Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2014. Том 55, № 2

УДК 517.987+519.214

СВЯЗЬ СКОРОСТЕЙ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ ФОН НЕЙМАНА И БИРКГОФА В L_p

В. В. Седалищев

Аннотация. В пространствах L_p, $1 < p < \infty$, для случаев дискретного и непрерывного времени доказаны неравенства, позволяющие при наличии оценок скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана, принадлежащих достаточно широкому диапазону скоростей, получить оценки скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа. Приводятся точные операторные аналоги этих неравенств для полугрупп сжатий в L_p. Эти результаты также имеют очевидные точные аналоги в классе стационарных в широком смысле стохастических процессов.

Ключевые слова: эргодическая теорема фон Неймана, эргодическая теорема Биркгофа, скорость сходимости эргодических средних, стационарные в широком смысле стохастические процессы, полугруппы сжимающих операторов в L_p.

§ 1. Введение

Пусть $(\Omega, \mathfrak{S}, \lambda)$ — пространство с вероятностной мерой, T — его эндоморфизм, т. е. такое отображение Ω в себя, что для всех $A \in \mathfrak{S}$ множество $T^{-1}A$ принадлежит $\mathfrak{S}$ и $\lambda(A) = \lambda(T^{-1}A)$. Будем называть *динамической системой с дискретным временем* пару из пространства $(\Omega, \mathfrak{S}, \lambda)$ и какого-либо его эндоморфизма T. *Динамической системой с непрерывным временем* будем называть пару из пространства $(\Omega, \mathfrak{S}, \lambda)$ и какого-либо его полупотока, т. е. такой однопараметрической полугруппы эндоморфизмов $\{T^t\}_{t\geq 0}$ пространства Ω, что для всякой измеримой функции f на Ω функция $f(T^t\omega)$ измерима на прямом произведении $\Omega \times \mathbb{R}^+$.

Для $f \in L_1(\Omega)$, $\omega \in \Omega$ введем эргодические средние:

$$A_t f(\omega) = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t-1} f(T^k\omega)\ ,\ t \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad A_t f(\omega) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f(T^\tau\omega)\, d\tau\ ,\ t \in \mathbb{R}^+,$$

для случаев дискретного и непрерывного параметра времени t соответственно.

В случае $f \in L_1(\Omega)$ индивидуальная эргодическая теорема Биркгофа утверждает существование λ-п. в. предела

$$f^*(\omega) = \lim_{t\to\infty} A_t f(\omega)$$

и равенство

$$\int\limits_\Omega f(\omega)\, d\lambda(\omega) = \int\limits_\Omega f^*(\omega)\, d\lambda(\omega),$$

кроме того, λ-п. в. выполнено равенство $f^*(T^t\omega) = f^*(\omega)$. Статистическая эргодическая теорема фон Неймана гарантирует в случае $f \in L_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, существование предела $\lim\limits_{t\to\infty} A_t f$ в смысле нормы пространства $L_p(\Omega)$, причем этот предел λ-п. в. равен f^*.

Скорость сходимости будем измерять для эргодической теоремы фон Неймана как скорость сходимости к нулю при $t \to \infty$ числовых величин $\|A_t f - f^*\|_p$; для эргодической теоремы Биркгофа — как скорость сходимости к нулю числовых величин $P_t^\varepsilon = \lambda\{\sup\limits_{s\ge t}|A_s f - f^*| \ge \varepsilon\}$, поскольку сходимость для каждого $\varepsilon > 0$ при $t \to \infty$ величины P_t^ε к нулю эквивалентна сходимости п. в. $A_t f$ к f^*.

А. Г. Качуровским в [1] для $L_2(\Omega)$ исследовалась связь между скоростями сходимости в обеих упоминавшихся эргодических теоремах. Было замечено, что в общем случае, зная только скорость убывания P_t^ε, нельзя оценить скорость сходимости к нулю величин $\|A_t f - f^*\|_p$ при $t \to \infty$. В то же время в этой работе для случая дискретного времени приводились оценки в терминах O и o скорости сходимости в теореме Биркгофа по известной (степенной) скорости сходимости в теореме фон Неймана, т. е. оценки величин P_n^ε при условии $\|A_n f - f^*\|_2 = O(n^{-\alpha})$ при $n \to \infty$.

Впоследствии эти оценки были улучшены В. Ф. Гапошкиным в [2, 3]. Им же ранее было показано (см. [4, следствие 5]), что соотношение $\|A_n f - f^*\|_2 = o(n^{-1})$ при $n \to \infty$ возможно только в тривиальном случае $f - f^* = 0$ λ-п. в., а значит, максимально возможная скорость сходимости в теореме фон Неймана с дискретным временем не превосходит степенной с показателем 1, причем в силу результатов из [5] она достигается только на когомологичных нулю функциях $f - f^*$, т. е. функциях вида $f - f^* = h \circ T - h$, где $h \in L_2(\Omega)$. В [6, 7] доказательства В. Ф. Гапошкина были усовершенствованы и его оценки уточнены в направлении перехода от символа O к неравенствам с конкретными константами.

Заметим, что не все результаты о скоростях сходимости в эргодических теоремах могут быть перенесены со случая дискретного времени на случай непрерывного времени (см, например, [8]). Тем не менее в работах [9, 10] обсуждавшиеся результаты для $p = 2$ без существенных трудностей технического характера были перенесены на случай непрерывного времени.

В данной работе для обоих типов времени упомянутые выше результаты для $p = 2$ будут перенесены на случай произвольного пространства $L_p(\Omega)$, где, если это не оговорено особо, предполагается, что $p > 1$, и обобщены на произвольные скорости сходимости в теореме фон Неймана, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A_{2^k} f - f^*\|_p^p < \infty$, охватывающему, очевидно, все степенные оценки, рассматривавшиеся предшественниками. Также будет показано, что основные результаты статьи имеют точные аналоги для стационарных в широком смысле процессов, а также для средних от полугрупп сжимающих операторов в $L_p(\Omega)$. Доказательства ключевых теорем будут получены с помощью метода двоичных разбиений сумм, разные варианты которого впервые использовались В. Ф. Гапошкиным при оценивании P_n^ε в случае степенного убывания $\|A_n f - f^*\|_2$.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Следующая ниже лемма 1 показывает, что скорость сходимости в теореме фон Неймана как для дискретного, так и для непрерывного времени не может быть быстрее степенной с показателем 1, тем самым обобщая на случай произвольного $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, соответствующие результаты из [4, 9] для дискретного и непрерывного времени соответственно. Отметим, что доказательство леммы 1 заметно проще доказательств ее прототипов — в обеих упомянутых работах существенно использовалась структура гильбертова пространства $L_2(\Omega)$: доказательства опирались на представления норм эргодических средних через спектральные меры.

Лемма 1. *Пусть $p \in [1, \infty]$, $f \in L_p(\Omega)$ и в зависимости от рассматриваемого типа времени $t \in \mathbb{Z}_+$ или $t \in \mathbb{R}_+$. Тогда*

$$\varlimsup_{t\to\infty} t\|A_t f\|_p \geq \frac{\|f\|_p}{2}.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно показать, что всегда найдется такая строго монотонная последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, стремящаяся к бесконечности, что для всех ее элементов выполнено неравенство $t_k\|A_{t_k} f\|_p \geq \frac{\|f\|_p}{2}$.

Начнем доказательство с рассмотрения случая дискретного типа времени. Предположим противное; тогда для всех $t \in \mathbb{N}$ начиная с некоторого N выполнено неравенство $t\|A_t f\|_p < \frac{\|f\|_p}{2}$. В силу неравенства $\|a+b\|_p \geq |\|a\|_p - \|b\|_p|$ будем иметь

$$(N+1)\|A_{N+1} f\|_p = \|NA_N f + f \circ T^N\|_p \geq |\|f \circ T^N\|_p - \|NA_N f\|_p| \\ = \|f\|_p - N\|A_N f\|_p > \frac{\|f\|_p}{2};$$

противоречие.

В случае непрерывного времени доказательство существования последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ сводится к дискретному случаю путем рассмотрения значений $A_t f$ только при натуральных t. Действительно, полагая в этом случае

$$h = \int_0^1 f \circ T^\tau \, d\tau = A_1 f \in L_p(\Omega),$$

получим для всех $t \in \mathbb{N}$, что

$$A_t f = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} h \circ T^k,$$

т. е. эргодические средние $A_t f$ при $t \in \mathbb{N}$ являются эргодическими средними от h с дискретным временем, поэтому для построения искомой последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно воспользоваться уже доказанным случаем дискретного времени.

Следуя [3], введем для обоих типов времени при $m \in \mathbb{Z}_+$ и $g \in L_p(\Omega)$ обозначение

$$\delta_m^*(\omega) = \sup_{2^m \leq t < 2^{m+1}} |A_t g(\omega)|.$$

Верхнюю оценку величин $\|\delta_m^*\|_p$ в случае дискретного времени дает лемма 2, доказательство которой будет использовать метод двоичных разбиений сумм, применявшийся в [2, 3] для доказательства аналогичных по своей роли утверждений в случае $L_2(\Omega)$.

Лемма 2. *Пусть $p \in (1,\infty)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $g \in L_p(\Omega)$. Тогда для динамических систем с дискретным временем справедлива оценка*

$$\|\delta_m^*\|_p \le \sum_{l=0}^{m} 2^{-(m-l)/q}\|A_{2^l}g\|_p.$$

Доказательство. Положим

$$\delta_m(\omega) = \max_{2^m<k<2^{m+1}} \left| \sum_{j=2^m+1}^{k} g\circ T^j(\omega) \right| \text{ при } m \ge 1 \quad \text{и} \quad \delta_m(\omega)=0 \text{ при } m=0.$$

Применим метод двоичных разбиений сумм для оценки $\|\delta_m\|_p^p$. Для этого построим равномерную по k поточечную оценку для $\left|\sum\limits_{j=2^m+1}^{k} g\circ T^j\right|$. Запишем двоичное представление числа k в виде $k = 2^m + 2^{p_1} + \dots + 2^{p_{s_k}}$, где $0 \le p_{s_k} < \dots < p_1 \le m-1$, $s_k \le m$.

Тогда целочисленный промежуток $(2^m, k]$ представляется в виде $(2^m,k] = \bigcup\limits_{t=1}^{s_k} J_t$, где $J_1 = (2^m, 2^m+2^{p_1}]$, $J_2 = (2^m+2^{p_1}, 2^m+2^{p_1}+2^{p_2}], \dots$. При $l = 0,1,\dots,m-1$, $j=1,2,\dots,2^{m-l}$ обозначим через $I_{m,l,j}$ целочисленный промежуток $(2^m+(j-1)2^l, 2^m+j2^l]$ и положим $\Delta_{m,l,j} = \sum\limits_{i\in I_{m,l,j}} g\circ T^i$. В силу изометричности в L_p оператора, порожденного эндоморфизмом T, выполнено равенство $\|\Delta_{m,l,j}\|_p = 2^l\|A_{2^l}g\|_p$. Очевидно, что $J_t = I_{m,p_t,j_t}$, где $1 \le j_t \le 2^{m-p_t}$, а именно $j_1 = 1$, $j_2 = 2^{p_1-p_2}+1$, $j_3 = 2^{p_1-p_3}+2^{p_2-p_3}+1, \dots$. Отметим также, что

$$\sum_{j=2^m+1}^{k} g\circ T^j = \sum_{t=1}^{s_k} \Delta_{m,p_t,j_t}.$$

Пусть $\{a_{j,k} \mid 0 \le j < k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность положительных чисел. Применим неравенство Гёльдера к предыдущему равенству:

$$\left|\sum_{j=2^m+1}^{k} g\circ T^j\right|^p = \left|\sum_{t=1}^{s_k}\Delta_{m,p_t,j_t}\right|^p \le \left(a_{p_1,m}^{-q}+\dots+a_{p_{s_k},m}^{-q}\right)^{p/q}\sum_{t=1}^{s_k} a_{p_t,m}^p|\Delta_{m,p_t,j_t}|^p$$
$$\le \left(\sum_{j=0}^{m-1} a_{j,m}^{-q}\right)^{p/q}\sum_{l=0}^{m-1} a_{l,m}^p\sum_{j=1}^{2^{m-l}}|\Delta_{m,l,j}|^p.$$

После взятия максимума от левой части этого неравенства и последующего интегрирования получим с учетом $\|\Delta_{m,l,j}\|_p = 2^l\|A_{2^l}g\|_p$ оценку

$$\|\delta_m\|_p^p \le 2^m\left(\sum_{j=0}^{m-1} a_{j,m}^{-q}\right)^{p/q}\sum_{l=0}^{m-1} a_{l,m}^p 2^{(p-1)l}\|A_{2^l}g\|_p^p.$$

Возьмем

$$a_{l,m} = (2^{l/q}\|A_{2^l}g\|_p)^{-1/q}\left(\sum_{j=0}^{m-1} 2^{j/q}\|A_{2^j}g\|_p\right)^{1/q},$$

тогда несложно убедиться, что

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_{j,m}^{-q} = 1$$

и
$$\sum_{l=0}^{m-1} a_{l,m}^p 2^{(p-1)l} \|A_{2^l} g\|_p^p = \left(\sum_{l=0}^{m-1} 2^{l/q} \|A_{2^l} g\|_p\right)^p.$$
Подстановка таким образом выбранных $a_{l,m}$ в полученную ранее оценку $\|\delta_m\|_p^p$ приводит нас к неравенству
$$\|\delta_m\|_p^p \le 2^m \left(\sum_{l=0}^{m-1} 2^{l/q} \|A_{2^l} g\|_p\right)^p.$$

Очевидно, что $\delta_m^*(\omega) \le |A_{2^m} g(\omega)| + 2^{-m}\delta_m(\omega)$. После применения неравенства треугольника получим отсюда и из предыдущей оценки $\|\delta_m\|_p^p$, что
$$\|\delta_m^*\|_p \le \|A_{2^m} g\|_p + 2^{-m/q} \sum_{l=0}^{m-1} 2^{l/q} \|A_{2^l} g\|_p = \sum_{l=0}^{m} 2^{-(m-l)/q} \|A_{2^l} g\|_p,$$
т. е. получили неравенство, которое требовалось доказать.

Приведем теперь аналог леммы 2 для случая непрерывного времени. Доказательство леммы 3 будет использовать лемму 2.

Лемма 3. *Пусть $p \in (1,\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $g \in L_p(\Omega)$. Тогда для динамических систем с непрерывным временем справедлива оценка*
$$\|\delta_m^*\|_p \le \sum_{l=0}^{m} 2^{-(m-l)/q} \|A_{2^l} g\|_p + 2^{-m/q} \frac{\|g\|_p}{2^{1/q} - 1}.$$

Доказательство. Введем множества $D_r^m = \{s \in 2^{-r}\mathbb{N} \mid 2^m \le s < 2^{m+1}\}$ и $D_\infty^m = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} D_r^m$, а также требуемые только для доказательства этой леммы дополнительные дублирующие обозначения для эргодических средних:
$$A_t^c(T^1) f = \frac{1}{t} \int_0^t f(T^\tau \omega)\, d\tau,\ t \in \mathbb{R}_+, \quad \text{и} \quad A_n^d(T^h) f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^{kh},\ n \in \mathbb{N},$$
которые необходимы для того, чтобы не возникало путаницы между усреднениями по разным эндоморфизмам в случаях дискретного и непрерывного времени. Легко проверить, что при таких обозначениях для всех $s = lh$, $l \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство
$$A_s^c(T^1) = A_h^c(T^1) A_l^d(T^h) = A_l^d(T^h) A_h^c(T^1).$$
Используя эти равенства и лемму 2, придем к следующей цепочке соотношений:
$$\begin{aligned}
\Big\|\sup_{s\in D_r^m} \big|A_s^c(T^1) g\big|\Big\|_p &\le \sum_{l=0}^{m+r} 2^{-(m+r-l)/q} \big\|A_{2^l}^d(T^{2^{-r}}) A_{2^{-r}}^c(T^1) g\big\|_p \\
&= \sum_{l=r}^{m+r} 2^{-(m+r-l)/q} \big\|A_{2^{l-r}}^c(T^1) g\big\|_p + \sum_{l=0}^{r-1} 2^{-(m+r-l)/q} \big\|A_{2^{l-r}}^c(T^1) g\big\|_p \\
&= \sum_{l=0}^{m} 2^{-(m-l)/q} \big\|A_{2^l}^c(T^1) g\big\|_p + 2^{-m/q} \sum_{l=1}^{r} 2^{-l/q} \big\|A_{2^{-l}}^c(T^1) g\big\|_p \\
&\le \sum_{l=0}^{m} 2^{-(m-l)/q} \big\|A_{2^l}^c(T^1) g\big\|_p + 2^{-m/q} \frac{\|g\|_p}{2^{1/q} - 1}.
\end{aligned}$$

В последнем неравенстве использовано равенство $\sum\limits_{l=1}^{\infty} 2^{-l/q} = \frac{1}{2^{1/q}-1}$ и тот факт, что операторы эргодического усреднения являются сжатиями в $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$ (см., например, [11, гл. VIII, § 7]).

Поскольку $\lim\limits_{r\to\infty} \sup\limits_{s\in D_r^m} \left|A_s^c(T^1)g\right| = \sup\limits_{s\in D_\infty^m} \left|A_s^c(T^1)g\right|$ п. в. в Ω и $\sup\limits_{s\in D_r^m} \left|A_s^c(T^1)g\right| \leq \delta_m^*$ для всех $r \in \mathbb{N}$, применение теоремы Лебега приведет нас к тому, что

$$\lim_{r\to\infty} \Big\| \sup_{s\in D_r^m} \left|A_s^c(T^1)g\right| \Big\|_p = \Big\| \sup_{s\in D_\infty^m} \left|A_s^c(T^1)g\right| \Big\|_p.$$

Заметим, что $\sup\limits_{s\in D_\infty^m} \left|A_s^c(T^1)g\right| = \delta_m^*$ п. в. в Ω в силу непрерывности $A_s^c(T^1)g(\omega)$ при всех $s > 0$ для λ-п. в. $\omega \in \Omega$ (см., например, [11, гл. VIII, § 7]), так как любая непрерывная функция однозначно определяется по своим значениям на всюду плотном подмножестве области определения, в качестве которого в данном случае выступает D_∞^m, всюду плотное в $[2^m, 2^{m+1})$. Для завершения доказательства остается учесть это и перейти к пределу при $r \to \infty$ в полученной ранее равномерной по r оценке величин $\Big\| \sup\limits_{s\in D_r^m} \left|A_s^c(T^1)g\right| \Big\|_p$.

§ 3. Оценки скорости сходимости в теореме Биркгофа

Теорема 1 показывает, как можно оценить скорость сходимости в теореме Биркгофа, зная скорость сходимости в теореме фон Неймана.

Теорема 1. *Пусть $p \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L_p(\Omega)$. Тогда в случае дискретного типа времени для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ при условии $2^m \leq n < 2^{m+1}$, где $m \in \mathbb{Z}_+$, верно неравенство*

$$P_n^\varepsilon \leq \varepsilon^{-p} \sum_{k=m}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} 2^{-(k-l)/q} \|A_{2^l} f - f^*\|_p \right)^p.$$

В случае же непрерывного типа времени для всех вещественных $t \geq 1$ и $\varepsilon > 0$ при условии $2^m \leq t < 2^{m+1}$, где $m \in \mathbb{Z}_+$, справедливо неравенство

$$P_t^\varepsilon \leq \varepsilon^{-p} \sum_{k=m}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} 2^{-(k-l)/q} \|A_{2^l} f - f^*\|_p + 2^{-k/q} \frac{\|f - f^*\|_p}{2^{1/q} - 1} \right)^p.$$

Доказательство. Заметим, что при $g = f - f^*$ для обоих типов времени

$$P_t^\varepsilon \leq \sum_{k=m}^{\infty} \lambda\{\delta_m^* \geq \varepsilon\} \quad \text{при } 2^m \leq t < 2^{m+1}.$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться неравенством Чебышева $\lambda\{\delta_m^* \geq \varepsilon\} \leq \varepsilon^{-p} \|\delta_m^*\|_p^p$, а затем леммой 2 в случае дискретного типа времени и леммой 3 — в случае непрерывного.

Замечание 1. Отметим, что при обоих типах времени условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A_{2^k} f - f^*\|_p^p < \infty$$

на скорости сходимости в теореме фон Неймана необходимо и достаточно для содержательности оценок теоремы 1, т. е. для стремления этих оценок к нулю при $m \to \infty$.

Доказательство. Для доказательства необходимости введем обозначение

$$y_k = \sum_{l=0}^{k} 2^{-(k-l)/q} \|A_{2^l} f - f^*\|_p.$$

Тогда в силу условия $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |y_k|^p < \infty$. В то же время

$$\|A_1 f - f^*\|_p = y_0, \quad \|A_{2^k} f - f^*\|_p = y_k - 2^{-1/q} y_{k-1} \text{ для всех } k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A_{2^k} f - f^*\|_p^p \le 2^{p-1}(1 + 2^{-p/q}) \sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^p < \infty.$$

Перейдем к доказательству достаточности условия

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A_{2^k} f - f^*\|_p^p < \infty.$$

Заметим, что для обоих типов времени и для всех $k \in \mathbb{N}$ и $g \in L_p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, справедливо $\|A_{2^k} g\|_p \le \|A_{2^{k-1}} g\|_p$. Это неравенство использовалось при доказательстве технической леммы 2 из [2] и очевидно ввиду оценки

$$|A_{2^k} g| \le 2^{-1}(|A_{2^{k-1}} g| + |A_{2^{k-1}} g \circ T^{2^{k-1}}|)$$

и стационарности процесса $\{g \circ T^k\}_{k=0}^{\infty}$. Положим $g = f - f^*$, тогда $\|A_{2^k} f - f^*\|_p = \|A_{2^k} g\|_p$ и в силу монотонности $\|A_{2^k} g\|_p$

$$\frac{\sum\limits_{l=0}^{k} 2^{-(k-l)/q} \|A_{2^l} g\|_p}{\sum\limits_{l=0}^{k} 2^{-(k-l)/q}} \le \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{k} \|A_{2^l} g\|_p,$$

так как взвешенное среднее арифметическое, где наименьшим значениям придается наибольший вес, не превосходит среднего арифметического, где всем переменным придается равный вес. Отсюда после суммирования геометрической прогрессии получим

$$\sum_{l=0}^{k} 2^{-(k-l)/q} \|A_{2^l} g\|_p \le \frac{(1 - 2^{-1/q})^{-1}}{k+1} \sum_{l=0}^{k} \|A_{2^l} g\|_p.$$

Это приводит нас к неравенству

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} 2^{-(k-l)/q} \|A_{2^l} g\|_p \right)^p &\le \frac{1}{(1 - 2^{-1/q})^p} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{k} \|A_{2^l} g\|_p \right)^p \\ &\le \frac{1}{(1 - 2^{-1/q})^p} \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \|A_{2^k} g\|_p^p, \end{aligned}$$

а значит, и к сходимости оценок теоремы 1 к нулю при $m \to \infty$ как хвостов сходящегося ряда из левой части этого двойного неравенства. Последнее неравенство в цепочке получено применением неравенства Харди — Ландау (см., например, [12, § 9.8, теорема 326])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^p \le \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p,$$

которое справедливо при $a_n \geq 0$, $p > 1$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty$.

Применение теоремы 1 в частном, но тем не менее важном для возможных приложений случае степенной скорости сходимости в теореме фон Неймана приводит нас к теореме 2 для динамических систем с дискретным временем.

Теорема 2. *Пусть* $p \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L_p(\Omega)$, *и предположим, что для динамической системы с дискретным временем при всех натуральных* n *вида* $n = 2^k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, *выполнено неравенство* $\|A_n f - f^*\|_p \leq B n^{-\alpha}$, *где* $0 < \alpha \leq 1$ *(отметим, что в силу леммы 1 сходимость с показателем* $\alpha > 1$ *в теореме фон Неймана невозможна, за исключением тривиального случая* $f - f^* = 0$ λ*-п. в.).*

Тогда при $n \to \infty$

$$P_n^\varepsilon = \begin{cases} O(n^{-p\alpha}), & \text{если } \alpha \in \left(0, \frac{1}{q}\right), \\ O(n^{-p/q} \ln^p n), & \text{если } \alpha = \frac{1}{q}, \\ O(n^{-p/q}), & \text{если } \alpha \in \left(\frac{1}{q}, 1\right]. \end{cases}$$

Более того, для всех $n \in \mathbb{N}$ *и* $\varepsilon > 0$ *в зависимости от* α *справедливы следующие неравенства:*

1) *если* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{q}\right)$, *то*

$$P_n^\varepsilon < \varepsilon^{-p} B^p \frac{2^{p/q}}{(2^{1/q-\alpha} - 1)^p (1 - 2^{-p\alpha})} n^{-p\alpha};$$

2) *если* $\alpha = \frac{1}{q}$, *то*

$$P_n^\varepsilon < \varepsilon^{-p} B^p \left(\frac{2^p - 1}{1 - 2^{-p/q}} \frac{(\log_2 n + 1)^p}{n^{p/q}} + \frac{C_p}{n^{p/q}} \right),$$

где

$$C_p = 4^{p/q} \sum_{k=1}^{\infty} k^p x^k |_{x = 2^{-p/q}};$$

3) *если* $\alpha \in \left(\frac{1}{q}, 1\right]$, *то*

$$P_n^\varepsilon < \varepsilon^{-p} B^p \frac{2^{p/q}}{(1 - 2^{1/q-\alpha})^p (1 - 2^{-p/q})} n^{-p/q}.$$

Доказательство. Подставим условие $\|A_n f - f^*\|_p \leq B n^{-\alpha}$ в неравенство теоремы 1:

$$P_n^\varepsilon \leq \varepsilon^{-p} B^p \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-\frac{p}{q}k} \left(\sum_{l=0}^{k} 2^{(1/q-\alpha)l} \right)^p, \tag{1}$$

и рассмотрим случаи различных показателей α.

Случай $\alpha \in \left(0, \frac{1}{q}\right)$. Суммирование геометрической прогрессии в (1) приводит к цепочке неравенств:

$$P_n^\varepsilon \leq \varepsilon^{-p} B^p \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-\frac{p}{q}k} \left(\frac{2^{(1/q-\alpha)(k+1)} - 1}{2^{1/q-\alpha} - 1} \right)^p < \varepsilon^{-p} B^p \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-\frac{p}{q}k} \left(\frac{2^{(1/q-\alpha)(k+1)}}{2^{1/q-\alpha} - 1} \right)^p$$

$$= \varepsilon^{-p} B^p \frac{2^{p(1/q-\alpha)}}{\left(2^{1/q-\alpha} - 1\right)^p} \frac{2^{-p\alpha m}}{1 - 2^{-p\alpha}} < \varepsilon^{-p} B^p \frac{2^{p/q}}{\left(2^{1/q-\alpha} - 1\right)^p (1 - 2^{-p\alpha})} n^{-p\alpha}.$$

В последнем неравенстве использовано то, что $2^{-p\alpha m} < 2^{p\alpha}n^{-p\alpha}$ при $2^m \le n < 2^{m+1}$.

Случай $\alpha = \frac{1}{q}$. Подстановка $\alpha = \frac{1}{q}$ в (1) и использование неравенства $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$ приводит к следующей цепочке соотношений:

$$P_n^\varepsilon \le \varepsilon^{-p}B^p \sum_{k=m}^{\infty}(k+1)^p 2^{-\frac{p}{q}k} = \varepsilon^{-p}B^p \frac{(m+1)^p}{2^{\frac{p}{q}m}} \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-\frac{p}{q}(k-m)} \left(1 + \frac{k-m}{m+1}\right)^p$$

$$= \varepsilon^{-p}B^p \frac{(m+1)^p}{2^{\frac{p}{q}m}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\frac{p}{q}k} \left(1 + \frac{k}{m+1}\right)^p$$

$$\le \varepsilon^{-p}B^p \frac{(m+1)^p}{2^{\frac{p}{q}m}} \left(1 + 2^{p-1}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{p}{q}k}\right) + \varepsilon^{-p}B^p \frac{2^{p-1}}{2^{\frac{p}{q}m}} \sum_{k=1}^{\infty} k^p 2^{-\frac{p}{q}k}$$

$$= \varepsilon^{-p}B^p \left(\frac{(m+1)^p}{2^{\frac{p}{q}m}} \frac{2-2^{-p/q}}{1-2^{-p/q}} + \frac{C_p}{2^{-\frac{p}{q}(m+1)}}\right)$$

$$< \varepsilon^{-p}B^p \left(\frac{2^p - 1}{1-2^{-p/q}} \frac{(\log_2 n + 1)^p}{n^{p/q}} + \frac{C_p}{n^{p/q}}\right).$$

В последнем неравенстве было использовано то, что $2^{-\frac{p}{q}m} < 2^{p/q}n^{-p/q}$ при $2^m \le n < 2^{m+1}$.

Случай $\alpha \in \left(\frac{1}{q}, 1\right]$. Суммирование геометрической прогрессии в (1) приводит к цепочке неравенств:

$$P_n^\varepsilon \le \varepsilon^{-p}B^p \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-\frac{p}{q}k} \left(\frac{1 - 2^{(1/q-\alpha)(k+1)}}{1 - 2^{1/q-\alpha}}\right)^p < \varepsilon^{-p}B^p \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-\frac{p}{q}k} \left(\frac{1}{1 - 2^{1/q-\alpha}}\right)^p$$

$$= \varepsilon^{-p}B^p \frac{1}{(1-2^{1/q-\alpha})^p} \frac{2^{-p/qm}}{1-2^{-p/q}} < \varepsilon^{-p}B^p \frac{2^{p/q}}{(1-2^{1/q-\alpha})^p(1-2^{-p/q})} n^{-p/q}.$$

В последнем неравенстве было использовано то, что $2^{-\frac{p}{q}m} < 2^{p/q}n^{-p/q}$ при $2^m \le n < 2^{m+1}$.

Замечание 2. Если предположить, что при всех натуральных n выполнено неравенство $\|A_n f - f^*\|_p \le Bn^{-\alpha}$, то при $\alpha = 1$ для натуральных $n \ge 2$ неравенство, приведенное в теореме 2, можно улучшить:

$$P_n^\varepsilon \le \frac{\varepsilon^{-p}B^p}{p-1}(n-1)^{-p/q}.$$

Доказательство. Поскольку $\{\sup\limits_{k\ge n}|A_k f - f^*| > \varepsilon\} = \bigcup\limits_{k\ge n}\{|A_k f - f^*| > \varepsilon\}$, имеем

$$\lambda\{\sup_{k\ge n}|A_k f - f^*| > \varepsilon\} \le \sum_{k=n}^{\infty} \lambda\{|A_k f - f^*| > \varepsilon\} \le \varepsilon^{-p}\sum_{k=n}^{\infty}\|A_k f - f^*\|_p^p.$$

Если при $\alpha \in \left(\frac{1}{p}, 1\right]$ для всех $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\|A_k f - f^*\|_p \le Bk^{-\alpha}$, то

$$\lambda\{\sup_{k\ge n}|A_k f - f^*| > \varepsilon\} \le \varepsilon^{-p}B^p \sum_{k=n}^{\infty} k^{-p\alpha}$$

$$< \varepsilon^{-p}B^p \int_{n-1}^{\infty} x^{-p\alpha}\,dx = \varepsilon^{-p}B^p \frac{(n-1)^{1-p\alpha}}{p\alpha - 1}.$$

Пользуясь только что доказанным неравенством, получим для всех $0 < \delta < 1$ следующее двойное неравенство:

$$P_n^\varepsilon = \lambda\{\sup_{k\geq n}|A_kf - f^*| \geq \varepsilon\} \leq \lambda\{\sup_{k\geq n}|A_kf - f^*| > \varepsilon(1-\delta)\}$$
$$< \frac{\varepsilon^{-p}B^p}{(1-\delta)^p}\frac{(n-1)^{1-p\alpha}}{p\alpha - 1}.$$

Для завершения доказательства остается перейти в этом неравенстве к пределу при $\delta \to 0$, а затем подставить $\alpha = 1$.

Приведем аналог теоремы 2 для динамических систем с непрерывным временем.

Теорема 3. *Пусть $p \in (1,\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L_p(\Omega)$, и предположим, что для динамической системы с непрерывным временем при всех натуральных n вида $n = 2^k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, выполнено неравенство $\|A_nf - f^*\|_p \leq Bn^{-\alpha}$, где $0 < \alpha \leq 1$ (отметим, что в силу леммы 1 сходимость с показателем $\alpha > 1$ в теореме фон Неймана невозможна, за исключением тривиального случая $f - f^* = 0$ λ-п. в.) и $\|f - f^*\|_p \leq B$.*

Тогда при $t \to \infty$ имеем

$$P_t^\varepsilon = \begin{cases} O(t^{-p\alpha}), & \text{если } \alpha \in \left(0, \frac{1}{q}\right), \\ O(t^{-p/q}\ln^p t), & \text{если } \alpha = \frac{1}{q}, \\ O(t^{-p/q}), & \text{если } \alpha \in \left(\frac{1}{q}, 1\right]. \end{cases}$$

Более того, для всех вещественных $t \geq 1$ и $\varepsilon > 0$ в зависимости от α справедливы следующие неравенства:

1) *если $\alpha \in \left(0, \frac{1}{q}\right)$, то*

$$P_t^\varepsilon < \varepsilon^{-p}B^p\frac{2^{p/q}}{(2^{1/q-\alpha} - 1)^p(1 - 2^{-p\alpha})}t^{-p\alpha};$$

2) *если $\alpha = \frac{1}{q}$, то*

$$P_t^\varepsilon < \varepsilon^{-p}B^p\left(\frac{2^p - 1}{1 - 2^{-p/q}}\frac{(\log_2 t + 1 + (2^{1/q} - 1)^{-1})^p}{t^{p/q}} + \frac{C_p}{t^{p/q}}\right),$$

где

$$C_p = 4^{p/q}\sum_{k=1}^{\infty} k^p x^k|_{x=2^{-p/q}};$$

3) *если $\alpha \in \left(\frac{1}{q}, 1\right]$, то*

$$P_t^\varepsilon < \varepsilon^{-p}B^p\frac{2^{p/q}}{(1 - 2^{1/q-\alpha})^p(1 - 2^{-p/q})}\left(\frac{1 - 2^{-\alpha}}{1 - 2^{-1/q}}\right)^p t^{-p/q}.$$

Доказательство. Подставим условие $\|A_nf - f^*\|_p \leq Bn^{-\alpha}$ в неравенство теоремы 1:

$$P_t^\varepsilon \leq \varepsilon^{-p}B^p\sum_{k=m}^{\infty}2^{-\frac{p}{q}k}\left(\sum_{l=0}^{k}2^{(1/q-\alpha)l} + \frac{1}{2^{1/q} - 1}\right)^p, \tag{2}$$

и рассмотрим случаи различных показателей α.

Случай $\alpha \in \left(0, \frac{1}{q}\right)$. Суммирование геометрической прогрессии в (2) приводит к двойному неравенству:

$$P_t^\varepsilon \le \varepsilon^{-p} B^p \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-\frac{p}{q}k} \left(\frac{2^{(1/q-\alpha)(k+1)} - 1}{2^{1/q-\alpha} - 1} + \frac{1}{2^{1/q} - 1} \right)^p < \varepsilon^{-p} B^p \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-\frac{p}{q}k} \left(\frac{2^{(1/q-\alpha)(k+1)}}{2^{1/q-\alpha} - 1} \right)^p.$$

Остается заметить, что правая часть в точности совпадает с соответствующим местом в доказательстве п. 1 теоремы 2.

Случай $\alpha = \frac{1}{q}$. Подстановка $\alpha = \frac{1}{q}$ в (2) и использование неравенства $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$ приводит к следующей цепочке соотношений:

$$\begin{aligned}
P_t^\varepsilon &\le \varepsilon^{-p} B^p \sum_{k=m}^{\infty} \left(k + 1 + \frac{1}{2^{1/q} - 1} \right)^p 2^{-\frac{p}{q}k} \\
&= \frac{\varepsilon^{-p} B^p}{2^{\frac{p}{q}m}} \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-\frac{p}{q}(k-m)} \left(k - m + m + 1 + \frac{1}{2^{1/q} - 1} \right)^p \\
&= \frac{\varepsilon^{-p} B^p}{2^{\frac{p}{q}m}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\frac{p}{q}k} \left(k + m + 1 + \frac{1}{2^{1/q} - 1} \right)^p \le \frac{\varepsilon^{-p} B^p}{2^{\frac{p}{q}m}} \left(2^{p-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^p 2^{-\frac{p}{q}k} \right. \\
&\quad \left. + \left(m + 1 + \frac{1}{2^{1/q} - 1} \right)^p + 2^{p-1} \left(m + 1 + \frac{1}{2^{1/q} - 1} \right)^p \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{p}{q}k} \right) \\
&= \frac{\varepsilon^{-p} B^p}{2^{\frac{p}{q}m}} \left(\frac{C_p}{2^{p-1}} + \left(m + 1 + \frac{1}{2^{1/q} - 1} \right)^p \frac{2 - 2^{-p/q}}{1 - 2^{-p/q}} \right) \\
&< \varepsilon^{-p} B^p \left(\frac{2^p - 1}{1 - 2^{-p/q}} \frac{\left(\log_2 t + 1 + \frac{1}{2^{1/q} - 1} \right)^p}{t^{p/q}} + \frac{C_p}{t^{p/q}} \right).
\end{aligned}$$

В последнем неравенстве использовано то, что $2^{-\frac{p}{q}m} < 2^{p-1} t^{-p/q}$ при $2^m \le t < 2^{m+1}$.

Случай $\alpha \in \left(\frac{1}{q}, 1\right]$. Суммирование геометрической прогрессии в (2) приводит к цепочке неравенств:

$$\begin{aligned}
P_t^\varepsilon &\le \varepsilon^{-p} B^p \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-\frac{p}{q}k} \left(\frac{1 - 2^{(1/q-\alpha)(k+1)}}{1 - 2^{1/q-\alpha}} + \frac{1}{2^{1/q} - 1} \right)^p \\
&< \varepsilon^{-p} B^p \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-\frac{p}{q}k} \left(\frac{1 - 2^{-\alpha}}{(1 - 2^{1/q-\alpha})(1 - 2^{-1/q})} \right)^p \\
&= \varepsilon^{-p} B^p \left(\frac{1 - 2^{-\alpha}}{(1 - 2^{1/q-\alpha})(1 - 2^{-1/q})} \right)^p \frac{2^{-\frac{p}{q}m}}{1 - 2^{-p/q}} \\
&< \varepsilon^{-p} B^p \left(\frac{1 - 2^{-\alpha}}{(1 - 2^{1/q-\alpha})(1 - 2^{-1/q})} \right)^p \frac{2^{p/q}}{1 - 2^{-p/q}} t^{-p/q}.
\end{aligned}$$

В последнем неравенстве использовано то, что $2^{-\frac{p}{q}m} < 2^{p/q} t^{-p/q}$ при $2^m \le t < 2^{m+1}$.

Замечание 3. Как упоминалось ранее, лемма 1 гарантирует, что, за исключением тривиального случая $f - f^* = 0$, максимально возможная скорость сходимости в эргодической теореме фон Неймана как для дискретного так и для непрерывного времени — это $\|A_t f - f^*\|_p = O(t^{-1})$ при $t \to \infty$, т. е. она не превосходит степенной с показателем 1. Такая скорость достижима, причем при $1 < p < \infty$ она в случае дискретного типа времени в силу результатов из [5] достигается только на когомологичных нулю функциях $f - f^*$, т. е. функциях вида $f - f^* = h \circ T - h$, где $h \in L_p(\Omega)$.

Замечание 4. Теоремы 2 и 3, а также замечание 2 дают при $p = 2$ ($C_p = C_2 = 24$) по сравнению с неравенствами из [7, 10] более точные оценки величин P_t^ε: имея ту же самую асимптотику стремления к нулю при $t \to \infty$, они содержат меньшие константы. Более того, условия теорем 2 и 3 значительно «экономнее»: для оценки скорости сходимости в теореме Биркгофа достаточно иметь оценки величин $\|A_t f - f^*\|_p$ только при t, равных степеням двойки, а не при всех натуральных числах, как это было в случае динамических систем с дискретным временем в [7] или при всех положительных вещественных числах в случае непрерывного времени в [10].

Замечание 5. Как известно (см., например, [1]), скорость сходимости в теореме фон Неймана в $L_2(\Omega)$ можно оценить по скорости убывания корреляций $b_t(f) = (f \circ T^t, f)$ или по особенности в нуле спектральной меры σ_{f-f^*}, отвечающей элементу $f - f^*$, т. е. меры, однозначно определяемой из представления $b_t(f - f^*) = \int e^{itx}\, d\sigma_{f-f^*}(x)$, где интеграл берется по окружности S^1 единичного радиуса в случае дискретного времени и по прямой $\mathbb{R}$ в случае непрерывного времени (см., например, [13, приложение 2]). Отметим, что для ряда динамических систем (например, некоторые бильярды и системы Аносова) имеются численные оценки скорости убывания корреляций, что позволяет в силу результатов из [6, 9] получить численные оценки величин $\|A_t f - f^*\|_2$, а значит, используя теоремы 1–3, оценить скорость сходимости P_t^ε в теореме Биркгофа для этих систем.

Замечание 6. Скорости сходимости в теореме Биркгофа могут быть оценены и другими методами. Например, в случае ограниченности усредняемой функции f эту скорость можно оценивать по скорости убывания вероятностей больших уклонений (см. [1, 14, 15]).

§ 4. Операторные аналоги

Если вспомнить, что со всякой динамической системой можно связать полугруппу $\left\{U_T^t\right\}_{t\ge 0}$ изометрических операторов, действующую в $L_p(\Omega)$ по правилу $U_T^t f = f \circ T^t$, то становится ясно, что все утверждения статьи при своем доказательстве использовали только изометричность в $L_p(\Omega)$ операторов U_T^t, а также в случае непрерывного времени то, что

$$\|\delta_m^*\|_p = \Big\|\sup_{2^m \le t < 2^{m+1}} |A_t g|\Big\|_p = \left\|\sup_{2^m \le t < 2^{m+1}} \left|\frac{1}{t}\int_0^t U_T^t f(\omega)\, d\lambda(\omega)\right|\right\|_p < \infty.$$

Более того, при доказательстве операторных аналогов теорем 1–3 и замечаний 1, 2 можно даже предполагать только то, что $\left\{U_T^t\right\}_{t\ge 0}$ является произвольной полугруппой сжатий в $L_p(\Omega)$ с естественным ограничением на $\left\{U_T^t\right\}_{t\ge 0}$ в случае непрерывного времени, заключающемся в требовании существования средних $A_t g = \frac{1}{t}\int\limits_0^t U_T^t g\,dt \in L_p(\Omega)$ для рассматриваемых в соответствующих утверждениях функциях $g \in L_p(\Omega)$. Необходимые изменения в доказательствах операторных аналогов упомянутых ранее утверждений очевидны, за исключением случая непрерывного времени в теореме 1: проверку условия $\|\delta_m^*\|_p < \infty$, по-видимому, не всегда можно провести (тем не менее для часто встречающихся в литературе сильно измеримых полугрупп L_1–L_∞ сжатий и положительных сжатий условие $\|\delta_m^*\|_p < \infty$ выполнено). Поэтому приведем ниже только операторный аналог теоремы 1 с наброском усложненного из-за отказа от условия $\|\delta_m^*\|_p < \infty$ доказательства.

Теорема 1′. *Пусть $p \in (1,\infty)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $g \in L_p(\Omega)$, и U_T^t — произвольная полугруппа сжатий в $L_p(\Omega)$. Тогда в случае дискретного типа времени для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ при условии $2^m \le n < 2^{m+1}$, где $m \in \mathbb{Z}_+$, справедливо неравенство*

$$P_n^\varepsilon = \lambda\{\sup_{k\ge n}|A_k g| \ge \varepsilon\} \le \varepsilon^{-p}\sum_{k=m}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}2^{-(k-l)/q}\|A_{2^l}g\|_p\right)^p.$$

В случае же непрерывного типа времени для всех вещественных $t \ge 1$ и $\varepsilon > 0$ при условии $2^m \le t < 2^{m+1}$, где $m \in \mathbb{Z}_+$, и условии существования средних

$$A_t g = \frac{1}{t}\int\limits_0^t U_T^t g\,dt \in L_p(\Omega)$$

справедливо неравенство

$$P_t^\varepsilon = \lambda\{\sup_{s\ge t}|A_s g| \ge \varepsilon\} \le \varepsilon^{-p}\sum_{k=m}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}2^{-(k-l)/q}\|A_{2^l}g\|_p + 2^{-k/q}\frac{\|g\|_p}{2^{1/q}-1}\right)^p.$$

Доказательство. Как отмечалось ранее, доказательство для дискретного случая получается очевидным изменением доказательств леммы 2 и теоремы 1, поэтому займемся случаем непрерывного времени. Будем использовать обозначения из леммы 3 для средних функции g.

Из леммы 2 следует, что для $h > 0$ и $p-\varepsilon > 1$ при $\varepsilon \ge 0$ справедлива оценка

$$\Big\|\max_{2^m\le k<2^{m+1}}\big|A_k^d(T^h)g\big|\Big\|_{p-\varepsilon} \le \sum_{l=0}^{m}2^{-(m-l)/q}\big\|A_{2^l}^d(T^h)g\big\|_p.$$

Поступая, как в лемме 3, отсюда получим, что

$$\Big\|\max_{s\in D_r^m}\big|A_s^c(T^1)g\big|\Big\|_{p-\varepsilon} \le \sum_{l=0}^{m}2^{-(m-l)/q}\big\|A_{2^l}^c(T^1)g\big\|_p + 2^{-m/q}\frac{\|g\|_p}{2^{1/q}-1}. \tag{3}$$

Если ввести последовательность $\{\xi_r^\varepsilon\}_{r=0}^\infty$, $\xi_r^\varepsilon = \big(\max_{s\in D_r^m}\big|A_s^c(T^1)g\big|\big)^{p-\varepsilon}$, и функцию $G_\varepsilon(t) = t^{p/(p-\varepsilon)}$, то, подставляя $\varepsilon = 0$ в (3), получим для всех $\varepsilon > 0$, $p-\varepsilon > 1$, выполнение условий

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_\varepsilon(t)}{t} = \infty, \quad \sup_r\int\limits_\Omega G_\varepsilon\big(|\xi_r^\varepsilon|\big)\,d\lambda < \infty,$$

достаточных (см., например, [16, гл. II, § 6, лемма 3]) для равномерной интегрируемости $\{\xi_r^\varepsilon\}_{r=0}^\infty$. Это с учетом сходимости λ-п. в. $\{\xi_r^\varepsilon\}_{r=0}^\infty$ к $\sup\limits_{s\in D_\infty^m}\bigl|A_s^c(T^1)g\bigr|^{p-\varepsilon}$ при $r\to\infty$ эквивалентно

$$\lim_{r\to\infty}\bigl\|\xi_r^\varepsilon\bigr\|_{p-\varepsilon}=\bigl\|\sup_{s\in D_\infty^m}\bigl|A_s^c(T^1)g\bigr|\bigr\|_{p-\varepsilon}.$$

Переходя к пределу при $r\to\infty$ в (3) и замечая, как в лемме 3, что

$$\bigl\|\sup_{s\in D_\infty^m}\bigl|A_s^c(T^1)g\bigr|\bigr\|_{p-\varepsilon}=\bigl\|\sup_{2^m\le s<2^{m+1}}\bigl|A_s^c(T^1)g\bigr|\bigr\|_{p-\varepsilon},$$

в итоге получим

$$\bigl\|\sup_{2^m\le s<2^{m+1}}\bigl|A_s^c(T^1)g\bigr|\bigr\|_{p-\varepsilon}\le\sum_{l=0}^m 2^{-(m-l)/q}\bigl\|A_{2^l}^c(T^1)g\bigr\|_p+2^{-m/q}\frac{\|g\|_p}{2^{1/q}-1}.$$

Отсюда по неравенству Чебышева

$$\varepsilon_1\bigl(\lambda\bigl\{\sup_{2^m\le s<2^{m+1}}|A_s^c(T^1)g|\ge\varepsilon_1\bigr\}\bigr)^{1/(p-\varepsilon)}\le\sum_{l=0}^m 2^{-(m-l)/q}\bigl\|A_{2^l}^c(T^1)g\bigr\|_p+2^{-m/q}\frac{\|g\|_p}{2^{1/q}-1}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ в этом неравенстве, получим, что

$$\varepsilon^p\lambda\bigl\{\sup_{2^m\le s<2^{m+1}}\bigl|A_s^c(T^1)g\bigr|\ge\varepsilon\bigr\}\le\left(\sum_{l=0}^m 2^{-(m-l)/q}\bigl\|A_{2^l}^c(T^1)g\bigr\|_p+2^{-m/q}\frac{\|g\|_p}{2^{1/q}-1}\right)^p.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что

$$P_t^\varepsilon\le\sum_{k=m}^\infty\lambda\bigl\{\sup_{2^m\le s<2^{m+1}}\bigl|A_s^c(T^1)g\bigr|\ge\varepsilon\bigr\},$$

при $2^m\le t<2^{m+1}$.

Замечание 7. При $p=2$ соответствующим образом измененные формулировки леммы 1, теорем 1–3, замечаний 1–4 как при дискретном, так и при непрерывном времени остаются справедливыми для стационарных в широком смысле процессов $\{X_t(\omega)\}_{t\ge0}$. Причиной этому служит то, что во всех доказательствах использовалось в случае дискретного времени только следующее свойство этих процессов:

$$\left\|\sum_{j=k}^{n+k}X_j\right\|_2=\left\|\sum_{j=0}^{n}X_j\right\|_2.$$

В случае непрерывного времени доказательство аналога теоремы 1 можно провести по схеме доказательства теоремы 1′ с очевидными изменениями. Теорему 1 с замечанием 1 можно рассматривать как достаточный признак выполнения УЗБЧ для стационарных в широком смысле процессов, причем с оценкой скорости сходимости в УЗБЧ. Отметим, что более точные признаки и даже критерии УЗБЧ для стационарных в широком смысле процессов были получены в [17]. Там же приводился ряд неулучшаемых оценок скорости сходимости в УЗБЧ для специальных классов стационарных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качуровский А. Г.* Скорости сходимости в эргодических теоремах // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 4. С. 73–124.
2. *Гапошкин В. Ф.* О скорости убывания вероятностей ε-уклонений средних стационарных процессов // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 3. С. 366–372.
3. *Гапошкин В. Ф.* Несколько примеров к задаче об ε-уклонениях для стационарных последовательностей // Теория вероятностей и ее применения. 2001. Т. 46, № 2. С. 370–375.
4. *Гапошкин В. Ф.* Сходимость рядов, связанных со стационарными последовательностями // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1975. Т. 39, № 6. С. 1366–1392.
5. *Browder F.* On the iteration of transformations in noncompact minimal dynamical systems // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. V. 9, N 5. P. 773–780.
6. *Качуровский А. Г., Седалищев В. В.* Константы оценок скорости сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 8. С. 21–40.
7. *Качуровский А. Г., Седалищев В. В.* О константах оценок скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа // Мат. заметки. 2012. Т. 91, № 4. С. 624–628.
8. *Беляев Ю. К.* Один пример процесса с перемешиванием // Теория вероятностей и ее применения. 1961. Т. 6, № 1. С. 101–102.
9. *Джулай Н. А., Качуровский А. Г.* Константы оценок скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1039–1052.
10. *Седалищев В. В.* Константы оценок скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа с непрерывным временем // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1102–1110.
11. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
12. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
13. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
14. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В.* Скорости сходимости в эргодических теоремах для некоторых бильярдов и диффеоморфизмов Аносова // Докл. АН. 2013. Т. 451, № 1. С. 11–13.
15. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В.* Большие уклонения и скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа // Мат. заметки. 2013. Т. 94, № 4. С. 569–577.
16. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.
17. *Гапошкин В. Ф.* Критерии усиленного закона больших чисел для классов стационарных в широком смысле процессов и однородных случайных полей // Теория вероятностей и ее применения. 1977. Т. 22, № 2. С. 295–319.

Статья поступила 14 июня 2013 г.

Седалищев Владимир Викторович
Новосибирский гос. университет,
Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vvs1988@yandex.ru