Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2014. Том 55, № 2

УДК 515.17+517.545

ПРОСТРАНСТВО ГАРМОНИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ПРИМА НА ПЕРЕМЕННОЙ КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Т. А. Пушкарева, В. В. Чуешев

Аннотация. Гармонические дифференциалы Прима и их классы периодов играют большую роль в современной теории функций на компактных римановых поверхностях [1–7]. В работе исследовано гармоническое расслоение Прима, слои которого суть пространства гармонических дифференциалов Прима на переменных компактных римановых поверхностях, и найдена его связь с когомологическим расслоением Ганнинга над пространством Тейхмюллера для двух важных подгрупп несущественных и нормированных характеров на компактной римановой поверхности. Изучены периоды голоморфных дифференциалов Прима для существенных характеров на переменных компактных римановых поверхностях.

Ключевые слова: гармонический дифференциал Прима, абелев дифференциал, характер, пространство Тейхмюллера.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть F — фиксированная гладкая компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$ с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^{g}$, т. е. упорядоченным набором образующих для $\pi_1(F)$, а F_0 — некоторая комплексно-аналитическая структура на F. В дальнейшем риманову поверхность $(F; F_0)$ для краткости записи будем обозначать через F_0. По теореме униформизации существует конечно порожденная фуксова группа Γ первого рода, инвариантно действующая на единичном круге $U = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$, такая, что U/Γ конформно эквивалентна F_0. Группа Γ изоморфна $\pi_1(F)$ и имеет представление

$$\Gamma = \left\langle A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g : \prod_{j=1}^{g} C_j = I \right\rangle,$$

где $C_j = [A_j, B_j] = A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1}$, $j = 1, \dots, g$, а I — тождественное отображение [1, 2].

Любая другая комплексно-аналитическая структура на F может быть отождествлена с некоторым дифференциалом Бельтрами μ на F_0, т. е. выражением вида $\mu(z)d\bar{z}/dz$, которое инвариантно относительно выбора локального параметра на F_0, где $\mu(z)$ — комплекснозначная функция на F_0 и $\|\mu\|_{L_\infty(F_0)} < 1$. Эту структуру на F будем обозначать через F_μ. Ясно, что $\mu = 0$ соответствует F_0. Пусть $M(F)$ — множество всех комплексно-аналитических структур на F с

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12–01–90800–мол–рф–нр, 12–01–00210–а, 14–01–31109 мол–а).

топологией C^∞ сходимости на F_0, $\operatorname{Diff}_0(F)$ — группа всех сохраняющих ориентацию гладких диффеоморфизмов поверхности F на себя, гомотопных тождественному диффеоморфизму. Группа $\operatorname{Diff}_0(F)$ действует на $M(F)$ по правилу $\mu \to f^*\mu$, где $f \in \operatorname{Diff}_0(F)$, $\mu \in M(F)$. Тогда пространство Тейхмюллера $\mathbf{T}_g(F) = \mathbf{T}_g(F_0)$ есть фактор-пространство $M(F)/\operatorname{Diff}_0(F)$ [1, 2].

Так как отображение $U \to F_0 = U/\Gamma$ — локальный диффеоморфизм, любой дифференциал Бельтрами μ на F_0 поднимается до Γ-дифференциала Бельтрами μ на U, т. е. $\mu \in L_\infty(U)$, $\|\mu\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{z \in U} |\mu(z)| < 1$, и

$$\mu(T(z))\overline{T'(z)}/T'(z) = \mu(z), \quad z \in U, \ T \in \Gamma.$$

Если Γ-дифференциал μ, определенный на U, продолжить на $\overline{\mathbf{C}} \backslash U$, положив $\mu = 0$, то существует единственный квазиконформный гомеоморфизм $w^\mu : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ с неподвижными точками $+1, -1, i$, который является решением уравнения Бельтрами $w_{\bar z} = \mu(z) w_z$. Отображение $T \to T_\mu = w^\mu T (w^\mu)^{-1}$ задает изоморфизм группы Γ на квазифуксову группу $\Gamma_\mu = w^\mu \Gamma (w^\mu)^{-1}$.

Классические результаты Альфорса, Берса [1] и других авторов утверждают, что 1) $\mathbf{T}_g(F)$ является комплексным многообразием размерности $3g - 3$ при $g \geq 2$; 2) $\mathbf{T}_g(F)$ имеет единственную комплексно-аналитическую структуру такую, что естественное отображение $\Phi : M(F) \to M(F)/\operatorname{Diff}_0(F) = \mathbf{T}_g(F)$ голоморфно и при этом Φ имеет только локальные голоморфные сечения; 3) элементы из Γ_μ голоморфно зависят от $[\mu]$.

Два Γ-дифференциала Бельтрами μ и ν конформно эквивалентны, если и только если

$$w^\mu T (w^\mu)^{-1} = w^\nu T (w^\nu)^{-1}, \quad T \in \Gamma.$$

Естественно, что выбор образующих $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$ в $\pi_1(F)$ эквивалентен выбору системы образующих $\{a_k^\mu, b_k^\mu\}_{k=1}^g$ в $\pi_1(F_\mu)$ и $\{A_j^\mu, B_j^\mu\}_{j=1}^g$ в Γ_μ для любого $[\mu]$ из $\mathbf{T}_g$. Отсюда получим отождествления $M(F)/\operatorname{Diff}_0(F) = \mathbf{T}_g(F) = \mathbf{T}_g(\Gamma)$. При этом имеем взаимно однозначное соответствие между классами дифференциалов Бельтрами $[\mu]$, классами конформно эквивалентных отмеченных римановых поверхностей $[F_\mu; \{a_k^\mu, b_k^\mu\}_{k=1}^g]$ и отмеченными квазифуксовыми группами Γ_μ [1].

Для любого фиксированного $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ в [1, теорема 1, с. 99] построены голоморфные формы $\zeta_1[\mu] = \zeta_1([\mu], \xi)\, d\xi, \ldots, \zeta_g[\mu] = \zeta_g([\mu], \xi)\, d\xi$ на $w^\mu(U)$. Эти формы являются поднятиями на $w^\mu(U)$ голоморфных на F_μ абелевых дифференциалов $\zeta_1[\mu], \ldots, \zeta_g[\mu]$, которые образуют канонический базис на F_μ, двойственный каноническому гомотопическому базису $\{a_k^\mu, b_k^\mu\}_{k=1}^g$ на F_μ. Этот базис голоморфно зависит от модулей $[\mu]$ отмеченной компактной римановой поверхности F_μ. Кроме того, матрица b-периодов $\Omega(\mu) = (\pi_{jk}[\mu])_{j,k=1}^g$ на F_μ тоже голоморфно зависит от $[\mu]$.

Характером ρ для F_μ называется любой гомоморфизм $\rho : (\pi_1(F_\mu), \cdot) \to (\mathbf{C}^*, \cdot), \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Характер единственным образом задается упорядоченным набором $\left(\rho(a_1^\mu), \rho(b_1^\mu), \ldots, \rho(a_g^\mu), \rho(b_g^\mu)\right) \in (\mathbf{C}^*)^{2g}$ [3].

Определение 1.0. *q-Дифференциалом Прима* относительно фуксовой группы Γ для ρ, т. е. (ρ, q)-дифференциалом, называется дифференциал $\omega(z)\, dz^q$ такой, что $\omega(Tz)(T'z)^q = \rho(T)\omega(z)$, $z \in U$, $T \in \Gamma$, $\rho : \Gamma \to \mathbf{C}^*$.

Определение 1.1. *Мультипликативной функцией* f на F_μ для характера ρ назовем мероморфную на $w^\mu(U)$ функцию f такую, что $f(Tz) = \rho(T) f(z)$, $z \in w^\mu(U)$, $T \in \Gamma_\mu$.

Если f_0 — мультипликативная функция на F_μ для ρ без нулей и полюсов, то $\frac{df_0}{f_0} = 2\pi i \sum\limits_{j=1}^{g} c_j([\mu],\rho)\zeta_j([\mu])$ и

$$f_0([\mu],P) = f_0([\mu],P_0)\exp\int\limits_{P_0[\mu]}^{P} 2\pi i\sum_{j=1}^{g} c_j([\mu],\rho)\zeta_j([\mu]),$$

где $P_0[\mu] = f^{s[\mu]}(P_0) \in F_\mu$, $c_j([\mu],\rho) \in \mathbf{C}$, $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} c_j \le \frac{1}{2}$, $j = 1,\dots,g$, c_j зависят голоморфно от $[\mu]$ и от ρ. При этом интегрирование ведется от фиксированной точки $P_0[\mu]$ до текущей точки P на переменной поверхности F_μ и $s[\mu]$ — голоморфное сечение Эрла в $M(F)$ над $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$ [4]. Характер ρ для f_0 имеет вид

$$\rho\big(a_k^\mu\big) = \exp 2\pi i c_k([\mu],\rho), \quad \rho\big(b_k^\mu\big) = \exp\left(2\pi i\sum_{j=1}^{g} c_j([\mu],\rho)\pi_{jk}([\mu])\right),\ k = 1,\dots,g.$$

Будем называть такие характеры ρ *несущественными*, а f_0 (с таким характером) — *единицей*. Характеры, которые не являются несущественными, будем называть *существенными* на $\pi_1(F_\mu)$. Обозначим через $\operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbf{C}^*)$ группу всех характеров на Γ с естественным умножением. Несущественные характеры образуют подгруппу L_g в группе $\operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbf{C}^*)$. Обозначим через $U_j = \{\rho \in \operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbf{C}^*) : \rho(a_j) \ne 1\}$ и $U_{g+j} = \{\rho \in \operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbf{C}^*) : \rho(b_j) \ne 1\}$, $j = 1,\dots,g$. Назовем характер ρ на Γ *нормированным*, если все его значения лежат на единичной окружности $S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$.

Лемма 1.1 [5, лемма 2.2.2]. *Голоморфное главное* $\operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbf{C}^*)$*-расслоение* E *биголоморфно изоморфно тривиальному расслоению* $\mathbf{T}_g(F)\times\operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbf{C}^*)$ *над* $\mathbf{T}_g(F)$.

Определение 1.2. Дифференциал Прима ϕ класса C^1 на $F = U/\Gamma$ для ρ называется *мультипликативно точным*, если $\phi = df(z)$ и $f(Tz) = \rho(T)f(z)$, $T \in \Gamma$, $z \in U$, т. е. f — мультипликативная функция на F класса C^2 для ρ.

Обозначим через $Z^1(\Gamma_\mu,\rho)$ для $\rho \in \operatorname{Hom}(\Gamma_\mu,\mathbf{C}^*)$ множество всех отображений $\phi : \Gamma_\mu \to \mathbf{C}$ таких, что $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T)$, $S,T \in \Gamma_\mu$ [3].

Каждый элемент $\phi \in Z^1(\Gamma_\mu,\rho)$ будет единственно определяться упорядоченным набором комплексных чисел $\phi(A_1),\dots,\phi(A_g),\phi(B_1),\dots,\phi(B_g)$, удовлетворяющих уравнению $\sum\limits_{j=1}^{g}[\sigma(B_j)\phi(A_j) - \sigma(A_j)\phi(B_j)] = 0$, которое получается из соотношения $\prod\limits_{j=1}^{g} C_j = I$ в Γ_μ, где $\sigma(T) = 1 - \rho(T)$, $T \in \Gamma_\mu$. Тогда $Z^1(\Gamma_\mu,\rho)$ — комплексное векторное $(2g-1)$-мерное пространство для $\rho \ne 1$ и $2g$-мерное пространство для $\rho = 1$. Пусть $B^1(\Gamma_\mu,\rho)$ — одномерное подпространство в $Z^1(\Gamma_\mu,\rho)$, порожденное элементом σ. Тогда $H^1(\Gamma_\mu,\rho) = Z^1(\Gamma_\mu,\rho)/B^1(\Gamma_\mu,\rho)$ — комплексное векторное $(2g-2)$-мерное пространство для $\rho \ne 1$. Будем называть множество $G = \bigcup\limits_{\rho\ne1,[\mu]} H^1(\Gamma_\mu,\rho)$ *когомологическим расслоением Ганнинга* над $\mathbf{T}_g \times (\operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbf{C}^*)\backslash\{1\})$ [3].

Пусть ϕ — замкнутый дифференциал Прима на F_0 для ρ. Проинтегрировав этот дифференциал от фиксированной точки z_0 до $z \in U$, получим, что $f(Tz) - f(Tz_0) = \rho(T)(f(z) - f(z_0))$, где $\phi = df(z)$, $z \in U$, $f(z)$ — интеграл Прима на круге U для дифференциала Прима ϕ, определенный с точностью до аддитивного слагаемого. Отсюда для $T \in \Gamma$ верно равенство $f(Tz) = \rho(T)f(z) + \phi_{f,z_0}(T)$, где $\phi_{f,z_0}(T) = f(Tz_0) - \rho(T)f(z_0)$. Таким образом, каждому $T \in \Gamma$ соответствует число $\phi_{f,z_0}(T)$, а значит, определено отображение $\phi_{f,z_0} : \Gamma \to \mathbf{C}$. Это отображение называется *отображением периодов* для ϕ. Оно зависит от выбора интеграла Прима $f(z)$ на U и базисной точки z_0. Если $f_1(z) = f(z) + c$ — другой интеграл Прима для того же дифференциала Прима ϕ, то $\phi_{f_1,z_0}(T) = f_1(Tz_0) - \rho(T)f_1(z_0) = \phi_{f,z_0}(T) + c\sigma(T)$, $T \in \Gamma$. Легко проверить, что оба отображения ϕ_{f,z_0} и ϕ_{f_1,z_0} удовлетворяют коциклическому соотношению $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T)$, $S, T \in \Gamma$. Это означает, что они принадлежат пространству $Z^1(\Gamma, \rho)$ и представляют один и тот же класс периодов $[\phi]$ из $H^1(\Gamma, \rho)$ для дифференциала Прима ϕ на F_0.

Для замкнутого дифференциала Прима ϕ можно определить так называемые, классические периоды. Для $T \in \Gamma$ соответствующий ему классический период $\phi_{z_0}(T)$ равен $\int\limits_{z_0}^{Tz_0} \phi$ и верно равенство $\phi_{z_0}(T) = \phi_{f,z_0}(T) - f(z_0)\sigma(T)$ [5].

Следовательно, отображения вида $T \to \phi_{f,z_0}(T)$ (периоды по Ганнингу) и вида $T \to \phi_{z_0}(T)$ (классические периоды) определяют один и тот же класс периодов $[\phi] \in H^1(\Gamma, \rho)$ для дифференциала Прима ϕ на F_0 для ρ. Поэтому корректно определено $\mathbf{C}$-линейное отображение $p : \phi \to [\phi]$ из векторного пространства замкнутых дифференциалов Прима ϕ на F_0 для ρ в векторное пространство $H^1(\Gamma, \rho)$.

Обозначим через $\Omega_{2,\rho}(F_\mu)$ пространство дифференциалов Прима второго рода на F_μ для характера ρ [2, 5].

Лемма 1.2 [5]. *Если $\omega \in \Omega_{2,\rho}(F_\mu)$ имеет класс периодов $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$, то ω — мультипликативно точный дифференциал на F_μ для ρ.*

Пусть $\phi = df(z) = \varphi(z)\,dz$, тогда $\varphi(Tz)T'(z) = \rho(T)\varphi(z)$, $T \in \Gamma$, $z \in U$, и ϕ для ρ на $F = U/\Gamma$ есть голоморфная мультипликативная касп-форма для (Γ, ρ) веса (-2) [3].

Также имеем $\varphi(Tz) = (1/T'(z))\rho(T)\varphi(z) = k(T, z)\rho(T)\varphi(z)$, $T \in \Gamma$, $z \in U$, где $k(T, z)$ — канонический фактор автоморфности для U/Γ, который зависит только от комплексно-аналитической структуры на U/Γ. Следовательно, $\varphi(z)$ — голоморфное сечение для голоморфного линейного расслоения $k \otimes \rho$ над U/Γ, где $\otimes$ обозначает тензорное произведение линейных расслоений над U/Γ [2, 3].

Лемма 1.3 [5, гл. 3, лемма 3.2.1]. *Любой дифференциал Прима ϕ на F класса C^∞ для ρ единственно разлагается на сумму дифференциала Прима ϕ_1 типа $(1, 0)$ на F класса C^∞ для ρ и дифференциала Прима ϕ_2 типа $(0, 1)$ на F класса C^∞ для ρ.*

Определение 1.3. *Гармоническим дифференциалом Прима* на F для $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ называется гармоническая (однозначная) дифференциальная 1-форма $\phi = \phi_1(z)\,dz + \phi_2(z)\,d\bar{z}$ на U такая, что

$$\phi_1(Tz)dTz + \phi_2(Tz)\,d\overline{Tz} = \rho(T)(\phi_1(z)\,dz + \phi_2(z)\,d\bar{z}), \quad T \in \Gamma,\ z \in U.$$

Гармонический дифференциал Прима ϕ на U представляется в виде $\phi = \phi_1(z)\,dz + \phi_2(z)\,d\bar{z}$, где $\phi_1(z)\,dz = df_1(z), \phi_2(z)\,d\bar{z} = d\overline{f_2(z)}, f_j(z)$ — голоморфные функции на $U, j = 1, 2$, которые определяются с точностью до аддитивных комплексных констант. Поэтому $\phi = df(z)$, где $f(z) = f_1(z) + \overline{f_2(z)}$ — комплекснозначная гармоническая функция на U (гармонический интеграл Прима для дифференциала ϕ). Отсюда получаем следующие соотношения:

$$f(Tz) = \rho(T)f(z) + \phi(T), \quad \phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T).$$

Теорема 1.1 [5, гл. 3, теорема 3.2.3]. *Если ϕ, ψ — замкнутые дифференциалы Прима на F класса C^∞ для ρ_1 и ρ_2 соответственно, то*

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Delta} \phi \wedge \psi &= \int\limits_{\partial\Delta} h(z)\psi \\ &= \sum_{j=1}^{g}\Bigl[(1-\rho_1\rho_2(B_j)) \int\limits_{z\in\tilde{a}_j} h(z)\psi - (1-\rho_1\rho_2(A_j)) \int\limits_{z\in\tilde{b}_j} h(z)\psi\Bigr] \\ &+ \sum_{j=1}^{g}\Bigl\{[\phi(C_1\dots C_{j-1})(1-\rho_2(B_j)) - \rho_2(B_j)(\phi(C_j)+\phi_h(B_j))] \int\limits_{z\in\tilde{a}_j} \psi \\ &+ [(\rho_2(A_j)-1)\phi(C_1\dots C_{j-1}) + \rho_2(A_j)\phi_h(A_j) - \phi(C_j)] \int\limits_{z\in\tilde{b}_j} \psi\Bigr\},\end{aligned}$$

где Δ — фиксированная фундаментальная область для Γ в U, $\phi = dh(z)$ на U, $h(Tz) = \rho(T)h(z) + \phi_h(T)$, $T \in \Gamma$,

$$\int\limits_{\tilde{a}_j} \psi = \int\limits_{z_0}^{A_j z_0} \psi, \quad \int\limits_{\tilde{b}_j} \psi = \int\limits_{z_0}^{B_j z_0} \psi,$$

причем это равенство инвариантно относительно выбора интеграла $h(z)$ для ϕ с точностью до аддитивного слагаемого.

§ 2. Гармонические дифференциалы Прима для несущественных характеров

Обозначим через $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ пространство голоморфных дифференциалов Прима для несущественного характера ρ, а $\langle df_0\rangle$ — одномерное подпространство, порожденное df_0 на F_μ [3].

Теорема 2.1. *Векторное расслоение*

$$\mathbf{P}_{1,0} = \bigcup_{[\mu]\in\mathbf{T}_g,\, \rho\in L_g\setminus 1} \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))/\langle df_0\rangle$$

является голоморфным векторным расслоением ранга $g-1$ над $\mathbf{T}_g \times (L_g\setminus 1)$ для любого $g \geq 2$.

Доказательство. Ясно, что $U_j \cap (L_g\setminus 1)$, $j = 1, \dots, 2g$, образует открытое покрытие для базы $L_g\setminus 1$. Для фиксированного $k = 1, \dots, g$ рассмотрим $\rho_0 \in U_k \cap (L_g\setminus 1)$. Известно, что $df_0 = 2\pi i(c_1 f_0\zeta_1 + \dots + c_g f_0\zeta_g)$, где характер ρ_0 для f_0 имеет вид $\rho_0(a_j) = \exp(2\pi i c_j)$, $j = 1, \dots, g$. Для $\rho_0 \in U_k$ имеем $\rho_0(a_k) \neq 1$ или $c_k \neq 0$ для $\rho \in U(\rho_0) \subset U_k \cap (L_g\setminus 1)$ и $[\mu] \in U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$. Отсюда

$$f_0\zeta_k = \frac{1}{2\pi i c_k}(df_0) - \frac{1}{c_k}\sum_{j\neq k} c_j f_0\zeta_j.$$

Из [5] следует, что для любого $\phi([\mu],\rho;z)\,dz\in\Gamma(F_\mu,O^{1,0}(\rho))$ верно разложение

$$\phi([\mu],\rho;z)\,dz=\alpha_1 f_0\zeta_1+\dots+\alpha_g f_0\zeta_g=\sum_{j\neq k}\alpha_j f_0\zeta_j+\alpha_k f_0\zeta_k$$
$$=\sum_{j\neq k}\left(\alpha_j-\frac{\alpha_k}{c_k}c_j\right)f_0\zeta_j+\alpha_k\frac{df_0}{2\pi i c_k}.$$

Отсюда получаем, что

$$\langle\phi([\mu],\rho;z)\,dz\rangle=\sum_{j\neq k}\left(\alpha_j-\frac{\alpha_k}{c_k}c_j\right)\langle f_0\zeta_j\rangle.$$

Таким образом, набор классов смежности для дифференциалов Прима

$$f_0\zeta_1,\dots,\widehat{f_0\zeta_k},\dots,f_0\zeta_g$$

является базисом локально голоморфных сечений по $[\mu]$ и ρ для нашего расслоения над $U([\mu_0])\times U(\rho_0)$. Если $\phi'([\mu],\rho;z)\,dz$ — другой представитель класса смежности $\langle\phi([\mu],\rho;z)\,dz\rangle$, то

$$\phi'([\mu],\rho;z)\,dz=\phi([\mu],\rho;z)\,dz+mdf_0,\quad m\in\mathbf{C},$$

или

$$\sum_{j=1}^{g}\alpha'_j f_0\zeta_j=\sum_{j=1}^{g}\alpha_j f_0\zeta_j+m\sum_{j=1}^{g}2\pi i c_j f_0\zeta_j.$$

Таким образом,

$$\alpha'_j=\alpha_j+m2\pi i c_j,\quad j=1,\dots,g.$$

Следовательно,

$$\langle\phi'([\mu],\rho;z)\,dz\rangle=\sum_{j\neq k}\left(\alpha'_j-\frac{\alpha'_k}{c_k}c_j\right)\langle f_0\zeta_j\rangle$$
$$=\sum_{j\neq k}\left(\alpha_j+m2\pi i c_j-\frac{\alpha_k+m2\pi i c_k}{c_k}c_j\right)\langle f_0\zeta_j\rangle=\sum_{j\neq k}\left(\alpha_j-\frac{\alpha_k}{c_k}c_j\right)\langle f_0\zeta_j\rangle.$$

Поэтому отображение

$$\langle\phi([\mu],\rho;z)\,dz\rangle\to(\lambda_1,\dots,\hat\lambda_k,\dots,\lambda_g),$$

где $\lambda_j=\alpha_j-\frac{\alpha_k}{c_k}c_j$ для $j\neq k$, над $U([\mu_0])\times U(\rho_0)$ задает карту (тривиализацию) $\Theta([\mu_0],\rho_0)$ для нашего расслоения, т. е. $\mathbf{P}_{1,0}|U([\mu_0])\times U(\rho_0)\cong U([\mu_0])\times U(\rho_0)\times\mathbf{C}^{g-1}$. Эти карты задают структуру голоморфного векторного расслоения на $\mathbf{P}_{1,0}$ над $\mathbf{T}_g\times(L_g\backslash 1)$.

Для фиксированного $j=1,\dots,g$ пусть $\rho_0\in U_{g+j}\cap(L_g\backslash 1)$, т. е. $\rho_0(b_j)\neq 1$. Предположим, что все $\rho_0(a_j)$ равны 1, т. е. $c_j=0$, $j=1,\dots,g$. Имеем $\rho_0(a_j)=\exp(2\pi i c_j)=1$, $\rho_0(b_j)=\exp\left(2\pi i\sum\limits_{k=1}^{g}c_k\pi_{jk}\right)$, а значит, $\rho_0(b_j)=1$; противоречие. Следовательно, хотя бы одно c_k ненулевое и $\rho_0\in U_{g+j}\cap U_k$, т. е. $\rho_0(a_k)\neq 1$. Таким образом, этот случай сводится к предыдущему. Теорема доказана.

Отображение периодов $p:\Gamma(F_\mu,O^{1,0}(\rho))/\langle df_0\rangle\to H^1(\Gamma_\mu,\rho)$ такое, что

$$\phi(z)\,dz\to p(\phi(z)\,dz)=[\phi]=\{\phi+c\sigma:c\in\mathbf{C}\}=\phi+B^1(\Gamma_\mu,\rho),$$

будет $\mathbf{C}$-линейным послойным отображением из $\mathbf{P}_{1,0}$ в G над $\mathbf{T}_g \times (L_g \backslash 1)$. Поэтому отображение периодов $p : \mathbf{P}_{1,0} \to G$ — линейное отображение голоморфных векторных расслоений над $\mathbf{T}_g \times (L_g \backslash 1)$ [3].

Покажем, что отображение p будет послойно инъективным отображением из расслоения ранга $g-1$ в когомологическое расслоение Ганнинга ранга $2g-2$.

Пусть $\omega + kdf_0$ при отображении p переходит в класс $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$. По лемме 1.2 получаем, что ω — мультипликативно точный дифференциал, т. е. $\omega = df$, где f — голоморфная мультипликативная функция для несущественного характера $\rho \neq 1$. Функция $\frac{f}{f_0}$ однозначная голоморфная на компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$, а значит, она будет константой $c \neq 0$, так как функция f не имеет нулей на этой поверхности. Следовательно, $\omega = cdf_0$, $c \neq 0$, т. е. ω представляет нулевой класс в нашем фактор-пространстве. Поэтому отображение p — послойная инъекция.

Теорема 2.2. *Последовательность голоморфных векторных расслоений и отображений*

$$0 \to \mathbf{P}_{1,0} \xrightarrow{p} G \xrightarrow{h} G/\mathbf{P}_{1,0} \to 0$$

над $\mathbf{T}_g(F) \times (L_g \backslash 1)$ *точная для любого* $g \geq 2$.

Доказательство. По теореме 2.1 и [6; 5, гл. 3, теорема 3.3.4] расслоения $\mathbf{P}_{1,0}$ и G имеют структуру голоморфных векторных расслоений. Кроме того, уже доказано, что p — послойная инъекция.

Покажем, что отображение p голоморфно относительно этих структур. Пусть $U([\mu_0]) \times U(\rho_0)$ — достаточно малая односвязная окрестность точки $([\mu_0], \rho_0)$, где $U(\rho_0) \subset (L_g \backslash 1)$. Тогда $U(\rho_0)$ лежит в одной из областей $U_j = \{\rho : \rho(A_j) \neq 1\}$, $U_{g+j} = \{\rho : \rho(B_j) \neq 1\}$, $j = 1, \ldots, g$, покрытия для $L_g \backslash 1$. Пусть, например, $U(\rho_0) \subset U_g \cap (L_g \backslash 1)$. Тогда существует базис из классов смежности для голоморфных дифференциалов Прима $f_0\zeta_1, \ldots, f_0\zeta_{g-1}$ на F_μ (в слое расслоения $\mathbf{P}_{1,0}$), голоморфно зависящий от $([\mu]; \rho) \in U([\mu_0]) \times U(\rho_0), z \in w^\mu(U)$. Любой элемент $\phi([\mu], \rho; z)\, dz \in \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))/\langle df_0 \rangle$ имеет разложение

$$\langle \phi([\mu], \rho; z)\, dz \rangle = \sum_{j=1}^{g-1} \lambda_j([\mu], \rho) \langle f_0 \zeta_j \rangle.$$

В карте $\Theta([\mu_0], \rho_0)$ он имеет послойные координаты $(\lambda_1([\mu], \rho), \ldots, \lambda_{g-1}([\mu], \rho))$.

Элемент $[\phi([\mu]; \rho)] = p(\phi([\mu], \rho; z)\, dz) \in H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ в карте $\Theta\big(U_g; \{A_j, B_j\}_{j=1}^g\big)$ над $\mathbf{T}_g(F) \times U_g$ имеет послойные координаты

$$\xi_j^g = \tilde{\phi}^g\big(\big[A_j^\mu, A_g^\mu\big]\big) = \int\limits_{z_0}^{[A_j^\mu, A_g^\mu]z_0} \phi([\mu], \rho; z)\; dz,$$

$$\eta_j^g = \tilde{\phi}^g\big(\big[B_j^\mu, A_g^\mu\big]\big) = \int\limits_{z_0}^{[B_j^\mu, A_g^\mu]z_0} \phi([\mu], \rho; z)\; dz, \quad j = 1, \ldots, g-1,$$

где $\tilde{\phi}^g \in Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$ — любой представитель класса периодов $[\phi([\mu], \rho)]$ при $[\mu] \in U([\mu_0])$, $\rho \in U_g$. Следовательно, вектор-столбец $\big(\xi_1^g, \ldots, \xi_{g-1}^g, \eta_1^g, \ldots, \eta_{g-1}^g\big)$ получается как действие слева матрицы $A([\mu], \rho)$ на вектор-столбец

$$(\lambda_1([\mu], \rho), \ldots, \lambda_{g-1}([\mu], \rho)).$$

Здесь j-я строка матрицы $A([\mu],\rho)$ есть

$$\big(\tilde\phi_1^g([\mu],\rho)\big(\big[A_j^\mu,A_g^\mu\big]\big),\dots,\tilde\phi_{g-1}^g([\mu],\rho)\big(\big[A_j^\mu,A_g^\mu\big]\big)\big)$$

и $(g+j-1)$-я строка есть

$$\big(\tilde\phi_1^g([\mu],\rho)\big(\big[B_j^\mu,A_g^\mu\big]\big),\dots,\tilde\phi_{g-1}^g([\mu],\rho)\big(\big[B_j^\mu,A_g^\mu\big]\big)\big),\quad j=1,\dots,g-1.$$

Эта матрица порядка $(g-1)\times(2g-2)$ состоит из элементов, голоморфно зависящих от $([\mu],\rho)\in U([\mu_0])\times U(\rho_0)$, где

$$\tilde\phi_k^g([\mu],\rho)\big[A_j^\mu,A_g^\mu\big]=\int\limits_{z_0}^{[A_j^\mu,A_g^\mu]z_0} f_0\zeta_k,$$

$$\tilde\phi_k^g([\mu],\rho)\big[B_j^\mu,A_g^\mu\big]=\int\limits_{z_0}^{[B_j^\mu,A_g^\mu]z_0} f_0\zeta_k,\quad k=1,\dots,g-1.$$

Аналогично получаются голоморфные матрицы для отображения p в остальных случаях, когда $U(\rho_0)\subset U_l$, $l=1,2,3,\dots,2g$ [5]. Для доказательства этого нужно только рассматривать коммутаторы вида

$$[A_1,A_l],\dots,\widehat{,},\dots,[A_g,A_l],\quad [B_1,A_l],\dots,\widehat{,},\dots,[B_g,A_l].$$

Здесь символ $\widehat{\ }$ обозначает пропуск l-го элемента в обоих строках, если $l=2,3,\dots,g$. Для $l=g+1,g+2,\dots,2g$ нужно заменить A_l на B_l на вторых местах коммутаторов в этих строках.

Следовательно, p будет голоморфным отображением относительно структур на $\mathbf{P}_{1,0}$ и на G над $\mathbf{T}_g(F)\times(L_g\backslash 1)$.

Докажем, что на фактор-расслоении $G/\mathbf{P}_{1,0}\equiv G/p(\mathbf{P}_{1,0})$ можно задать структуру голоморфного векторного расслоения, относительно которой естественное отображение $h:G\to G/\mathbf{P}_{1,0}$ голоморфно. Сначала покажем, что $p(\mathbf{P}_{1,0})$ является голоморфным векторным подрасслоением в голоморфном векторном расслоении G. Снова достаточно рассмотреть случай, когда $U(\rho_0)\subset U_g$. Над достаточно малой окрестностью $U([\mu_0])\times U(\rho_0)$ выберем фиксированный базис $\phi_1(z)\,dz=f_0\zeta_1,\dots,\phi_{g-1}(z)\,dz=f_0\zeta_{g-1}$ (в слое расслоения $\mathbf{P}_{1,0}$), голоморфно зависящий от $([\mu],\rho)$. В карте $\Theta([\mu_0],\rho_0)$ он имеет послойные координаты

$$(1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\in\mathbf{C}^{g-1}$$

соответственно. Голоморфное инъективное $\mathbf{C}$-линейное отображение p этот базис переводит в линейно независимую над $\mathbf{C}$ систему $\{p(\phi_j(z)\,dz)\}_{j=1}^{g-1}$ сечений расслоения G, также голоморфно зависящую от $([\mu],\rho)\in U([\mu_0])\times U(\rho_0)$. В карте $\Theta\big(U_g;\{A_j,B_j\}_{j=1}^g\big)$ сечение $p(\phi_1(z)\,dz)$ имеет координаты

$$\begin{aligned}(\xi_1,\dots,\xi_{g-1},\eta_1,\dots,\eta_{g-1})&=(1,0,\dots,0)A^T([\mu],\rho)\\&=\big(\tilde\phi_1^g\big[A_1^\mu,A_g^\mu\big],\dots,\tilde\phi_1^g\big[A_{g-1}^\mu,A_g^\mu\big],\tilde\phi_1^g\big[B_1^\mu,A_g^\mu\big],\dots,\tilde\phi_1^g\big[B_{g-1}^\mu,A_g^\mu\big]\big),\dots,\end{aligned}$$

сечение $p(\phi_{g-1}(z)\,dz)$ — координаты $\big(\tilde\phi_{g-1}^g\big[A_1^\mu,A_g^\mu\big],\dots,\tilde\phi_{g-1}^g\big[B_{g-1}^\mu,A_g^\mu\big]\big)$. Составим матрицу размера $(g-1)\times(2g-2)$ из этих строк. Она имеет ровно

$g-1$ линейно независимых строк и столько же независимых столбцов. Рассмотрим эту матрицу при фиксированных $([\mu_0],\rho_0)$. Существует биголоморфный автоморфизм α для $\mathbf{C}^{2g-2}$, переставляющий координаты, такой, что после его естественного действия на столбцы этой матрицы она будет иметь вид $(C_1([\mu_0],\rho_0);C_2([\mu_0],\rho_0))$, где $\det C_1([\mu_0],\rho_0)\neq 0$. В достаточно малой окрестности (обозначим ее так же) $U([\mu_0])\times U(\rho_0)$ имеем $\det C_1([\mu],\rho)\neq 0$. Строки полученной матрицы дают набор линейно независимых сечений в тривиальном расслоении $U([\mu_0])\times U(\rho_0)\times \mathbf{C}^{2g-2}$, голоморфно зависящих от $([\mu],\rho)$, и порождают для фиксированной точки $([\mu],\rho)$ $(g-1)$-мерное подпространство в $\mathbf{C}^{2g-2}$. Дополним этот набор базисными векторами $e_g,\dots,e_{2g-2}$ (постоянными сечениями) до базиса сечений в $U([\mu_0])\times U(\rho_0)\times \mathbf{C}^{2g-2}$. Получаем квадратную матрицу порядка $2g-2$ вида $\begin{pmatrix} C_1 & C_2\\ O & I\end{pmatrix}$, где I — единичная матрица порядка $g-1$. Биголоморфный автоморфизм β этого произведения, который при фиксированных $([\mu],\rho)$ имеет матрицу преобразования вида $\begin{pmatrix} C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2\\ O & I\end{pmatrix}$, переводит указанный базис сечений в стандартный базис сечений $e_1,\dots,e_{2g-2}$ для $U([\mu_0])\times U(\rho_0)\times \mathbf{C}^{2g-2}$. Поэтому в новой карте $\beta\,\alpha\,\Theta\big(U_g,\{A_j,B_j\}_{j=1}^g\big)=\Psi$ (той же структуры голоморфного векторного расслоения) набор голоморфных сечений $p(\phi_1(z)\,dz),\dots,p(\phi_{g-1}(z)\,dz)$ имеет вид $([\mu],\rho,e_1)$, …, $([\mu],\rho,e_{g-1})$. Следовательно, получаем послойный изоморфизм

$$\Psi: p(\mathbf{P}_{1,0})|_{U([\mu_0])\times U(\rho_0)}\to U([\mu_0])\times U(\rho_0)\times(\mathbf{C}^{g-1};0)\subset U([\mu_0])\times U(\rho_0)\times \mathbf{C}^{2g-2},$$

а значит, $p(\mathbf{P}_{1,0})$ является голоморфным векторным подрасслоением ранга $g-1$ в G.

В картах Ψ_k и Ψ_l (над U_k и U_l соответственно) $k,l=1,\dots,2g$, $k\neq l$, матрица перехода $T_{0,1;k,l}([\mu],\rho)$ для G имеет вид $\begin{pmatrix} A & B\\ O & D\end{pmatrix}$, так как этот оператор переводит векторы $e_1,\dots,e_{g-1}$ в векторы $e_1,\dots,e_{g-1}$ соответственно. Здесь матрицы $A=A([\mu],\rho)=I$, $B=B([\mu],\rho)$, $D=D([\mu],\rho)$ порядка $g-1$ голоморфно зависят от $([\mu],\rho)\in(U([\mu_0])\cap U([\mu_1]))\times(U_k\cap U_l\cap U(\rho_0))$. При этом $A([\mu],\rho)$ и $D([\mu],\rho)$ являются матрицами перехода для $p(\mathbf{P}_{1,0})$ и $G/p(\mathbf{P}_{1,0})$ соответственно [3, 5]. Поэтому $G/p(\mathbf{P}_{1,0})$ — голоморфное векторное расслоение ранга $g-1$ со слоем $H^1(\Gamma^\mu,\rho)/(p(\mathbf{P}_{1,0})|_{([\mu],\rho)})$ над точкой $([\mu],\rho)$. Отображение $h:[\phi([\mu],\rho)]\to[\phi([\mu],\rho)]+p(\mathbf{P}_{1,0})|_{([\mu],\rho)}$ в таких картах Ψ будет иметь вид

$$([\mu],\rho;\xi_1,\dots,\xi_{g-1};\eta_1,\dots,\eta_{g-1})\to([\mu],\rho;0,\dots,0;\eta_1,\dots,\eta_{g-1}).$$

Следовательно, отображение h голоморфно, относительно заданных структур голоморфных векторных расслоений на G и на $G/p(\mathbf{P}_{1,0})$. Теорема доказана.

Обозначим через

$$\mathbf{HP}=\bigcup_{[\mu]\in\mathbf{T}_g,\rho\in(L_g\cup\overline{L}_g)\setminus 1}\Gamma(F_\mu,\mathscr{H}^1(\rho))$$
$$=\bigcup_{[\mu],\rho\in(L_g\cup\overline{L}_g)\setminus 1}\Gamma(F_\mu,O^{1,0}(\rho))\oplus\Gamma(F_\mu,O^{0,1}(\rho))=\widetilde{\mathbf{P}}_{1,0}\oplus\widetilde{\mathbf{P}}_{0,1}$$

гармоническое расслоение Прима над $\mathbf{T}_g\times((L_g\cup\overline{L_g})\setminus 1)$, где $\overline{L_g}$ — образ группы L_g при отображении комплексного сопряжения $(\rho\to\bar\rho)$. Это расслоение имеет слои, являющиеся прямой суммой двух векторных пространств размерности g.

Теорема 2.3. *Эрмитово голоморфное векторное расслоение* $\mathbf{HP}$ *ранга* $2g$ *является прямой суммой ортогональных эрмитовых голоморфных* $*$*-инвариантных векторных подрасслоений* $\widetilde{\mathbf{P}}_{1,0}$ *и* $\widetilde{\mathbf{P}}_{0,1}$ *ранга* g *над* $\mathbf{T}_g \times ((L_g \cup \overline{L_g})\backslash 1)$ *при любом* $g \geq 2$.

Доказательство. Выберем базис

$$f_0([\mu],\rho)\zeta_1([\mu],z)\,dz,\dots,f_0([\mu],\rho)\zeta_g([\mu],z)\,dz$$

дифференциалов Прима для слоя $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$, который голоморфно зависит от $[\mu]$ и ρ в достаточно малых окрестностях $U([\mu_0])\times U(\rho_0) \subset \mathbf{T}_g \times ((L_g \cup \overline{L_g})\backslash 1)$. Одновременно выберем базис

$$f_0([\bar\mu],\bar\rho)\zeta_1([\bar\mu],z)\,dz,\dots,f_0([\bar\mu],\bar\rho)\zeta_g([\bar\mu],z)\,dz,$$

голоморфно зависящий от $[\bar\mu]$ и $\bar\rho$ в достаточно малых окрестностях $U([\bar\mu_0])\times U(\bar\rho_0)$. Здесь $\overline{U(\rho_0)}$ — образ $U(\rho_0)$ при отображении $\rho \to \bar\rho$. Это отображение будет автоморфизмом на $L_g \cup \overline{L_g}$. Класс $[\mu]$ имеет модули $(c_1, c_2, \dots, c_{3g-3}) \in \mathbf{C}^{3g-3}$, а класс $\overline{[\mu]}$ — модули $(\overline{c_1}, \overline{c_2}, \dots, \overline{c_{3g-3}}) \in \mathbf{C}^{3g-3}$.

Тогда набор гармонических дифференциалов

$$f_0([\mu],\rho)\zeta_1([\mu],z)\,dz,\dots,f_0([\mu],\rho)\zeta_g([\mu],z)\,dz,$$
$$\overline{f_0([\bar\mu],\bar\rho)\zeta_1([\bar\mu],z)\,dz},\dots,\overline{f_0([\bar\mu],\bar\rho)\zeta_g([\bar\mu],z)\,dz}$$

будет базисом в $\Gamma(F_\mu, \mathscr{H}^1(\rho))$, голоморфно зависящим от $[\mu]$ и ρ в достаточно малых окрестностях $U(\mu_0)\times U(\rho_0)$. Таким образом, на комплексном векторном расслоении

$$\mathbf{HP} = \bigcup_{\mu\in\mathbf{T}_g,\rho\in(L_g\cup\overline{L_g})\backslash 1} \Gamma(F, \mathscr{H}^1(\rho)) = \widetilde{\mathbf{P}}_{1,0} \oplus \widetilde{\mathbf{P}}_{0,1}$$

ранга $2g$ над $\mathbf{T}_g \times (L_g \cup \overline{L_g})\backslash 1$ определена структура голоморфного векторного расслоения.

Скалярное произведение на слое $\Gamma(F_\mu, \mathscr{H}^1(\rho))$ определено по формуле

$$(\phi_1,\phi_2) = i\iint\limits_{\Delta_\mu}(u_1\overline{u_2}+v_1\overline{v_2})\,dz\wedge\,d\bar z,$$

где $\Delta_\mu = w^{s[\mu]}(\Delta)$, $s[\mu]$ — глобальное вещественно аналитическое сечение Эрла над $\mathbf{T}_g$ [4], $w^{s[\mu]}$ — (нормированное в трех точках) квазиконформное отображение на $\mathbf{C}$, которое имеет характеристику нуль на дополнении к кругу, и Δ — фиксированная фундаментальная область для Γ в U; $\phi_j = u_j(z)\,dz + v_j(z)\,d\bar z$, $j = 1, 2$. Скалярное произведение эрмитово, так как $(\phi_1,\phi_2) = \overline{(\phi_2,\phi_1)}$. Легко видеть, что $\mathbf{C}$-линейный оператор $*$ (звезда Ходжа) будет изометрией на слое $\Gamma(F_\mu, \mathscr{H}^1(\rho))$. Оператор $*$ также изометрия слоя $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ на себя и изометрия слоя $\Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$ на себя.

Относительно этого скалярного произведения пространства $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ и $\Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$ ортогональны, так как если

$$\phi_1 = u(z)\,dz \in \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho)), \quad \phi_2 = v(z)d\bar z \in \Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho)),$$

то

$$(\phi_1,\phi_2) = \iint\limits_{\Delta} u\,dz \wedge *\overline{v(z)\,d\bar z} = 0.$$

Векторные расслоения $\widetilde{\mathbf{P}}_{1,0}, \widetilde{\mathbf{P}}_{0,1}$ и $\mathbf{HP}$ являются эрмитовыми голоморфными векторными расслоениями над $\mathbf{T}_g \times (L_g \cup \overline{L_g})\backslash 1$. Теорема доказана.

§ 3. Гармонические дифференциалы Прима для нормированных характеров

Первая группа $H^1_{DR}(F_\mu, \rho)$ когомологий де Рама на F_μ для ρ определяется как фактор-пространство пространства $\Lambda^1(F_\mu, \rho)$ (всех замкнутых дифференциалов Прима на F_μ класса C^∞ для ρ) по подпространству $dC^\infty(F_\mu, \rho)$ (образ пространства $C^\infty(F_\mu, \rho)$, которое состоит из всех мультипликативных функций на F_μ класса C^∞ для ρ, по оператору дифференцирования d). Обозначим через $[S^1]^{2g}$ подгруппу, состоящую из нормированных характеров, в группе $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*)$. По лемме 3.2.2 в [5] для любого $\rho \in [S^1]^{2g}$ отображение периодов $p : \Lambda^1(F_\mu, \rho)/dC^\infty(F_\mu, \rho) \to H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ корректно определено и инъективно. Из теоремы 3.2.4 в [5] для $\rho \in [S^1]^{2g}$ следует, что естественное отображение $\Gamma(F_\mu, \mathscr{H}^1(\rho)) \to H^1_{DR}(F_\mu, \rho)$, которое сопоставляет гармоническому дифференциалу Прима ϕ для ρ его класс когомологий $\{\phi + dC^\infty(F_\mu, \rho)\}$, инъективно. Составим цепь инъективных $\mathbf{C}$-линейных отображений: $\Gamma(F_\mu, \mathscr{H}^1(\rho)) \to H^1_{DR}(F_\mu, \rho) \overrightarrow{p} H^1(\Gamma_\mu, \rho)$. Для $\rho \in [S^1]^{2g}$ комплексные векторные пространства на концах этой цепи имеют одинаковые размерности $2g-2$ при $\rho \neq 1$ и $2g$ при $\rho = 1$. Отсюда получаем

Предложение 3.1 (аналоги теорем де Рама и Ходжа). *Для $\rho \in [S^1]^{2g}$ верно $\Gamma(F_\mu, \mathscr{H}^1(\rho)) \cong H^1_{DR}(F_\mu, \rho) \cong H^1(\Gamma_\mu, \rho)$, и для любого замкнутого дифференциала Прима ϕ на F_μ класса C^∞ для ρ существует единственное разложение Ходжа $\phi = \phi_0 + df(z)$, где $\phi_0 \in \Gamma(F_\mu, \mathscr{H}^1(\rho)), f(z) \in C^\infty(F_\mu, \rho)$, а также для любого класса периодов $[\psi] \in H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ существует замкнутый дифференциал Прима ϕ на F_μ класса C^∞ для ρ такой, что $[\phi] = [\psi]$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$.*

Аналог теоремы Ходжа получен Джеблоу в [7] с использованием сложной техники аналитических линейных расслоений только на фиксированной компактной римановой поверхности. Аналог теоремы де Рама установлен ранее Ганнингом в [8] с использованием когомологий с коэффициентами в пучках на фиксированной поверхности F. Наше доказательство не требует такой сложной техники.

Следствие 3.1. *Гармоническое расслоение Прима $\mathbf{H}P$ вещественно-аналитически изоморфно тривиальному векторному расслоению над $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g} \cap U_j$ для любого $j = 1, \dots, 2g$.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для $\rho \in U_1 = \{\rho : \rho(A_1) \neq 1\}$. Имеем отображения $\phi \overrightarrow{p} [\phi] \to (\phi(A_2), \dots, \phi(A_g), \phi(B_2), \dots, \phi(B_g))$. Первое отображение p инъективно по теореме 3.2.4 в [5] над $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g}$. Второе будет инъективно ввиду того, что $\phi(A_1) = 0$ и

$$\phi(B_1) = \frac{1}{\sigma(A_1)} \sum_{j=2}^{g} [\sigma(B_j)\phi(A_j) - \sigma(A_j)\phi(B_j)]$$

над U_1. При этом оба отображения вещественно-аналитически зависят от $([\mu], \rho) \in \mathbf{T}_g \times ([S^1]^{2g} \cap U_1)$. Таким образом, $\mathbf{H}P \cong \mathbf{T}_g \times ([S^1]^{2g} \cap U_1) \times \mathbf{C}^{2g-2}$. Следствие доказано.

Теорема 3.1. *Для любого $[\mu_0] \in \mathbf{T}_g, \rho_0 \in [S^1]^{2g} \backslash 1$ существуют окрестности $U([\mu_0]), U(\rho_0) \subset \{[S^1]^{2g} \backslash 1\}$ такие, что для $\rho \in U(\rho_0) \cap U_1$ в $\Gamma(F_\mu, \mathscr{H}^1(\rho))$ существует базис гармонических дифференциалов Прима*

$$\phi_1 = \phi_1([\mu], \rho; z), \dots, \phi_{2g-2} = \phi_{2g-2}([\mu], \rho; z),$$

вещественно-аналитически зависящий от $[\mu]$ *и* ρ *и имеющий матрицу периодов относительно* $A_2, \dots, A_g, B_2, \dots, B_g$ *вида* I_{2g-2} *(единичная матрица порядка* $2g-2$*).*

Доказательство. Над $U(\mu_0) \times U(\rho_0)$ выберем базис гармонических дифференциалов Прима

$$\tilde{\phi}_1([\mu], \rho; z)\, dz, \dots, \tilde{\phi}_{g-1}([\mu], \rho; z)\, dz, \overline{\tilde{\phi}_1([\bar{\mu}], \bar{\rho}; z)\, dz}, \dots, \overline{\tilde{\phi}_{g-1}([\bar{\mu}], \bar{\rho}; z)\, dz}$$

на F_μ для ρ, вещественно-аналитически зависящий от ρ [5, теорема 3.1.5]. Составим блочную матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ классических периодов относительно $A_2, \dots, A_g, B_1, B_2, \dots, B_g$ для этого базиса, где $A = (a_{mk})$, $B = (b_{ml})$, $C = (c_{mk})$, $D = (d_{ml})$, $m = 1, \dots, g-1$, $k = 2, 3, \dots, g$, $l = 1, 2, \dots, g$, так как для $\rho \in U_1$ можно выбрать представитель в классе периодов такой, что период на A_1 будет 0. Если существует линейная зависимость над $\mathbf{C}$ для $2g-2$ строк, то существует гармонический дифференциал Прима с нулевыми базисными периодами и по теореме 3.2.4 в [5] он тождественно равен нулю, а это невозможно из-за выбора базиса в $\Gamma(F_\mu, \mathscr{H}^1(\rho))$. Таким образом, матрица $\begin{pmatrix} a_{mk} & b_{mk} \\ c_{mk} & d_{mk} \end{pmatrix} = M$, где $m = 1, \dots, g-1$, $k = 2, 3, \dots, g$, имеет $2g-2$ линейно независимых над $\mathbf{C}$ строк, и ее определитель не равен нулю. Сделав невырожденное линейное преобразование в $\Gamma(F_\mu, \mathscr{H}^1(\rho))$ с матрицей M^{-1}, получим требуемый базис гармонических дифференциалов Прима на F_μ. Теорема доказана.

§ 4. Голоморфные дифференциалы Прима для существенных характеров

Теорема 4.1. *Дифференциал Прима* $\phi \in \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ *для существенного характера* $\rho \in U_1$ *и* $[\mu] \in U(\mu_0)$ *единственно определяется «половиной» своих базисных периодов* $\phi(N_{j_1}), \dots, \phi(N_{j_{g-1}})$, *где* $\phi(A_1) = 0$,

$$\{N_1, \dots, N_g, N_{g+1}, \dots, N_{2g}\} = \{A_1, A_2, \dots, A_g, B_1, B_2, \dots, B_g\}$$

и $\{j_1, \dots, j_{g-1}\}$ *— подмножество из* $g-1$ *элементов в* $\{2, 3, \dots, g, g+2, g+3, \dots, 2g\}$, *зависящее от выбора базиса в* $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho^{-1}))$.

Доказательство. Известно [3, 5], что голоморфный дифференциал Прима ϕ на F_μ для существенного характера ρ единственно определяется своим классом периодов $[\phi]$, а класс $[\phi]$ при $\rho \in U_1$ единственно задается через свои базисные периоды $\phi(A_1) = 0$, $\phi(A_2), \dots, \phi(A_g), \phi(B_1), \dots, \phi(B_g)$. Выясним, какое минимальное число базисных периодов надо задать, чтобы полностью определить дифференциал Прима ϕ.

Пусть ϕ — голоморфный дифференциал Прима на F_μ для существенного характера $\rho, \rho \in U_1$. Выберем базис голоморфных дифференциалов Прима $\phi_1, \dots, \phi_{g-1}$ на F_μ для характера $\rho^{-1} \in U_1$. Тогда классические базисные периоды $\phi_{z_0}(A_1), \dots, \phi_{z_0}(A_g)$, $\phi_{z_0}(B_1), \dots, \phi_{z_0}(B_g)$ связаны системой уравнений

$$0 = \iint\limits_{\Delta} \phi_m \wedge \phi, \quad m = 1, \dots, g-1,$$

$$\sum_{j=1}^{g} [\sigma(B_j)\phi_{z_0}(A_j) - \sigma(A_j)\phi_{z_0}(B_j)] = 0.$$

По теореме 3.2.3 в [5] первые $g-1$ уравнений можно записать в виде системы из $g-1$ линейных уравнений с $2g$ неизвестными $\phi_{z_0}(A_1),\ldots,\phi_{z_0}(A_g)$, $\phi_{z_0}(B_1),\ldots,$ $\phi_{z_0}(B_g)$:

$$\sum_{j=1}^{g}\{[\phi_m(C_1\ldots C_{j-1})(1-\rho(B_j))-\rho(B_j)(\phi_m(C_j)+\phi_m(B_j))]\phi_{z_0}(A_j)$$
$$+[(\rho(A_j)-1)\phi_m(C_1\ldots C_{j-1})+\rho(A_j)\phi_m(A_j)-\phi_m(C_j)]\phi_{z_0}(B_j)\}=0, \quad (*)$$

$m=1,\ldots,g-1$.

Если $\phi_{z_0}(A_1)\neq 0$, то выберем другую базисную точку z_1 с условием $\phi_{z_1}(A_1)$ $=0$, где $\frac{1}{\sigma(A_1)}\phi_{z_0}(A_1)+f(z_0)=f(z_1)$, $\phi=df(z)$ на U. Зафиксировав z_1, для каждого $m=1,\ldots,g-1$, отдельно выберем интеграл Прима $f_m(z)$ для ϕ_m с условием $(\phi_m)_{f_m,z_1}(A_1)=0$. Так, если $(\phi_m)_{f_m,z_1}(A_1)\neq 0$, то заменим $f_m(z)$ на $f_m(z)+c_m$ с условием

$$c_m=-\frac{1}{\sigma(A_1)}(\phi_m)_{f_m,z_1}(A_1).$$

В дальнейшем для краткости записи будем опускать индексы f_m и z_1 у периодов.

После этого выбора предыдущая система $(*)$ будет иметь матрицу вида $(a_{mk};b_{ml})$, где

$$a_{mk}=[\phi_m(C_1\ldots C_{k-1})(1-\rho(B_k))-\rho(B_k)(\phi_m(C_k)+\phi_m(B_k))],$$
$$b_{ml}=[\phi_m(C_1\ldots C_{l-1})(\rho(A_l)-1)+\rho(A_l)\phi_m(A_l)-\phi_m(C_l)],$$

$k=2,\ldots,g$, $l=1,\ldots,g$, $m=1,\ldots,g-1$. Покажем, что ранг этой матрицы равен $g-1$. Действительно, пусть ранг строго меньше чем $g-1$. Тогда существует линейная комбинация из строк этой матрицы, равная нулю. Из этого получаем систему уравнений для голоморфного дифференциала Прима $\tilde\phi$ для ρ^{-1} с классом периодов $[\tilde\phi]$ на F_μ:

$$\tilde\phi(C_1)\sigma(B_2)-\rho(B_2)(\tilde\phi(C_2)+\tilde\phi(B_2))=0,$$
$$\tilde\phi(C_1C_2)\sigma(B_3)-\rho(B_3)(\tilde\phi(C_3)+\tilde\phi(B_3))=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\tilde\phi(C_1\ldots C_{g-1})\sigma(B_g)-\rho(B_g)(\tilde\phi(C_g)+\tilde\phi(B_g))=0,$$
$$-\tilde\phi(1)\sigma(A_1)+\rho(A_1)\tilde\phi(A_1)-\tilde\phi(C_1)=0,$$
$$-\tilde\phi(C_1)\sigma(A_2)+\rho(A_2)\tilde\phi(A_2)-\tilde\phi(C_2)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-\tilde\phi(C_1\ldots C_{g-1})\sigma(A_g)+\rho(A_g)\tilde\phi(A_g)-\tilde\phi(C_g)=0.$$

Учитывая, что $\tilde\phi(1)=0,\sigma(A_1)\neq 0,\tilde\phi(A_1)=0$, из g-го уравнения получим $\tilde\phi(C_1)=0$ и $\tilde\phi(B_1)=0$. Из первого и $(g+1)$-го уравнения выводится, что

$$-\frac{\sigma(B_2)}{\rho(B_2)}\tilde\phi(A_2)+\tilde\phi(B_2)\frac{1}{\rho(A_2)}=0,$$

$$\left(\rho(A_2)+\frac{\sigma(B_2)}{\rho(B_2)}\right)\tilde\phi(A_2)-\frac{\sigma(A_2)}{\rho(A_2)}\tilde\phi(B_2)=0.$$

Отсюда $\tilde{\phi}(A_2) = 0 = \tilde{\phi}(B_2)$. Затем из $(m-1)$-го и $(g+m-1)$-го уравнения получаем систему

$$\tilde{\phi}(C_m) = -\tilde{\phi}(B_m), \quad \rho(A_m)\tilde{\phi}(A_m) - \tilde{\phi}(C_m) = 0$$

или систему

$$-\frac{\sigma(B_m)}{\rho(B_m)}\tilde{\phi}(A_m) + \tilde{\phi}(B_m)\left(1 + \frac{\sigma(A_m)}{\rho(A_m)}\right) = 0, \quad \rho(A_m)\tilde{\phi}(A_m) + \tilde{\phi}(B_m) = 0.$$

Таким образом, $\tilde{\phi}(A_m) = 0 = \tilde{\phi}(B_m)$ для $m = 3, 4, \ldots, g$. Следовательно, голоморфный дифференциал Прима $\tilde{\phi}(z)$ для ρ^{-1} будет иметь класс периодов $[\tilde{\phi}] = 0$. Поэтому $\tilde{\phi} = 0$ на Δ_μ, но это противоречит линейной независимости дифференциалов Прима $\phi_1, \ldots, \phi_{g-1}$ для ρ^{-1} на F_μ.

По теореме о ранге матрицы существуют точно $g-1$ линейно независимых столбцов матрицы системы $(*)$. Выполняя элементарные преобразования над всеми столбцами, кроме g-столбца, получаем, что эта матрица эквивалентна матрице Прима из базисных периодов для базиса $\phi_1, \ldots, \phi_{g-1}$: $(\phi_m(A_k); \phi_m(B_l))$, где $m = 1, \ldots, g-1$, $k = 2, \ldots, g$, $l = 1, \ldots, g$. В матрице Прима столбец $(\phi_1(B_1), \ldots, \phi_{g-1}(B_1))'$ является линейной комбинацией остальных столбцов. Введем обозначения:

$$\{N_1, \ldots, N_g, N_{g+1}, \ldots, N_{2g}\} = \{A_1, A_2, \ldots, A_g, B_1, B_2, \ldots, B_g\}$$

(это равенство упорядоченных наборов). Существует ровно $g-1$ индексов $i_1, \ldots, i_{g-1}$ из $\{2, 3, \ldots, g, g+2, g+3, \ldots, 2g\}$, которые соответствуют линейно независимым столбцам матрицы для системы $(*)$. Тогда, положив $\phi(N_j) = 0$ для всех $j \notin \{i_1, \ldots, i_{g-1}\}$, $j \in \{2, 3, \ldots, g, g+1, g+2, \ldots, 2g\}$, из системы $(*)$ получим однородную систему из $g-1$ уравнений с неизвестными $\phi(N_{i_1}), \ldots, \phi(N_{i_{g-1}})$ и определителем, не равным 0. Отсюда следует, что все $\phi(N_{i_1}), \ldots, \phi(N_{i_{g-1}})$ тоже равны нулю. Поэтому при этих условиях $[\phi] = 0$ и ϕ для ρ тождественно равен нулю на F_μ.

Рассмотрим систему с расширенной матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots\ldots\ldots a_{1g}b_{11}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_{1g} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{g-1,1}a_{g-1,2}\ldots a_{g-1,g}b_{g-1,1}\ldots b_{g-1,g} \\ \sigma(B_1)\sigma(B_2)\ldots\sigma(B_g) - \sigma(A_1)\cdots - \sigma(A_g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(A_1) \\ \ldots \\ \phi(A_g) \\ \phi(B_1) \\ \ldots \\ \phi(B_g) \end{pmatrix} = 0.$$

Взяв подходящую линейную комбинацию первого и $(g+1)$-го столбцов, получим вместо $(g+1)$-го столбца новый столбец, у которого все элементы равны нулю, кроме последнего. Этот последний элемент будет иметь вид

$$\frac{-\sigma(B_1)\sigma(A_1)}{\rho(B_1)} - \sigma(A_1) = \frac{-\sigma(A_1)}{\rho(B_1)} = m_1 \neq 0$$

при $\rho \in U_1$ и $[\mu] \in U([\mu_0])$. Уже доказано, что ранг матрицы $(a_{mk}; b_{ml})$, где $m = 1, \ldots, g-1$, $k = 2, 3, \ldots, g$, $l = 1, 2, \ldots, g$, равен $g-1$, а значит, она имеет ровно $g-1$ линейно независимых столбцов. Перестановкой столбцов расширенной матрицы поставим эти линейно независимые столбцы с номерами $i_1, \ldots, i_{g-1} \subset \{2, 3, \ldots, g, g+2, g+3, \ldots, 2g\}$ на место $2, 3, \ldots, g$. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} n_{1,i_1}\ldots\ldots\ldots\ldots n_{1,i_{g-1}} & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ n_{g-1,i_1}\ldots\ldots\ldots\ldots n_{g-1,i_{g-1}} & 0 \\ *\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots * & m_1 \end{pmatrix},$$

где, например, $\{a_{11},\ldots,a_{1g},b_{11},\ldots,b_{1g}\}=\{n_{11},\ldots,n_{1,2g}\}$, имеет определитель не равный нулю при $\rho,\rho\in U_1$ и $[\mu]\in U([\mu_0])$. Поскольку $\phi(A_1)=0$, взяв $\phi(N_j)=0$, $j\in\{2,3,\ldots,g,g+2,g+3,\ldots,2g\}$, $j\notin\{i_1,\ldots,i_{g-1}\}$, получим, что $\phi(N_{i_k})=0$, $k=1,\ldots,g-1$. Поэтому $[\phi]=0$, а значит, и $\phi=0$ на Δ_μ. Теорема доказана.

Напомним, что в теореме 3.1.3 из [5] для базиса $\phi_1,\ldots,\phi_{g-1}$ в $\Gamma(F_\mu,O^{1,0}(\rho^{-1}))$ при $\rho\in U_1\backslash L_g$ и $U([\mu_0])\subset\mathbf{T}_g$ исследовалась матрица из коммутаторных периодов

$$(\phi_m([A_k,A_1]);\phi_m([B_k,A_1]))=\sigma(A_1)(\phi_m(A_k);\phi_m(B_k)),$$

$\sigma(A_1)\neq0$, где $m=1,2,\ldots,g-1$, $k=2,3,\ldots,g$. Последняя матрица имеет ранг $g-1$, и, переставляя линейно независимые столбцы с номерами $i_1,\ldots,i_{g-1}$ на левую половину этой матрицы, получим эквивалентную матрицу $(\phi_m(N_{i_k}))$, $m=1,2,\ldots,g-1$, $k=1,2,\ldots,2g-2$. Здесь $i_1,\ldots,i_{2g-2}$ — перестановка символов $2,3,\ldots,g,g+2,g+3,\ldots,2g$. Обозначим эту матрицу через (M_1,M_2), $\det M_1\neq0$. Взяв новый базис

$$(\tilde\phi_1,\ldots,\tilde\phi_{g-1})'=M_1^{-1}(\phi_1,\ldots,\phi_{g-1})',$$

где штрих означает транспонирование, получим так называемый канонический базис голоморфных дифференциалов Прима, который имеет матрицу периодов вида $\left(I_{g-1},M_1^{-1}M_2\right)$, относительно некоторой перестановки для $a_2,\ldots,a_g$, $b_2,\ldots,b_g$ на F. Таким образом, доказано

Следствие 4.1. *Для любого $\rho_0\notin L_g$ и $\mu_0\in\mathbf{T}_g$ существуют окрестности $U(\rho_0)\subset\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbf{C}^*)\backslash L_g$ и $U([\mu_0])\subset\mathbf{T}_g$ такие, что для $\rho\in U(\rho_0)$ и $\mu\in U([\mu_0])$ существует канонический базис голоморфных дифференциалов Прима на F_μ, голоморфно зависящий от ρ и $[\mu]$ при любом $g\geq2$.*

Заметим, что последнее следствие ранее получено Ганнингом [3] для фиксированной поверхности, но его доказательство требует построения базиса голоморфных дифференциалов Прима через сложный аппарат так называемых обобщенных тэта-функций и базис голоморфно зависит только от характеров. Наше доказательство использует другой базис голоморфных дифференциалов Прима, который зависит голоморфно не только от характеров, но и от модулей компактных римановых поверхностей.

Следствие 4.2. *Пусть ρ удовлетворяет условиям $\rho^2=1,\rho(A_1)=-1$ и $[\mu]\in U(\mu_0)$. Тогда столбцы в матрице $\{(a_{ij});(b_{ij})\}_{i=1,\ldots,(g-1);j=2,\ldots,g}$ периодов для базиса голоморфных дифференциалов Прима на F_μ для ρ из следствия* 4.1 *$\mathbf{R}$-линейно независимы.*

Доказательство проведем от противного. Предположим, что эта матрица, представленная как набор столбцов $(\pi_1,\ldots,\pi_{2g-2})$, имеет $\mathbf{R}$-линейно зависимые столбцы, т. е. существуют $x_j\in\mathbf{R}$, $j=1,\ldots,2g-2$ (не все нули), и $x_1\pi_1+\cdots+x_{2g-2}\pi_{2g-2}=0$, где $\pi_j=\pi_j([\mu],\rho)$. Из-за выбора специального базиса в $\Gamma(F_\mu,\mathscr{H}^1(\rho))$ имеем

$$x_1\overline{\pi_1(\overline{[\mu]},\bar\rho)}+\cdots+x_{2g-2}\overline{\pi_{2g-2}(\overline{[\mu]},\bar\rho)}=0.$$

Образуем квадратную матрицу

$$\begin{pmatrix}\pi_1([\mu],\rho)\ldots\pi_{2g-2}([\mu],\rho)\\ \overline{\pi_1(\overline{[\mu]},\bar\rho)\ldots\pi_{2g-2}(\overline{[\mu]},\bar\rho)}\end{pmatrix}=M$$

порядка $2g-2$. Из предыдущих двух равенств следует, что существует линейная комбинация из $2g-2$ столбцов с вещественными коэффициентами x_j, $j=1,\dots,2g-2$, которая равна 0. Следовательно, ранг M меньше чем $2g-2$. Поэтому существуют комплексные числа $(z_1,\dots,z_{g-1},w_1,\dots,w_{g-1})$ (не все нули) такие, что существует линейная комбинация из $2g-2$ строк с этими коэффициентами, равная нулю, т. е.

$$\int\limits_{N_i}\left(\sum_{j=1}^{g-1} z_j\phi_j([\mu],\rho;z)\,dz+\sum_{j=1}^{g-1} w_j\overline{\phi_j(\overline{[\mu]},\bar\rho;z)\,dz}\right)=0,\quad i=1,\dots,2g.$$

Положив

$$\varphi=\sum_{j=1}^{g-1} z_j\phi_j([\mu],\rho;z)\,dz,\quad \psi=\sum_{j=1}^{g-1}\overline{w_j}\phi_j(\overline{[\mu]},\bar\rho;z)\,dz,$$

получаем равенства

$$\int\limits_{N_i}\varphi+\overline{\psi}=0,\quad i=1,\dots,2g.$$

Поэтому из леммы 3.2.2 в [5] следует, что $\varphi+\overline{\psi}=df$, $f\in C^\infty(F_\mu,\rho)$. По теореме 3.2.4 из [5] имеем $\varphi=0=\psi$ на F. Но это противоречит либо $\mathbf{C}$-линейной независимости $\phi_1([\mu],\rho;z)\,dz,\dots,\ \phi_{g-1}([\mu],\rho;z)\,dz$, либо $\mathbf{C}$-линейной независимости

$$\overline{\phi_1(\overline{[\mu]},\bar\rho;z)\,dz},\dots,\ \overline{\phi_{g-1}(\overline{[\mu]},\bar\rho;z)\,dz}.$$

Следствие доказано.

Для таких ρ (связанных со спинорными структурами см. также пример [2, с. 350]) получается, что столбцы $\pi_1,\dots,\pi_{2g-2}$ задают целочисленную решетку $\widetilde{L}$ максимального ранга в $\mathbf{C}^{g-1}$ и $\mathbf{C}^{g-1}/\widetilde{L}$ — комплексный тор размерности $g-1$. Его естественно называть *многообразием Якоби — Прима* для F_μ.

Замечание 4.1. Пространство Торелли Υ_g определяется как фактор-пространство $\mathbf{T}_g(F)/\tau_g$, где группа Торелли τ_g — нормальная подгруппа в модулярной группе Тейхмюллера $\operatorname{Mod}\mathbf{T}_g$, состоящая из элементов, тождественно действующих на первой группе гомологий $H_1(F_\mu,\mathbf{Z})$ поверхности F_μ [3]. Так как группа τ_g действует свободно на $\mathbf{T}_g(F)$, т. е. без неподвижных точек, определено естественное неразветвленное голоморфное накрытие $\mathbf{T}_g(F)\to\Upsilon_g$ [1, 3]. Группа преобразований наложения этого накрытия естественно действует как группа биголоморфных автоморфизмов пространства

$$\mathbf{T}_g(F)\times(\operatorname{Hom}(H_1(F,\mathbf{Z}),\mathbf{C}^*)\backslash 1)$$

(тождественно на втором сомножителе).

Поэтому все предыдущие теоремы остаются верными для естественно определенных над $\Upsilon_g\times(L_g\cup\overline{L_g}\backslash 1)$ $(\Upsilon_g\times([S^1]^{2g}\backslash 1)$ расслоений Прима и Ганнинга, так как

$$\operatorname{Hom}(\Gamma_\mu,\mathbf{C}^*)\cong\operatorname{Hom}(\Gamma_\mu/[\Gamma_\mu,\Gamma_\mu],\mathbf{C}^*)=\operatorname{Hom}(H_1(F_\mu,\mathbf{Z}),\mathbf{C}^*).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Альфорс Л. В., Берс Л.* Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

2. *Farkas H. M., Kra I.* Riemann surfaces. New York: Springer-Verl., 1992. (Grad. Text's Math.; V. 71).

3. *Gunning R. C.* On the period classes of Prym differentials // J. Reine Angew. Math. 1980. V. 319. P. 153–171.

4. *Earle C. J.* Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties // Ann. Math. 1978. V. 107. P. 255–286.

5. *Чуешев В. В.* Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Кемерово: КемГУ, 2003. Ч. 2.

6. *Пушкарева Т. А., Чуешев В. В.* Гармонические дифференциалы Прима и их классы периодов на компактной римановой поверхности // Вестн. КемГУ. 2011. № 3/1. С. 211–216.

7. *Jablow E.* An analogue of the Rauch variational formula for Prym differentials // Israel J. Math. 1989. V. 65, N 3. P. 323–355.

8. *Gunning R. C.* Riemann surfaces and generalized theta functions. Berlin: Springer-Verl., 1976 (Ergebnisse Math.; Bd. 91).

Статья поступила 27 июля 2013 г.

Пушкарева Татьяна Алексеевна
Горно-Алтайский гос. университет,
ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск 649000
`pushkareva.tanya@gmail.com`

Чуешев Виктор Васильевич
Кемеровский гос. университет,
ул. Красная, 6, Кемерово 650043
`vvchueshev@ngs.ru,  vvchueshev@mail.ru`