrak{F}\mathfrak{U}$. Если группа G имеет минимальную нормальную подгруппу T, отличную от N, то, как и выше, получаем, что $G/T \in \mathfrak{F}\mathfrak{U}$. Так как $\mathfrak{F}\mathfrak{U}$ — формация, $G \simeq G/N \cap T \in \mathfrak{F}\mathfrak{U}$.

Если $\Phi(G) \neq 1$, то по индукции $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}\mathfrak{U}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, по лемме 9 $\mathfrak{F}\mathfrak{U}$ — насыщенная формация. Отсюда $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{U}$. Итак, группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, причем N разрешима и $\Phi(G) = 1$. Следовательно, $F(G) = N$ — p-группа. Так как $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация и $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех простых чисел, $N \in \mathfrak{F}$. Отсюда $N \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. По лемме 11 $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}$. Пусть L — добавление к $G_{\mathfrak{F}}$ в G. Тогда по лемме 5 $G = G_{\mathfrak{F}}L$ и $G_{\mathfrak{F}} \cap L \subseteq \Phi(L)$. Отсюда получаем, что

$$G/G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}L/G_{\mathfrak{F}} \simeq L/G_{\mathfrak{F}} \cap L \in \mathfrak{N}.$$

Следовательно, $L/\Phi(L) \in \mathfrak{N}$. Это значит, что $L \in \mathfrak{N}$.

Покажем, что $|G : G_{\mathfrak{F}}|$ не делится на p. Предположим противное. Рассмотрим подгруппу $A = G_{\mathfrak{F}}G_p$. Очевидно, что $G_{\mathfrak{F}} \subset G_{\mathfrak{F}}G_p = A$. По лемме 12 $A_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$, значит, $A \notin \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 3 A содержит минимальную не $\mathfrak{F}$-группу H. Так как H разрешима, по лемме 8 H — группа Шмидта. Согласно условию H $\mathfrak{F}$-достижима в G. Отсюда $1 \neq F(H^{\mathfrak{F}}) \subseteq F(G)$. Стало быть, $H^{\mathfrak{F}}$ — p-группа. Следовательно, $H = [H_p]H_q$. Очевидно, что $H_q \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Рассмотрим подгруппу $H \cap G_{\mathfrak{F}}$. Если $H \cap G_{\mathfrak{F}}$ — собственная подгруппа H, то $H \cap G_{\mathfrak{F}}$ нормальна в H и нильпотентна. Тогда H_q нормальна в H, что невозможно. Итак,

$H \cap G_{\mathfrak{F}} = H$. Так как $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, $H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $|G : G_{\mathfrak{F}}|$ не делится на p.

Покажем, что $G_{\mathfrak{F}}$ — холлова подгруппа группы G. Предположим противное. Тогда найдется простое число $q \neq p$ такое, что $q \in \pi(G_{\mathfrak{F}})$ и $\mid G : G_{\mathfrak{F}} \mid$ делится на q. Рассмотрим подгруппу $B = G_{\mathfrak{F}} G_q$. Согласно лемме 12 нетрудно показать, что $B \notin \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 3 B содержит минимальную не $\mathfrak{F}$-подгруппу H. По лемме 8 H — группа Шмидта. По условию H $\mathfrak{F}$-достижима в G. По лемме 2 $1 \neq H^{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа группы G, тогда $1 \neq F(H^{\mathfrak{F}}) \subseteq F(G)$. Следовательно, $H^{\mathfrak{F}}$ — p-группа, и $H = [H_p]H_q$. Так как $q \in \pi(G_{\mathfrak{F}})$, то $G_{\mathfrak{F}}$ содержит подгруппу Q порядка q. Рассмотрим ненильпотентную подгруппу NQ в группе $G_{\mathfrak{F}}$. Пусть K — подгруппа Шмидта в группе NQ. Тогда $K = [K_p]K_q$. Так как $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, $K \in \mathfrak{F}$. По лемме 13 $H \in \mathfrak{F}$; противоречие. Итак, $G_{\mathfrak{F}}$ — холлова подгруппа группы G.

По теореме Шура $G = G_{\mathfrak{F}} L$, причем в силу леммы 11 L нильпотентна в G. Применяя индукцию, получим, что $L = G_q$ — минимальная неабелева группа.

Итак, $G = [G_{\mathfrak{F}}]G_q$, где G_q — минимальная неабелева группа. При этом группа G имеет единственную минимальную нормальную p-подгруппу N и $C_G(N) = N = F(G)$.

Так как $G \notin \mathfrak{F}$, в G существует минимальная не $\mathfrak{F}$-группа H. Очевидно, что $q \in \pi(H)$. По лемме 8 H — группа Шмидта. Покажем, что $\pi(H) = \{p, q\}$. Пусть $\pi(H) = \{r, q\}$, где $r \neq p$. Поскольку H $\mathfrak{F}$-достижима, по лемме 2 $H^{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа группы G. В таком случае получаем $1 \neq F(H^{\mathfrak{F}}) \subseteq F(G) = N$, что невозможно. Итак, $H = [H_p]H_q$.

Рассмотрим подгруппу $K = NG_q$. Если K — собственная подгруппа группы G, то по индукции $K/K_{\mathfrak{F}}$ абелева. Покажем, что $K_{\mathfrak{F}} = N$. Пусть $N \subset K_{\mathfrak{F}}$. Тогда в $K_{\mathfrak{F}}$ найдется подгруппа Q такая, что $|Q| = q$. Если NQ нильпотентна, то $Q \subseteq C_G(N) = N$, что невозможно. Итак, поскольку NQ ненильпотентна, она содержит группу Шмидта $T = [T_p]Q$. Очевидно, что $T \subseteq K_{\mathfrak{F}}$. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $K_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то $T \in \mathfrak{F}$. Но тогда по лемме 13 $H \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Итак, $K_{\mathfrak{F}} = N$. Так как $K/K_{\mathfrak{F}} = K/N$ абелева, G_q абелева, что невозможно. Итак, $G = [N]G_q$.

Предположим, что Q — подгруппа простого порядка из центра $L = G_q$. Если Q действует приводимо на N, то по теореме Машке $N = N_1 \times N^*$, где N_1 — минимальная нормальная подгруппа группы N. Отсюда следует, что существуют две минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2 в группе NQ, где $N_2 \subseteq N^*$. Рассмотрим подгруппу $[N_i]Q$. Если $[N_i]Q$ ненильпотентна, то очевидно, что произведение N_iQ является группой Шмидта.

Допустим, что $N_i \times Q$ нильпотентна. В таком случае $G_q \subset \langle N_i, G_q \rangle \subseteq C_G(Q)$. Поскольку G_q — максимальная подгруппа группы G, то $G = C_G(Q)$. Так как группа G примитивна, $Q \subseteq (G_q)_G = 1$; противоречие. Итак, $[N_i]Q$ — группа Шмидта, где $i = 1, 2$.

Поскольку по условию подгруппа N_iQ $\mathfrak{F}$-достижима в G и формация $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством, $N_1Q \cap N_2Q = Q$ $\mathfrak{F}$-достижима в G. Если $N_iQ \in \mathfrak{F}$, то по лемме 13 формация $\mathfrak{F}$ содержит группу H; противоречие. Итак, $N_iQ \notin \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$. Поскольку Q $\mathfrak{F}$-достижима в N_iQ $(i = 1, 2)$, как и выше, нетрудно показать, что это невозможно. Так как $Q \subseteq \Phi(G_q)$, то все максимальные подгруппы из G_q действуют неприводимо на N. По лемме 4.1 из [10] все собственные подгруппы в G_q циклические. Ввиду того, что G_q — минимальная неабелева группа, из теоремы 51 в [13] следует, что G_q — группа кватернионов.

Значит, $q = 2$, и по свойствам группы Шмидта NQ получаем, что $\mid N \mid = p$. Но G/N — циклическая группа порядка, делящего $p-1$, и G_q циклическая. Теорема доказана. $\square$

Следствие 1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех p-разложимых групп. Если в группе G все подгруппы Шмидта $\mathfrak{F}$-достижимы, то $G/G_{\mathfrak{F}}$ абелева.*

Доказательство следует из доказанной выше теоремы и того факта, что формация всех p-разложимых групп обладает решеточным свойством.

Из данной теоремы вытекает известный результат В. С. Монахова и В. Н. Княгиной из [7].

Следствие 1.2. *Если в группе G все подгруппы Шмидта субнормальны, то фактор-группа $G/F(G)$ абелева.*

Доказательство следует из теоремы 1 и того факта, что формация всех нильпотентных групп обладает решеточным свойством.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{H}$ — насыщенная наследственная формация, содержащая $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{F}$ — насыщенная наследственная формация с решеточным свойством, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Если все минимальные не $\mathfrak{H}$-подгруппы группы G разрешимы и $\mathfrak{F}$-достижимы в G, то $G/F(G) \in \mathfrak{H}$.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Очевидно, что $G \notin \mathfrak{H}$. Согласно лемме 3 G содержит минимальную не $\mathfrak{H}$-группу H. По условию H разрешима. Из $\mathfrak{F}$-достижимости H в G и леммы 2 следует, что $H^{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа в G. Так как $H \notin \mathfrak{H}$, то и $H \notin \mathfrak{F}$, тогда $H^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Поскольку $H^{\mathfrak{F}}$ разрешима, $F(H^{\mathfrak{F}}) \neq 1$. Очевидно, что $F(H^{\mathfrak{F}}) \subseteq F(G)$ Итак, в G найдется минимальная нормальная разрешимая подгруппа N, причем N — p-группа.

Для доказательства теоремы надо показать, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$. Доказательство проведем индукцией по порядку группы G. Рассмотрим фактор-группу G/N. Согласно лемме 9 условия теоремы в G/N выполняются, а следовательно, по индукции $G/N \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$. Предположим, что G содержит минимальную нормальную подгруппу T, отличную от N. Тогда, как и выше, получаем, что $G/T \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$. Так $\mathfrak{N}\mathfrak{H}$ — формация, $G \simeq G/T \cap N \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$; противоречие. Итак, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Пусть $\Phi(G) \neq 1$. По индукции $G/\Phi(G) \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{N}\mathfrak{H}$ — насыщенная формация, $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$. Итак, $\Phi(G) = 1$. Это значит, что $N = F(G)$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $N \cap M = 1$. Если $M \in \mathfrak{H}$, то $G/N \in \mathfrak{H}$. Отсюда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$. Следовательно, $M \notin \mathfrak{H}$, и в M найдется минимальная не $\mathfrak{H}$-группа A. Как и выше, легко показать, что $1 \neq F(A^{\mathfrak{F}}) \subseteq F(G)$. Стало быть, $M \cap F(G) \neq 1$, что невозможно. Теорема доказана. $\square$

Следствие 2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная наследственная формация с решеточным свойством и $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех простых чисел. Если в группе G все подгруппы Шмидта $\mathfrak{F}$-достижимы, то $G/F(G) \in \mathfrak{F}$.*

Следствие 2.2. *Если в группе G все минимальные не $\mathfrak{F}$-подгруппы $\mathfrak{F}$-достижимы ($\mathfrak{F}$ — класс всех p-разложимых групп), то $G/F(G)$ p-разложима.*

Следствие 2.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная наследственная формация с решеточным свойством. Если все минимальные не $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G разрешимы и $\mathfrak{F}$-достижимы в G, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.*

Из этой теоремы также следуют известные результаты В. Н. Семенчука, полученные в [6].

Следствие 2.4. *Если в группе G все минимальные несверхразрешимые группы субнормальны, то $G/F(G)$ сверхразрешима.*

Следствие 2.5. *Если в группе G все подгруппы Шмидта субнормальны, то G метанильпотентна.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Miller G. A.* Nonabelian groups in which every subgroup is abelian // Trans. Amer. Math. Soc. 1903. V. 4. P. 398–404.

2. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31, № 3. С. 366–372.

3. *Huppert B.* Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. Bd 60. S. 409–434.

4. *Döerk K.* Minimal nicht Uberauflosbare, endliche Gruppen // Math. Z. 1966. Bd 91. S. 198–205.

5. *Семенчук В. Н.* Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 3. С. 348–382.

6. *Семенчук В. Н.* Конечные группы с системой минимальных не $\mathfrak{F}$-подгрупп // Подгрупповое строение конечных групп. Минск: Наука и техника, 1981. С. 138–149.

7. *Княгина В. Н., Монахов В. С.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1316–1322.

8. *Ведерников В. А.* Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 6. С. 669–687.

9. *Kegel O. H.* Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die Subnormalteilorverband echt enthalten // Arch. Math. 1978. V. 30. P. 225–228.

10. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

11. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Монахов В. С.* О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. Киев: Ин-т математики Акад. Украины, 1993. С. 27–54.

12. *Велесницкий В. Ф., Семенчук В. Н.* Об одной проблеме Л. А. Шеметкова // Укр. мат. журн. 2012. Т. 64., № 9. С. 1282–1288.

13. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.

Статья поступила 2 июля 2013 г.

Семенчук Владимир Николаевич, Велесницкий Василий Федорович
Гомельский университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
kolenchukova@gsu.by, velogos@rambler.ru