Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2014. Том 55, № 2

УДК 512.554.5

ВЫРОЖДЕННЫЕ АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

С. В. Пчелинцев

Аннотация. Доказано, что всякая вырожденная альтернативная алгебра характеристики $\neq 2$ содержит ненулевой идеал, обладающий аддитивным базисом из абсолютных делителей нуля сколь угодно большого порядка. В качестве следствий доказываются существование бесконечного числа неизоморфных коммутативных первичных альтернативных алгебр, а также существование бесконечных серий строгих и нестрогих исключительных альтернативных алгебр, имеющих различные наборы собственных тождеств.

Ключевые слова: альтернативная алгебра, абсолютный делитель нуля произвольного порядка, первичная исключительная алгебра, С-операция, тождество, альтернативный монстр, изотоп.

Введение

Всюду в работе, если не оговорено противное, термин «алгебра» означает линейную альтернативную алгебру над полем Φ. Напомним [1], что алгебра называется *альтернативной*, если в ней выполнены тождества

$$(x, x, y) = 0, \quad (x, y, y) = 0.$$

Алгебра называется *первичной*, если для любых ее ненулевых идеалов I, J произведение IJ отлично от нуля. Элемент $0 \neq a \in A$ называется *абсолютным делителем нуля* (сокращенно *а.д.н.*), если $a^2 = (aA)a = 0$. Алгебра A называется *невырожденной*, если она не содержит а.д.н.

Известна теорема Слейтера о строении первичных невырожденных алгебр: *всякая такая алгебра либо ассоциативна, либо является кольцом Кэли — Диксона* [1]. Кроме того, первичная алгебра над полем характеристики $\neq 3$ невырожденна.

Первичная вырожденная алгебра называется *исключительной*. Примеры исключительных алгебр построены в [2–6]: $S[X]$ — монстр [2], $J_0(G, D)$ — алгебра Скосырского [3], $B_0(G, D, \gamma)$, $\gamma \in G_0$, — алгебра Шестакова [4], где G — ассоциативная алгебра Грассмана, а D — сдвигающее дифференцирование. Заметим, что $J_0(G, D)$ и $B_0(G, D, \gamma)$ — четные компоненты первичных супералгебр $J(G, D)$ и $B(G, D, \gamma)$. Отметим также, что алгебры $S[X]$ и $J_0(G, D)$ коммутативны, а алгебра $B_0(G, D, \gamma)$ *строгая*, т. е. удовлетворяет тождеству $[[x, y], z] = 0$.

Известно, что исключительная алгебра A удовлетворяет 2-му условию Энгеля [7], т. е. в алгебре A верно тождество $[[x, y], y] = 0$; присоединенная алгебра A^+ также исключительная [6]; с помощью С-операции σ на алгебре S можно

Работа выполнена при финансовой поддержке FAPESP (Бразилия), грант 2012/04702–7, Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00938–а) и фонда «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.419).

определить структуру исключительной алгебры A (которая обозначалась через S^σ и называлась *деформацией* S) так, что $A^+ = S$ и коммутатор $[x, y]$ в алгебре A совпадает со значением $x\sigma y$ операции σ [6]. Там же доказано, что существует бесконечно много неизоморфных некоммутативных деформаций монстра $S[X]$, и сформулирован вопрос о конечности множества многообразий, порожденных исключительными алгебрами.

В данной работе продолжается изучение вырожденных алгебр и их тождеств. Работа состоит из четырех параграфов. В § 1, включающем предварительные сведения, доказано, что всякая С-операция согласована с операциями Брака; отсюда вытекает, что линейная комбинация операций Брака является С-операцией [6]. Следовательно, функции F^+_{3n+7}, введенные в [8], являются муфанговыми в любой 2-энгелевой алгебре A (этот факт используется при доказательстве теоремы 1).

Элемент $0 \neq a \in A$ называется *а.д.н. порядка* n, если для любых элементов $x_1, \dots, x_n \in A$ справедливы равенства

$$aT(x_1)\dots T(x_k)\cdot aT(x_{k+1})\dots T(x_m) = 0$$

(для всех $m \leq n$). А.д.н. порядка 1 является а.д.н. в обычном смысле.

Известно, что в альтернативной алгебре A над полем Φ а.д.н. порождает нильпотентный идеал, если алгебра A является конечно порожденной [1] или характеристика Φ отлична от 2 и 3 [2]. В 1982 г. Е. И. Зельманов [9] доказал, что вырожденная йорданова алгебра характеристики $\neq 2$ содержит а.д.н. любого порядка. Назовем алгебру *сильно вырожденной порядка* n, если она обладает аддитивным базисом, состоящим из а.д.н. порядка n. Идеал алгебры назовем *сильно вырожденным порядка* n, если он как алгебра обладает указанным свойством.

Используя результаты работы [10], легко понять, что вырожденная $(-1, 1)$-алгебра содержит сильно вырожденный идеал любого порядка.

В § 2 доказана теорема 1 — аналог этого результата для альтернативных алгебр: всякая вырожденная альтернативная алгебра характеристики $\neq 2$ содержит сильно вырожденный идеал любого порядка. Отсюда, в частности, вытекает, что существует бесконечно много неизоморфных коммутативных исключительных алгебр (теорема 2); соответствующие алгебры возникают как подходящие идеалы монстра.

В § 3 доказано, что любой ненулевой вербальный идеал в $S[X]$ имеет те же тождества, что и сама алгебра (теорема 3), однако никакой вербальный идеал монстра не является свободной алгеброй (теорема 4).

В § 4 с использованием теоремы 1 доказывается, что существует бесконечно много многообразий, порожденных некоммутативными исключительными алгебрами (теорема 5). Первичные алгебры возникают как подходящие изотопы произвольной коммутативной первичной алгебры.

§ 1. С-операции и муфанговы функции

1.1. Основные обозначения и тождества. Для коммутаторов, ассоциаторов и йордановых произведений используются стандартные обозначения: $[a, b] = ab - ba$ — коммутатор; $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ — ассоциатор; $a \circ b = ab + ba$ и $a \bullet b = \frac{1}{2} a \circ b$ — йордановы произведения. Кроме того, $\widehat{A}$ — алгебра, полученная из A внешним присоединением единицы; $X^\triangledown$ или $\mathrm{id}\, l_A(X)$ обозначает идеал алгебры A, порожденный множеством X; $\mathrm{alg}_A(X)$ — подалгебра в A, порожденная множеством X.

Всюду ниже, если не оговорено противное, A — альтернативная алгебра характеристики 3, удовлетворяющая второму условию Энгеля, т. е. в A верно тождество

$$[[x,y],y]=0. \tag{1}$$

Из (1) легко вытекают тождества

$$[[[x,y],z],t]=[[x,y],[z,t]]=0. \tag{2}$$

С алгеброй A связаны присоединенные йорданова алгебра A^+ и алгебра Ли A^-:

$$A^+=(A;+;\bullet),\quad A^-=(A;+;[,]).$$

Напомним [1], что ассоциатор в алгебре A^+ имеет представление

$$(x,y,z)^+=(x,y,z)+[[x,y],z]. \tag{3}$$

Заметим, что из тождеств (2) и (3) вытекает равенство $(a,b,c)^+=(a,b,c)$, если один из элементов a,b,c является коммутатором. Это замечание в дальнейшем используется без каких-либо пояснений.

Операторы правого умножения на элемент a в алгебрах A, A^+, A^- будем обозначать через R_a, R_a^+, R_a^- соответственно; оператор левого умножения в алгебре A обозначается через L_a. Положим

$$D_{a,b}=[R_a^+,R_a^+],\quad R_{a,b}=R_{ab}-R_aR_b,\quad R_{a,b}^+=R_{a\bullet b}^+-R_a^+R_b^+.$$

В силу (3) алгебра A^+ альтернативна, поэтому $D_{a,b}=-R_{a,b}^+$.

Линейное отображение $'$ алгебры A в себя называется *дифференцированием*, если $(\forall x,y\in A)(xy)'=x'y+xy'$. Хорошо известно, что операторы R_a^-, $D_{a,b}$ и $R_{a,b}$ являются дифференцированиями алгебры A^+.

Следуя [8], напомним определение муфанговых функций и D-функций. Функция $f(x,y)$ называется *муфанговой по x и y*, если она по этим переменным линейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству

$$f(x,yT_x)=f(x,y)T_x^*,$$

где $T\in\{R,L\}$ и $R^*=L$, $L^*=R$.

Функция $f(x_1,\dots,x_n)$ называется *муфанговой относительно переменных* $x_1,\dots,x_n$, если она муфангова относительно любых двух переменных из этого списка; $f(x_1,\dots,x_n)$ называется *D-функцией относительно* $x_1,\dots,x_n$, если она кососимметрична по ним и по каждой из них является дифференцированием алгебры A^+.

Муфангова функция $f(x,y)$ является D-функцией. Обратно, D-функция $f(x,y)$ является муфанговой, только если выполнено тождество

$$f(xR_y^-,y)+f(x,y)R_y^-=0. \tag{4}$$

В альтернативной алгебре ассоциатор (x,y,z) является муфанговой функцией. Во всякой 2-энгелевой алгебре A муфанговыми функциями являются коммутаторы $[x,y],[[x,y],z]$ и йорданов ассоциатор $(x,y,z)^+$.

Хорошо известна теорема Артина: *алгебра альтернативна тогда и только тогда, когда любая ее 2-порожденная подалгебра ассоциативна* [1]. В частности, $([x,y],x,y)=0$. Линеаризации этого тождества, как и линеаризации тождеств правой и левой альтернативности, в дальнейшем используются без пояснений.

1.2. Согласованность C-операций с операциями Брака. Напомним, следуя [8], понятия C-операции и деформации коммутативной алгебры S. Билинейное отображение $\sigma : S \times S \to S$ называется C-*операцией*, если выполнены условия:

(а) $x\sigma x = 0$ (кососимметричность),

(б) $x^2\sigma y = (x\sigma y) \circ x$ (дифференциальность),

(в) $(x\sigma y)\sigma y = 0$ (2-энгелевость).

Пусть на алгебре S задана C-операция σ. Алгебра S^σ с той же аддитивной структурой, что и S, и новым умножением $x * y = xy + 2x\sigma y$, где xy — произведение в S, называется *деформацией* S. Из [7, основная теорема; 6, теорема 4.1] вытекает, что всякая исключительная алгебра является деформацией подходящей коммутативной исключительной алгеброй.

C-операции σ, τ на алгебре S называются *согласованными*, если

$$(\forall x, y \in S)\ (x\sigma y)\tau y + (x\tau y)\sigma y = 0.$$

Ясно, что σ и τ согласованы, только если $\sigma + \tau$ является C-операцией на S.

Пусть $a_1, \dots, a_{n+1}$ — фиксированные элементы алгебры S. По индукции определим отображения

$$\beta_n : S \times S \to S, \quad (x, y) \mapsto x\beta_n(a_1, \dots, a_n)y,$$

считая $x\beta_1(a_1)y = (x, a_1, y)$ и

$$x\beta_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1})y = (x\beta_n(a_1, \dots, a_n)a_{n+1}, a_{n+1}, y).$$

Отображение β_n называется *операцией Брака* (или B-*операцией*) *ранга* n.

Предложение 1. *Любая C-операция σ на коммутативной алгебре S согласована с операциями Брака.*

Доказательство. Пусть $A = S^\sigma$. Тогда A — 2-энгелева алгебра и $S = A^+$. Поскольку всякая B-операция ранга n является линейной комбинацией B-операций ранга 1 и 2 [6, п. 6.1], достаточно понять, что в алгебре A справедливы тождества

$$([x, y], a, y)^+ + [(x, a, y)^+, y] = 0, \quad (([x, b], y, a)^+, a, b)^+ + [((x, y, a)^+, a, b)^+, b] = 0.$$

Первое тождество является очевидным следствием тождеств Муфанг. Справедливость второго равенства покажем в серии пунктов. При этом тождества Муфанг будем использовать без дополнительных пояснений.

1^0. $[[([x, y], y, a), a], b] = -[[[(x, y, a), y], a], b] = 0$ в силу тождества (2).

2^0. $[[([x, b], y, a), a], b] = 0$. Применяя линеаризацию тождества из п. 1^0 и тождество (2), имеем

$$[[([x, b], y, a), a], b] = -[[([x, y], b, a), a], b] = -([[[x, y], a], b], b, a) = 0.$$

3^0. $(([x, b], y, a)^+, a, b)^+ = (([x, b], y, a), a, b)$. В самом деле,

$$\begin{aligned}(([x, b], y, a)^+, a, b)^+ &= (([x, b], y, a), a, b)^+\\ &= (([x, b], y, a), a, b) + [[([x, b], y, a), a], b] \text{ ввиду (3)}\\ &= (([x, b], y, a), a, b) \text{ ввиду п. } 2^0.\end{aligned}$$

4^0. $[((x,y,a)^+,a,b)^+,b]=[((x,y,a),a,b),b]$. Поскольку йорданов ассоциатор является муфанговой функцией, используя тождества (2) и (3), преобразуем разность:

$$
\begin{aligned}
&[((x,y,a)^+,a,b)^+,b]-[((x,y,a),a,b),b]\\
&\qquad=[((x,y,a)+[[x,y],a],a,b)^+,b]-[((x,y,a),a,b),b]\\
&\qquad\qquad=[([[x,y],a],a,b)^+,b]=-([[[x,y],a],b],a,b)^+=0.
\end{aligned}
$$

5^0. $([x,a],y,b)+([x,b],y,a)\equiv 0$, $([x,a],y,b)+([y,a],x,b)\equiv 0$ *по модулю* $\mathrm{Ker}(R_{a,b})$. Проверим сначала, что $([x,a],y,a)\equiv 0$. Учитывая $R_x^-D_{x,a}R_{x,b}=0$ [11, лемма 4], получаем

$$
\begin{aligned}
([x,a],y,a)R_{a,b}&=([x,a],y,a)^+R_{a,b}=-(y,[x,a],a)^+R_{a,b}\\
&=(a,[x,a],y)^+R_{a,b}=xR_a^-D_{a,y}R_{a,b}=0.
\end{aligned}
$$

Линеаризуя это равенство по a, имеем первое сравнение из п. 5^0.

Покажем, что $([x,a],x,b)\equiv 0$. Заметим, что $f(a,b):=([x,a],x,b)$ является D-функцией по a,b. Так как верно равенство $f(a,b)D_{a,b}=0$ [8, с. 112], используя (3) и (2), приходим к равенствам

$$([x,a],x,b)R_{a,b}=-([x,a],x,b)D_{a,b}=0.$$

Линеаризуя это тождество по x, получаем второе сравнение из п. 5^0.

6^0. $([x,y],a,b)\equiv 0$ *по модулю* $\mathrm{Ker}(R_{a,b})$. Поскольку $f(a,b):=([x,y],a,b)$ является D-функцией по a,b и $f(a,b)D_{a,b}=0$, ввиду (3)

$$([x,y],a,b)R_{a,b}=-([x,y],a,b)D_{a,b}-([x,y],a,b)R_a^-R_b^-=0.$$

С учетом пп. 3^0 и 4^0 для доказательства предложения осталось проверить справедливость следующего пункта.

7^0. $(([x,b],y,a),a,b)+[((x,y,a),a,b),b]=0$. На основании тождества Муфанг достаточно понять, что $([x,b],y,a)-[(x,y,a),b]\equiv 0$ по модулю $\mathrm{Ker}(R_{a,b})$.

Так как в любой альтернативной алгебре верно тождество Клейнфелда

$$([a,b],r,s)+2(a,b,[r,s])=[a,(b,r,s)]+[(a,r,s),b],$$

имеем

$$
\begin{aligned}
([x,b],y,a)-[(x,y,a),b]&=([x,b],y,a)+[x,(b,y,a)]-([x,b],y,a)-2(x,b,[y,a])\\
&=[x,(b,y,a)]+(x,b,[y,a]).
\end{aligned}
$$

Преобразуем первое слагаемое, используя тождества (2) и (3):

$$
\begin{aligned}
[x,(b,y,a)]&=[x,(b,y,a)^+]=([x,b],y,a)^++(b,y,[x,a])^++(b,[x,y],a)^+\\
&=([x,b],y,a)+(b,y,[x,a])+(b,[x,y],a)\equiv([x,b],y,a)+(b,y,[x,a])
\end{aligned}
$$

в силу п. 6^0. Следовательно,

$$([x,b],y,a)-[(x,y,a),b]=([x,b],y,a)+(b,y,[x,a])+(x,b,[y,a]),$$

и достаточно проверить, что последнее выражение сравнимо с нулем. Ввиду п. 5^0 имеем

$$
\begin{aligned}
&([x,b],y,a)+(b,y,[x,a])+(x,b,[y,a])\\
&\qquad\equiv([x,b],y,a)-([x,a],y,b)+([y,a],x,b)\\
&\qquad\equiv([x,b],y,a)+([x,b],y,a)-([x,a],y,b)\equiv 3([x,b],y,a)=0.
\end{aligned}
$$

Следствие 1 [6]. *Линейная комбинация операций Брака является С-операцией.*

1.3. Функции F^+_{3n+7}.

Лемма 1. *Пусть A — 2-энгелева алгебра. Тогда всякая B-операция $\beta(x,y)$ на алгебре A^+ является муфанговой функцией относительно x,y в алгебре A.*

Доказательство. По предложению 1 операция β согласована с коммутатором в алгебре A, т. е. для любых $x,y\in A$

$$[x\beta y,y]+[x,y]\beta y=0\quad\text{или}\ \beta(x,y)R^-_y+\beta(xR^-_y,y)=0.$$

Но это ввиду (4) означает муфанговость функции β, поскольку она является D-функцией.

Следуя [8], напомним определение функций F_{3n+7}. Во-первых, положим

$$\{x,y,z\}_c:=D_{x,y}R_{z,c}+D_{z,y}R_{x,c}+D_{x,z}R_{y,c},$$

$$G_a(x,y,z,t,v):=(x,y,a)\{z,t,a\}_v.$$

Во-вторых, считая заданными множества переменных $B_n=\{b_1,\dots,b_n\}$ и $P_m=\{p_1,\dots,p_m\}$, индукцией по n ($n\geq 1$) введем функции $G_{3n+3}:=G(B_n\mid P_{2n+3})$, полагая

$$G_6:=G_{b_1}(p_1,\dots,p_5),\dots,$$

$$G_{3n+6}:=G(B_n\mid P_{2n},p_{2n+1},p_{2n+2},b_{n+1})\cdot\{x,y,b_{n+1}\}_z,$$

где $x=p_{2n+3}$, $y=p_{2n+4}$, $z=p_{2n+5}$.

Наконец положим

$$F_{3n+7}:=F(B_{n+2}\mid P_{2n+5})=G_a(G(B_n\mid P_{2n},x,y,c),c,z,t,v),$$

где $a=b_{n+1}$, $c=b_{n+2}$, $x=p_{2n+1}$, $y=p_{2n+2}$, $z=p_{2n+3}$, $t=p_{2n+4}$, $v=p_{2n+5}$.

Если A — 2-энгелева алгебра, то через $F^+_{3n+7}(B_{n+2}\mid P_{2n+5})$ обозначим значение функции $F_{3n+7}(B_{n+2}\mid P_{2n+5})$ в коммутативной алгебре A^+ [8]. Поскольку функция $G^+_a(x,y,\dots)$ является линейной комбинацией B-операций [6, лемма 7.2], в силу леммы 1 функция F^+_{3n+7} муфангова по переменным из списка P_{2n+5}.

Отметим также, что если A — исключительная алгебра, то $F^+_{3n+7}\neq 0$ в силу [8, теорема 1; 7, основная теорема; 6, лемма 4.2].

Лемма 2. *Если $f(x,y,z,t)$ — D-функция от x,y,z,t, то*

$$G^+_a(f(x,y,\dots),x,y,\dots)=0.$$

В частности, $F^+_{3n+7}(B_{n+2}\mid f(x,y,\dots),x,y,\dots)=0$.

Доказательство этого утверждения содержится в [8, лемма 7].

Лемма 3. *Пусть $f(x,y,z,t,v,\dots)$ — муфангова функция от переменных x,y,z,t,v такая, что $f(f(x,y,\dots),x,y,\dots)=0$. Тогда справедливы следующие равенства:*

(а) $f(x,y,z,\dots)\cdot f(x,y,z,\dots)=0$,

(б) $f(x,y,z,t,\dots)a\cdot f(x,y,z,t,\dots)=0$,

(в) $f(x,y,z,t,\dots)\cdot f(x,y,z,t,\dots)a=0$.

Доказательство. (а) Положим $\vec{x}=(x,y)$, $g=f(\vec{x},z,b)$. Тогда в силу муфанговости

$$f(\vec{x},z,a)\cdot f(\vec{x},z,b)=f(\vec{x},z,a)\cdot g=-f(\vec{x},z,g)\cdot a+f(\vec{x},az,g)+f(\vec{x},gz,a)=0,$$

поскольку $gz = f(\vec{x}, z, zb)$.

(б) Положим $\vec{x} = (x, y, z)$, $g = f(\vec{x}, t)$. Тогда

$$\begin{aligned} &f(\vec{x}, t)a \cdot f(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t))a \cdot g = -f(\vec{x}, a)t \cdot g \\ &\quad = -f(\vec{x}, a)\{g \circ t\} \text{ ввиду правой альтернативности} = -f(\vec{x}, a) \cdot f(\vec{x}, t^2) = 0. \end{aligned}$$

(в) Аналогично для $\vec{x} = (x, y, z)$ с учетом левой альтернативности получаем

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, t, a) \cdot f(\vec{x}, t, b)c &= -f(\vec{x}, t, a) \cdot f(\vec{x}, c, b)t \\ &= f(\vec{x}, c, b) \cdot f(\vec{x}, t, a)t = f(\vec{x}, c, b) \cdot f(\vec{x}, t, ta) = 0. \end{aligned}$$

§ 2. Идеалы вырожденных алгебр

2.1. О существовании сильно вырожденных идеалов.

Лемма 4. *Пусть I — идеал алгебры A; $f(a_1, \dots, a_k)$ — полилинейный йорданов многочлен; $f_0(I)$ — линейное пространство, порожденное значениями $f(I)$ многочлена f на идеале I. Тогда идеал J алгебры A, порожденный множеством $f(I)$, имеет вид $J = f_0(I) \cdot \widehat{A}$.*

Доказательство. Поскольку f — йорданов многочлен, для любого дифференцирования D алгебры A^+ верно равенство

$$f(a_1, \dots, a_k)^D = \sum_i f(a_1, \dots, a_i^D, \dots, a_k), \tag{5}$$

значит, $f(I)^D$ содержится в линейном пространстве $f_0 := f_0(I)$. В частности,

$$(f_0, A, A) + [f_0, A] \subseteq f_0, \tag{6}$$

т. е. пространство f_0 δ-инвариантно и в силу [6, лемма 2.1] (ограничение на характеристику в этой лемме не является существенным) получаем требуемое.

Теорема 1. *Всякая вырожденная альтернативная алгебра характеристики $\neq 2$ содержит сильно вырожденный идеал произвольного порядка.*

Доказательство. Если $p = 0$ или $p > 3$, то всякий а.д.н. порождает нильпотентный идеал [2]. Поэтому можно считать, что $p = 3$, а алгебра A полупервична. Пусть a — а.д.н. в алгебре A, I_a — идеал, им порожденный в A.

Покажем, что $I_a \cap E(A) = 0$, где $E(A)$ — идеал, порожденный элементами $[[x, y], y]$. Поскольку алгебра A аппроксимируется первичными алгебрами A_ν [1], пусть $\{\varphi_\nu : A \to A_\nu\}$ — набор сюръективных аппроксимирующих гомоморфизмов.

Положим $I := I_a \cap E(A)$ и проверим, что $I \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi_\nu)$. В самом деле, если алгебра A_ν невырожденна, то она полупроста в смысле радикала Маккриммона $\mathbf{M}$, а идеалы I_a и $\varphi_\nu(I_a)$, очевидно, $\mathbf{M}$-радикальны, значит, $\varphi_\nu(I) \subseteq \varphi_\nu(I_a) = 0$. Если A_ν вырожденна, то $E(A_\nu) = 0$ [7], значит, $\varphi_\nu(I) \subseteq \varphi_\nu(E(A)) = E(A_\nu) = 0$. Итак, $I \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi_\nu)$. Следовательно, $I \subseteq \bigcap_\nu \mathrm{Ker}(\varphi_\nu) = 0$. Таким образом, $I_a \cap E(A) = 0$.

Докажем, что идеал I_a содержит ненулевой сильно вырожденный (порядка n) идеал J алгебры A. Рассмотрим многочлен $f(P_{2n+5}) := F^+_{3n+7}(B_{n+2} \mid P_{2n+5})$ при $n \geq 1$. Поскольку степень многочлена f по каждой переменной не выше 2, а характеристика поля равна 3, он эквивалентен своей полной линеаризации. Тогда по лемме 4 идеал J алгебры A, порожденный множеством $f(I_a)$, имеет вид $J = f_0(I_a) \cdot \widehat{A}$.

Проверим, что $J \neq 0$. В самом деле, пусть $J = 0$. Тогда $f(I_a) = 0$. Заметим, что алгебра I_a полупервична [1]. Значит, $f = 0$ является тождеством во всех первичных алгебрах A_ν, аппроксимирующих I_a. Поскольку $f \neq 0$ в первичной вырожденной алгебре [6–8], все алгебры A_ν невырожденны, что невозможно ввиду вырожденности идеала I_a. Значит, $J \neq 0$.

Докажем, что элемент by, где $b \in f(I_a)$, $y \in \widehat{A}$, является а.д.н. порядка n. Для этого достаточно понять, что элемент b является а.д.н. порядка $n+2$, т. е. любых $x_1, \dots , x_{n+2}$ справедливы равенства

$$bT(x_1)\dots T(x_m) \cdot T_b = 0 \quad (m \le n+2).$$

Ввиду равенства $I_a \cap E(A) = 0$ можно считать, что $E(A) = 0$.

Покажем, что в альтернативной алгебре всякое операторное слово $\xi = T(c_1)\dots T(c_{n+2})$ представимо в виде линейной комбинации операторных слов вида $R_{a_1,b_1} \dots R_{a_k,b_k} R_c^- R_d$, где $2k \le n+2$.

Так как справедливы равенства

$$L_a = R_a - R_a^-, \quad R_a R_b = R_{ab} + R_{a,b}, \quad L_a L_b = L_{ba} + R_{a,b},$$

$$R_a^- R_b^- = R_a R_b + L_a L_b - L_a R_b - R_a L_b, \quad [R_a, R_b^-] = R_{[a,b]} + 3R_{a,b},$$

$$[R_{a,b}, R_c] = R_{c,[a,b]} - R_{(c,a,b)},$$

индукцией по длине слова ξ получаем требуемое.

Без ограничения общности можно считать, что $b = f(P_{2n+5})$. Поскольку элемент b йорданов и отображения R_{a_i,b_i}, R_c^- — йордановы дифференцирования, представим $b\xi$ как линейную комбинацию элементов вида $f(t_1, \dots, t_m, \dots) \cdot d$, где $t_1, \dots, t_m \in P_{2n+5}$ и $m \ge 2n+5-(k+1) = 2n+4-k$.

Значит, $2m \ge 3n+6 \ge 10$, поскольку $n \ge 2$. Тогда $m \ge 5$. Отсюда в силу лемм 1–3 получаем, что b является а.д.н. порядка $n+2$.

2.2. О коммутативных первичных алгебрах. Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Существует бесконечно много неизоморфных первичных коммутативных альтернативных алгебр над бесконечным полем* Φ *характеристики* 3.

Доказательство. Пусть $S := S[Y]$ — свободная первичная коммутативная алгебра над множеством свободных порождающих Y. Допустим, что множество Y содержит символы $b_i, p_i, x_i, y_i, z_i, t_i,\ i = 1, 2, \dots.$ Обозначим через $f(b_1, \dots, b_{2n+4}; p_1, \dots, p_{2n+5})$ полную линеаризацию $F_{3n+7}(B_{n+2} \mid P_{2n+5})$. Заметим, что

$$f(b_1, b_1, b_2, b_2, \dots, b_{n+2}, b_{n+2}; p_1, \dots, p_{2n+5}) = 2^{n+2} F_{3n+7}(B_{n+2} \mid P_{2n+5}).$$

Напомним, что $f(b_1, \dots, b_{2n+4}; p_1, \dots, p_{2n+5})$ является муфанговой функцией относительно $p_1, \dots, p_{2n+5}$ и верно равенство

$$f(b_1, \dots, b_{2n+4}; f(c_1, \dots, c_{2n+4}; p_1, p_2, \dots), p_1, p_2, \dots) = 0.$$

Пусть $\mathrm{End}_\Phi(S)^*$ — мультипликативная полугруппа алгебры $\mathrm{End}_\Phi(S)$ линейных операторов пространства S и Γ — подполугруппа в $\mathrm{End}_\Phi(S)^*$, порожденная дифференцированиями $R_{u,v}$, где u, v — одночлены из S, и тождественным отображением $\mathbf{1}_S$.

Пусть $m = 3n+7$, $n \ge 2$. Положим также $f_m(t) := f(t_1, \dots, t_m)$ и $f_m(t\Gamma) := f(t_1\Gamma, \dots, t_m\Gamma)$.

Пусть I_m — вербальный идеал алгебры S, порожденный элементом $f_m(t)$. Легко видеть, что I_m линейно порождается элементами $f_m(w\Gamma)$ и $f_m(w\Gamma)\cdot v$, где $w := (w_1, \dots, w_m)$ и $w_1, \dots, w_m$, v — одночлены из S. Поскольку элементы $f_m(t\Gamma)$ и $f_m(t\Gamma)\cdot x$ — а.д.н. порядка n (см. заключительную часть доказательства теоремы 1), всякий элемент из множества $f_m(w\Gamma)\cup$ $f_m(w\Gamma)\cdot v$ также является а.д.н. порядка n.

Заметим также, что всякий однородный элемент идеала I_m имеет степень, не меньшую m, причем элементы степени m пропорциональны значениям $f_m(y)$, где $y := (y_1, \dots, y_m)$. Элемент $f_m(t)$ не может быть а.д.н. произвольного порядка в идеале I_m, поскольку I_m — первичная алгебра. Значит, $f_m(t)$ является а.д.н. порядка N (в алгебре I_m), но не является а.д.н. порядка $N+1$. Отсюда вытекает, что для любого $M > N$ элемент $f_m(t)$ не является а.д.н. порядка M.

Допустим, что идеалы I_m и I_{3M+7} изоморфны как алгебры. Тогда $f_m(t)$ является линейной комбинацией а.д.н. g_i порядка M. Каждый g_i — линейная комбинация элементов $f_m(y)$ и элементов степени $> m$. Значит, хотя бы один из g_i должен иметь вид $g_i = \alpha_y f_m(y) + h$, где $0 \neq \alpha_y \in \Phi$ и степень h больше m. Пусть многочлен g_i не содержит в своей записи ни одной из переменных $x_1, x_2, \dots$. Обозначим через $\varphi_1, \dots, \varphi_M$ многочлены вида $f_m(x)$ или $f_m(x)\cdot x_k$, причем будем считать, что эти многочлены записаны в разных переменных. Поскольку g_i — а.д.н. порядка M, то $g_i R(\varphi_1)\dots R(\varphi_M) g_i = 0$. В силу однородности многообразия отсюда вытекает равенство $f_m(t)R(\varphi_1)\dots R(\varphi_M)f_m(t) = 0$, т. е. $f_m(t)$ — а.д.н. порядка M (в алгебре I_m); противоречие.

§ 3. Вербальные идеалы монстра

3.1. Монстр $S[X]$. Следуя [2, § 3], напомним определение монстра.

Пусть $\Delta = \Phi[T]$ — алгебра обычных многочленов с единицей от счетного множества переменных $T = \{t_1, t_2, \dots\}$ над полем Φ; $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$, где Σ_i — множество правильных слов над множеством $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ четной или нечетной длины при $i = 0, 1$ соответственно; длина ξ и состав правильного слова обозначаются через $d(\xi)$ и $[\xi]$. Если $\xi, \eta \in \Sigma$, то запись $\xi \prec \eta$ означает, что любая переменная из ξ меньше любой переменной из η.

Положим $A_0 := A(\Delta)$ — свободный Δ-модуль с базисом $\{(a, \xi) \mid a \in \Delta, \xi \in \Sigma\}$. Напомним, что если $\xi \prec \eta$, то базисные элементы в A_0 умножаются по правилам:

$$(a,\xi)(b,\eta) = \begin{cases} (a+b, \xi\eta), & \text{если } d(\xi) \text{ или } d(\eta) \text{ четно;} \\ (a-b)(a+b-1, \xi\eta) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Всюду ниже $D(A_0)$ — ассоциаторный идеал алгебры A_0; легко понять, что он является свободным Δ-модулем с базисом из элементов (a, ξ), где $0 \neq a \in \Delta, d(\xi) \geq 2$.

Свободная алгебра многообразия, порожденного $D(A_0)$, над счетным множеством $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ свободных порождающих называется *монстром* и обозначается через $S[X]$.

Лемма 5. *Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — полилинейный многочлен из $S[X]$, то для базисных элементов $b_i = (t_i, \xi_i)$ верно равенство*

$$f(b_1, \dots, b_n) = \alpha(\lambda_f, \xi),$$

где $\alpha \in \Delta$, $\lambda_f = a_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i t_i$ — линейная форма над $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\xi = \overline{\xi_1 \dots \xi_n} \in \Sigma$.

Доказательство этого утверждения приведено в [2, § 3, лемма 2].

3.2. Тождества вербальных идеалов.

Теорема 3. *Для любого натурального числа n алгебра $S[X_n]$ вложима в любой собственный вербальный идеал алгебры $S[X]$, значит, все собственные вербальные идеалы алгебры $S[X]$ имеют одни и те же тождества.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ — однородный многочлен, имеющий степень d_i по переменной x_i, и $\Delta_1(f)$ — линеаризация многочлена f по переменной x_1 [1]. Тогда

$$f\big(x_1^{(1)} + \dots + x_{d_1}^{(1)}; x_2, \dots, x_n\big) \\ = \Delta_1(f)\big(x_1^{(1)}, \dots, x_{d_1}^{(1)}; x_2, \dots, x_n\big) + \tilde{f}\big(x_1^{(1)}, \dots, x_{d_1}^{(1)}; x_2, \dots, x_n\big),$$

где $\tilde{f}$ является суммой однородных многочленов и степень каждого из них по переменной $x_i^{(1)}$ $(i = 1, \dots, d_1)$ не менее 2. Поскольку

$$\tilde{f}(b_1, \dots, b_{d_1}; x_2, \dots, x_n) = 0$$

для любых базисных элементов $b_1, \dots, b_{d_1} \in D(A_0)$, имеем

$$f\left(\sum_{i=1}^{d_1} \beta_i b_i; x_2, \dots, x_n\right) = \left(\prod_{i=1}^{d_1} \beta_i\right) \Delta_1(f)(b_1, \dots, b_{d_1}; x_2, \dots, x_n).$$

Проводя линеаризации по остальным переменным $x_2, \dots$, получаем, что множества значений многочлена f и его полной линеаризации $\bar{f}$ в алгебре $D(A_0)$ совпадают.

Поскольку альтернативная ниль-алгебра ограниченного индекса конечного ранга нильпотентна [1], обозначим через N индекс нильпотентности алгебры $S[X_n]$. Ясно, что $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i \leq N$. Ввиду леммы 5 существуют такие элементы $\bar{b}_i = (t_i, \xi_i)$, $i \leq N$, что

$$f\left(\sum_{i=1}^{d_1} \bar{b}_i, \dots, \sum_{i=1}^{d_n} \bar{b}_{d'_{n-1}+i}\right) = \bar{f}(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots) = \alpha(\lambda_f, \xi) \neq 0, \tag{7}$$

где $d'_{n-1} = d_1 + \dots + d_{n-1}$, $0 \neq \alpha \in \Delta$, $\lambda_f = \lambda_f(t_1, t_2, \dots)$, $\xi = \overline{\xi_1 \xi_2 \dots}$.

Элементы $b_1, b_2, \dots$ назовем *f-подходящими*, если $\bar{f}(b_1, b_2, \dots) \neq 0$. Поскольку элемент $z_p = (0, e_p e_{p+1})$ централен в $D(A_0)$, для достаточно большого p, как и для любого $0 \neq \lambda \in \Delta$, элементы $z_p b_1, b_2, \dots$ и $\lambda b_1, b_2, \dots$ также f-подходящие.

Пусть V — ненулевой вербальный идеал в $S[X]$. Значит, существует полилинейный многочлен $v(x_1, \dots, x_m) \in V$ такой, что $v(D(A_0)) \neq 0$ и ввиду леммы 5 для некоторых базисных слов $b_i = (t_i, \eta_i)$ верно

$$v(b_1, \dots, b_m) = \beta(t, \eta) \neq 0,$$

где $0 \neq \beta \in \Delta, t = \lambda_v(t_1, t_2, \dots)$, $\eta = \overline{\eta_1 \eta_2 \dots}$. Если $\zeta \in \Sigma, d(\zeta) \geq 2$ и $\eta \prec \zeta$, то $(t, \eta)(t_{m+1} - t, \zeta) = (t_{m+1}, \eta\zeta)$, если $d(\eta\zeta)$ четно, $(t, \eta)(t_{m+1} - t + 1, \zeta) = -(t + t_{m+1} + 1)(t_{m+1}, \eta\zeta)$, если $d(\eta\zeta)$ нечетно.

Следовательно, множество значений полиномов $v(x_1, \dots, x_m)$ и $v(x_1, \dots, x_m) \cdot x_{m+1}$ в алгебре $D(A_0)$ содержит элементы вида $\gamma(t_k, \eta)$, где $0 \neq \gamma \in \Delta, t_k$ — произвольная переменная из T, η — произвольное правильное слово достаточно большой длины.

Считая, что переменные $x_k^{(i)}, y_l^{(j)} \in X$ попарно различны, рассмотрим n элементов:

$$v_i = \sum_{i=1}^{N} v\bigl(x_1^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}\bigr) + \sum_{i=1}^{N} v\bigl(y_1^{(i)}, \dots, y_m^{(i)}\bigr) \cdot y_{m+1}^{(i)},$$

где $i = \overline{1, n}$.

Докажем, что $f(v_1, \dots, v_n) \neq 0$. При подходящей подстановке вместо переменных базисных элементов (t_i, ζ_i) многочлены v_i $(i = \overline{1, n})$ перейдут в элементы вида $\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i(t_i, \xi_i) + \sum\limits_{i=1}^{N} \beta_i(t_{N+i}, \eta_i)$, где $\xi_i \in \Sigma_0$, $\eta_i \in \Sigma_1$.

Поскольку слагаемые, входящие в представление v_i, зависят от разных переменных, подставляя вместо некоторых переменных 0, а вместо других базисные элементы, получим, что набор элементов $(\alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_N)$ из кольца Δ содержит заранее выбранное число нулей как среди $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, так и среди $(\beta_1, \dots, \beta_N)$.

Следовательно, подходящей специализацией из v_i $(i = \overline{1, n})$ можно получить элементы

$$v_1^0 = \sum_{i=1}^{d_i} \gamma_i \tilde{b}_i, \dots, v_n^0 = \sum_{i=1}^{d_n} \gamma_{d'_{n-1}+i} \tilde{b}_{d'_{n-1}+i},$$

удовлетворяющие следующим условиям:

(а) $0 \neq \gamma_i \in \Delta$, (б) $\tilde{b}_i = (t_i, \xi'_i \psi_i)$, $t_i \in T$, (в) $\xi'_i \in \Sigma, \psi_i \in \Sigma_0$,

(г) $|\xi'_i| = |\xi_i|$, где ξ_i входят в базисные слова, участвующие в равенстве (7),

(д) все правильные слова $\xi'_1\psi_1, \xi'_2\psi_2, \dots$ записаны в различных переменных.

Тем самым в силу сделанного выше замечания о f-подходящих наборах, набор элементов $\gamma_1\tilde{b}_1, \gamma_2\tilde{b}_2, \dots$ является f-подходящим, т. е.

$$f\bigl(v_1^0, \dots, v_n^0\bigr) = \bar{f}(\gamma_1\tilde{b}_1, \gamma_2\tilde{b}_2, \dots) \neq 0.$$

Итак, если однородный многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ ненулевой, то $f(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — ненулевой неоднородный многочлен, то запишем f в виде суммы $f = f_r + f_{r+1} + \dots$ однородных компонент, где f_s имеет полную степень s и $f_r \neq 0$. Тогда, проводя указанную выше специализацию элементов v_i $(i = \overline{1, n})$, получаем, что $f_r(v_1, \dots, v_n)$ переходит в ненулевой элемент $\alpha(t_0, \xi_0)$, а все остальные элементы $f_{r+i}(v_1, \dots, v_n)$ при $i \geq 1$ принимают нулевые значения.

Отсюда, конечно, вытекает, что алгебры $\mathrm{alg}(v_1, \dots, v_n)$ и $S[X_n]$ изоморфны.

3.3. Идеал монстра не является свободной алгеброй.

Теорема 4. *Пусть I — идеал монстра $S[X]$; $S \to \overline{S} = S/S^2$ — канонический гомоморфизм. Если $\dim(\overline{S}/\overline{I}) \geq 2$, то идеал I — не свободная алгебра. В частности, каждый из следующих идеалов не является свободной алгеброй:*

(а) *идеал, содержащийся в S^2, в частности, всякий собственный вербальный идеал;*

(б) *конечно-порожденный идеал алгебры S.*

Доказательство. В алгебре S выберем какой-нибудь аддитивный базис (v_i), состоящий из одночленов. Рассмотрим в алгебре S идеал I и допустим, что он является свободной алгеброй с системой свободных порождающих $f_1, f_2, \dots$.

Дальнейшие рассуждения представим в виде последовательности пунктов.

1^0. Пусть идеал I содержится в S^3. Каждый многочлен g представим в виде линейной комбинации базисных одночленов $g = \sum\limits_i \lambda_i v_i$. *Нижней степенью* многочлена назовем наименьшую из степеней одночленов v_i, входящих в линейное представление g. Среди f_i выберем многочлен f_1, имеющий наименьшую возможную нижнюю степень. Тогда всякий базисный одночлен, входящий в линейное представление любого многочлена f_i, имеет степень ≥ 3.

Пусть порождающие $a \neq b \in X$ не входят в запись многочлена f_1. Тогда

$$(f_1, a, b) = \sum \alpha_i f_i + \sum \alpha_{ij} f_i f_j + \dots, \alpha_i \alpha_{ij} \in \Phi.$$

Сравнивая нижние степени многочленов в левой и правой частях данного равенства, получаем, что в правой части обязательно присутствует линейная часть. Итак,

$$(f_1, a, b) = (\dots + \alpha_{i_0} f_{i_0} + \dots) + \sum \alpha_{ij} f_i f_j + \dots, \alpha_{i_0} \neq 0.$$

Рассмотрим эндоморфизм φ алгебры I, тождественно действующий на $f := f_{i_0}$ и нулевым образом на всех других свободных порождающих. Тогда

$$(f_1, a, b)\varphi = \alpha f + \beta f^2 \quad \text{и } \alpha \neq 0.$$

Заметим, что в коммутативной алгебре квадрат ассоциатора нулевой, значит, $(f_1, a, b)^2 = 0$ и

$$0 = 0\varphi = (f_1, a, b)^2\varphi = ((f_1, a, b)\varphi)^2 = (\alpha f + \beta f^2)^2.$$

Поскольку в алгебре S верно тождество $x^3 = 0$, то $f^2 = 0$. Так как f — свободный порождающий алгебры I, первичная алгебра I удовлетворяет тождеству $x^2 = 0$; противоречие.

2^0. Пусть идеал I содержится в S^2. Разложим каждый f_i из I по аддитивному базису (v_i). Пусть f_1 содержит базисный одночлен степени 2.

Выполняя элементарные преобразования, можно считать, что базисный одночлен x_1x_2 или x_1^2 входит в f_1 и не входит в линейное представление многочленов f_j $(j \geq 2)$.

Пусть порождающие $a \neq b \in X$ не входят в запись многочлена f_1. Тогда $(f_1, a, b) = \sum \alpha_i f_i + \sum \alpha_{ij} f_i f_j + \dots$, причем ввиду п. 1^0 можно считать, что в этом представлении отсутствует линейная часть, т. е.

$$(f_1, a, b) = \sum \alpha_{ij} f_i f_j + \sum \alpha_{ijk} f_i f_j \cdot f_k + \dots.$$

Тогда (x_1x_2, a, b) — линейная комбинация одночленов $(x_1x_2)(ab)$, $(x_1a)(x_2b)$, $(x_1b)(x_2a)$ либо $\left(x_1^2, a, b\right)$ является линейной комбинацией элементов $x^2(ab)$, (xa) (xb). Заметим, что если верно первое, то верно и второе. Значит, $(x^2, a, b) = \alpha x^2(ab) + \beta(xa)(xb)$. Тогда $(x^2, a, b) = \gamma x^2(ab)$ в силу центрального тождества Муфанг, следовательно, в алгебре S верно тождество $(x^2, a, b)x = 0$, поскольку $x^3 = 0$. Однако такое тождество не может выполняться ни в какой первичной алгебре [6, лемма 8.1.]; противоречие. Значит, многочлены не содержат базисных одночленов степени 2, и $I \subseteq S^3$.

3^0. Пусть идеал I порождается элементами $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots$ и $\dim(\overline{S}/\overline{I}) \geq 2$. Выполняя линейные замены переменных и применяя линейные элементарные преобразования, можно считать, что $f^{(i)} = x_i + \sum\limits_k v_{ik}$, где $x_i \in X$, $v_{ik} \in S^2$. Поскольку идеал I порождается данными элементами, можно считать, что свободные порождающие f_i имеют вид

$$f_i = x_i + \sum_j w_{ij} \quad (i \geq 1),$$

где $w_{ij} \in S^2$.

Так как $\dim(\overline{S}/\overline{I}) \geq 2$, найдутся $a \neq b \in X$, которые не входят в линейные части ни одного из порождающих f_i. Следуя предыдущему, можно считать, что

$$(f_1, a, b) = \sum \alpha_{ij} f_i f_j + \sum \alpha_{ijk} f_i f_j \cdot f_k + \dots.$$

Значит, $(x_1, a, b) = \alpha x_1(ab)$, но отсюда вытекает тождество $(x^2, a, b)x = 0$; противоречие.

§ 4. О тождествах исключительных алгебр

4.1. Вспомогательные леммы. Введем следующие многочлены:

$$f_n := [x, y]R(a_1, b_1) \dots R(a_n, b_n) \cdot [z, t],$$

$$g_n := [[x, y], z]R(a_1, b_1) \dots R(a_n, b_n) \cdot [[p, q], r].$$

Лемма 6. *Если A — строгая исключительная алгебра, $a \in \mathrm{Nil}(A)$, $\rho := \{R_{x,y} \mid x, y \in A\}$ и $(\forall n \geq 0, x, y \in A)$ $a\rho^n \cdot [x, y] = 0$, то $a = 0$.*

Доказательство. Положим $\bar{a} \in \{a\rho^n \mid n \geq 0\}$ и рассмотрим множество

$$W := \{w \in A \mid (\forall \bar{a})\bar{a} \cdot w = w \cdot \bar{a} = 0\}.$$

В силу тождества левой альтернативности

$$(\bar{a}, w, [x, y]) = -(w, \bar{a}, [x, y]) = 0.$$

Поскольку в правоальтернативной алгебре верно тождество Клейнфелда

$$(xy, r, s) + (x, y, [r, s]) = x(y, r, s) + (x, r, s)y,$$

то

$$0 = (\bar{a} \cdot w, x, y) = \bar{a} \cdot (w, x, y) + (\bar{a}, x, y) \cdot w - (\overline{a}, w, [x, y]) = \bar{a} \cdot (w, x, y).$$

Аналогично $(w, x, y) \cdot \bar{a} = 0$. Так как по условию $\bar{a} \cdot [w, x] = 0$, то W — δ-инвариантное пространство и $W^\nabla = W \circ \widehat{A}$ [6, лемма 2.1]. Далее, $(\bar{a}, W, W) = -(W, \bar{a}, W) = 0$, и, значит,

$$(\bar{a}, W^\nabla, W^\nabla) = (\bar{a}, W \circ \widehat{A}, W^\nabla) = (\bar{a}, W, W^\nabla)R^+_{\widehat{A}} = (\bar{a}, W, W)R^{+2}_{\widehat{A}} = 0.$$

Отсюда в силу известной леммы Слейтера [1, с. 209] вытекает, что $a \in N_{\mathrm{Ass}}(A)$. Далее, для любого $x \in A$

$$[a, x] \in Z(A) \cap \mathrm{Nil}(A) = 0$$

(поскольку центр первичной алгебры не содержит нильпотентных элементов) и $a \in Z(A) \cap \mathrm{Nil}(A) = 0$.

Лемма 7. *Если в исключительной алгебре A выполнены все тождества вида $g(n) = 0$, $n \geq 0$, то алгебра A строгая.*

Доказательство. Положим

$$\rho^+ = \{R^+_{a,b} \mid a, b \in A\}, \quad \rho^- = \{R^-_a \mid a \in A\},$$

$$\rho = \{R_{a,b} \mid a, b \in A\}, \quad \delta = \{R_{a,b}, R^-_a \mid a, b \in A\}.$$

Допустим, что $V := [[A,A],A] \neq 0$. Тогда по условию $V\rho^n \circ V = 0$ для любого n. Отсюда вытекает, что $V\rho^n \circ V\rho^m = 0$ для любых m, n. На самом деле верно более сильное равенство $V\delta^n \circ V\delta^m = 0$ при всех m, n. Для этого достаточно понять, что $V\delta^n \subseteq \sum\limits_{i \le n} V\rho^i$.

Запишем тождество Клейнфелда

$$([x,y],r,s) + 2(x,y,[r,s]) = [x,(y,r,s)] + [(x,r,s),y]$$

в операторной форме:

$$[R_y^-, R_{r,s}] = R^-_{(y,r,s)} - 2R_{y,[r,s]}.$$

Тогда $V\delta^n \subseteq \sum\limits_{i \le n} V(\rho^-)^i\rho^{n-i}$, что и доказывает требуемое включение.

Пусть W — δ-инвариантное подпространство, порожденное множеством V. Тогда $W \circ W = 0$. Ясно, что W инвариантно относительно ρ^+ в силу (3).

Пусть $S = A^+$. Тогда S — коммутативная первичная альтернативная алгебра [6, 7], содержащая ненулевое δ-инвариантное подпространство W с нулевым умножением. Ясно, что (W,W,S) — δ-инвариантное подпространство в S, содержащееся в W. Далее,

$$(W,W,S) \circ S \subseteq (W, W \circ S, S) - (W,S,S) \circ W \subseteq W,$$

значит, $(W,W,S)^\nabla$ — тривиальный идеал S, следовательно, $(W,W,S) = 0$. Тогда $(W, W \circ S, S) = 0$ и $(W, W^\nabla, S) = 0$ [6]. Отсюда по лемме Слейтера $W \subseteq Z(S)$, и поскольку центр не содержит нильпотентных элементов, то $W = 0$; противоречие.

4.2. Различимость тождеств $f_n = 0$ $(i \in \mathbb{N})$ и $g_n = 0$ $(i \in \mathbb{N})$. Пусть S — коммутативная первичная ниль-алгебра; рассмотрим на ней C-операцию σ: $x\sigma y = (x,c,y)$, где $c \in S$. Заметим, что деформированная алгебра S^σ может быть отождествлена с изотопом $S^{(c)}$ [6, п. 5.1].

Напомним, что изотоп $S^{(c)} = \langle S; +, \cdot_c\rangle$ — это пространство S относительно нового умножения $x \cdot_c y = xc \cdot y$, где $c = 1 + \xi$ — обратимый элемент в $\widehat{S}$, $\xi \in S$. Представление коммутатора в изотопе очевидно: $[x,y]_c = (x,c,y)$. Поскольку для ассоциатора в $S^{(c)}$ верно представление

$$(a,x,y)_c = (ac, xc, y) + (ac, x, c)y$$

[12, § 2], оператор $R^{(c)}_{x,y} = R^{(c)}_x R^{(c)}_y - R^{(c)}_{x \cdot_c y}$ представим в виде

$$R^{(c)}_{x,y} = R_c R_{xc,y} + R_c R_{x,c} R_y, \tag{8}$$

где R_x и $R^{(c)}_x$ — операторы умножения в алгебрах S и $S^{(c)}$ соответственно, $R_{x,y} = R_x R_y - R_{xy}$.

(а) Строгие алгебры. Если $c = 1 + \xi$ и ξ — а.д.н. алгебры S порядка $3n+4$, то изотоп $S^{(c)}$ является строгой алгеброй и в ней выполнено тождество $f_n = 0$. В самом деле, в силу (8) имеем

$$f_n(S^{(c)}) \subseteq \sum \xi R^2 (R^3)^n R(\xi R^2) = 0,$$

где $R := \{R_x \mid x \in \widehat{S}\}$.

(б) Нестрогие алгебры. Докажем, что в алгебре S существуют ξ, η — а.д.н. порядка $3n+8$ такие, что $p(\xi,\eta,x,y,z) := ((x,\xi,y),\eta,z) + ((x,\eta,y),\xi,z) \neq 0$.

Действительно, пусть в S для произвольных a, b, x, y, z — а.д.н. порядка $3n+8$ — выполнено равенство $p(a, b, x, y, z) = 0$. Тогда по теореме 1, выбирая идеал I с аддитивным базисом из а.д.н. порядка $3n + 8$, получим, что I удовлетворяет тождеству $((x, c, y), c, z) = 0$, что невозможно [8, п. 3.2].

Пусть $c = 1 + \xi + \eta$, где ξ, η — а.д.н. порядка $3n + 8$ и $p(\xi, \eta, x, y, z) \neq 0$. Тогда изотоп $S^{(c)}$ — нестрогая алгебра и аналогично п. (а)

$$g_n(S^{(c)}) \subseteq \sum \xi R^4 (R^3)^n R(\xi R^4) = 0,$$

где $R := \{R_x \mid x \in \widehat{S}\}$. Заметим также, что в алгебре $S^{(c)}$ выполнено тождество $\big[[x, y], z\big][p, q] = 0$.

Из пп. (а), (б) и лемм 6, 7 немедленно вытекает

Теорема 5. (а) *Существует бесконечно много многообразий, порожденных строгими исключительными* (*унитальными*) *алгебрами с тождеством*

$$[x_1, y_1][x_2, y_2] = 0.$$

(б) *Существует бесконечно много многообразий, порожденных нестрогими исключительными* (*унитальными*) *алгебрами с тождеством*

$$[[x_1, y_1], z_1][x_2, y_2] = 0.$$

Замечание. Случай унитальных алгебр получается на основании [5, лемма 2].

В связи с полученными результатами отметим открытый

Вопрос. *Существуют ли первичные коммутативные альтернативные ниль-алгебры, обладающие различными наборами тождеств?*

Для первичных вырожденных специальных йордановых алгебр характеристики, отличной от 2 и 3, ответ на аналогичный вопрос положителен [12].

Данная работа была выполнена автором во время визита в Университет Сан Паулу (Бразилия) с 1.09.2012 по 30.08.2013. Автор глубоко признателен принимающей стороне за отличные условия для проведения научных исследований и выражает искреннюю благодарность И. П. Шестакову за организацию визита.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
2. *Пчелинцев С. В.* О нильпотентных элементах и ниль-радикалах альтернативных алгебр // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 6. С. 674–695.
3. *Скосырский В. Г.* Первичные йордановы алгебры и конструкция Кантора // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 3. С. 301–316.
4. *Шестаков И. П.* Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 675–716.
5. *Пчелинцев С. В.* Первичные альтернативные алгебры // Фунд. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 2. С. 651–657.
6. *Пчелинцев С. В.* Первичные альтернативные алгебры, близкие к коммутативным // Изв. РАН. Сер. мат. 2004. Т. 68, № 1. С. 183–206.
7. *Пчелинцев С. В.* Исключительные первичные альтернативные алгебры // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1322–1337.
8. *Пчелинцев С. В.* О тождествах свободных конечно порожденных альтернативных алгебр над полем характеристики 3 // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 9. С. 109–124.

9. *Зельманов Е. И.* Абсолютные делители нуля и алгебраические йордановы алгебры // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 6. С. 100–116.
10. *Пчелинцев С. В.* Первичные алгебры и абсолютные делители нуля // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50, № 1. С. 79–100.
11. *Пчелинцев С. В.* О кручении свободного альтернативного кольца // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 6. С. 142–149.
12. *Пчелинцев С. В.* Изотопы первичных $(-1, 1)$ и йордановых алгебр // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 3. С. 388–423.

Статья поступила 15 августа 2013 г.

Пчелинцев Сергей Валентинович
Финансовый университет при Правительстве РФ,
Ленинградский пр., 49, Москва 123468;
Московский городской педагогический университет,
2-й Сельскохозяйственный проезд, 4, Москва 129226
pchelinzev@mail.ru