Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2014. Том 55, № 2

УДК 517.518.1

ПРОСТРАНСТВО «АКУЛЬИ ЗУБЫ» ЯВЛЯЕТСЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИМ IFS–АТТРАКТОРОМ

М. Новак, Т. Шарек

Аннотация. Показано, что пространство, называемое акульими зубами, является топологическим IFS-аттрактором, т. е. для любого открытого покрытия $X = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(X)$ его образ под действием любой достаточно большой композиции из семейства непрерывных функций $\{f_1, \dots, f_n\}$ лежит в некотором множестве этого покрытия. В частности, существует пространство, не гомеоморфное никакому IFS-аттрактору, но не являющееся топологическим IFS-аттрактором.

Ключевые слова: фрактал, система итерированных функций, IFS-аттрактор.

Системы итерированных функций (IFS) являются одним из наиболее популярных и простых методов построения фрактальных структур, широко применяемых в сжатии информации, компьютерной графике, медицине, экономике, предсказывании землетрясений и погоды и т. д. Компактное метрическое пространство X называется IFS-*аттрактором*, если $X = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(X)$ для некоторых сжатий $f_1, \dots, f_n : X \to X$. В этом случае семейство $\{f_1, \dots, f_n\}$ называется *системой итерированных функций*. Напомним, что отображение $f : X \to X$ называется *сжимающим*, если его константа Липшица

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)}$$

меньше 1.

Понятие системы итерированных функций введено в 1981 г. Хатчинсоном [1] и развито Барнсли [2]. Топологические свойства IFS-аттракторов изучались в [3–5]. В частности, определение топологического IFS-аттрактора предложено в [5]: компактное топологическое пространство X является *топологическим* IFS-*аттрактором*, если $X = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(X)$ для некоторых непрерывных отображений $f_1, \dots, f_n : X \to X$ обладает следующим свойством: для любого открытого покрытия $\mathscr{U}$ множества X существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что для любых функций $g_1, \dots, g_m \in \{f_1, \dots, f_n\}$ образ $g_1 \circ \dots \circ g_m(X)$ лежит в некотором множестве $U \in \mathscr{U}$.

Заметим, что компактное метрическое пространство X является топологическим IFS-аттрактором, если для любого его открытого покрытия $\mathscr{U}$ диаметр

The research of Tomasz Szarek was partly supported by the National Science Centre of Poland (grant number DEC–2012/07/B/ST1/03320), and the research of Magdalena Nowak was partly supported by the National Science Centre of Poland (grant number DEC–2012/07/N/ST1/03551).

множества $g_1 \circ \dots \circ g_m(X)$ меньше числа Лебега $\mathscr{U}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и всех $g_1, \dots, g_m \in \{f_1, \dots, f_n\}$.

Очевидно, что любой IFS-аттрактор является топологическим IFS-аттрактором, но не наоборот. Кроме того, покажем, что построенное в [5] пространство и называемое акульими зубами, не гомеоморфное аттракторам ни одной системы итерированных функций, является топологическим IFS-аттрактором.

1. «Акульи зубы»

Рассмотрим кусочно линейную периодическую функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} t - n, & \text{если } t \in \left[n, n + \frac{1}{2}\right] \text{ для некоторого } n \in \mathbb{Z}, \\ n - t, & \text{если } t \in \left[n - \frac{1}{2}, n\right] \text{ для некоторого } n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Для всех $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию

$$\varphi_n(t) = 2^{-n} \varphi(2^n t),$$

являющуюся гомотетической копией $\varphi(t)$.

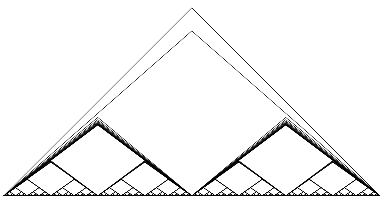

Рис. 1. Пространство M.

Пространства, называемые акульими зубами, построены в [6] и параметризуются бесконечной неубывающей последовательностью $(n_k)_{k=1}^{\infty}$. Пусть $I = [0,1] \times \{0\}$ — *кость* акульего зуба. Для любого $k \in \mathbb{N}$ пусть $M_k = \left\{\left(t, \frac{1}{k}\varphi_{n_k}(t)\right) : t \in [0,1]\right\}$ — k-й *ряд* зубов. Пространство «акульи зубы» задается по формуле

$$M = I \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

В [5] показано, что пространство «акульи зубы», построенное в $\mathbb{R}^2$ с помощью неубывающей последовательности

$$n_k = \lfloor \log_2 \log_2 (k+1) \rfloor, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\lfloor x \rfloor$ — целая часть x, не гомеоморфно IFS-аттракторам (рис. 1), т. е. не является IFS-аттрактором в любой метрике.

Далее будет доказана

Теорема. *Пространство M из* [5] *является топологическим* IFS-*аттрактором.*

2. Доказательство теоремы

Для $k \in \mathbb{N}$ и множеств M_k, I и M теми же символами обозначим функции

$$M_k : [0,1] \ni t \to \left(t, \frac{1}{k}\varphi_{n_k}(t)\right) \in M_k, \quad I : [0,1] \ni t \to (t, 0) \in I,$$

$$M : [0,1] \ni t \to I(t) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k(t).$$

Заметим, что для любого $x \in M$ существует единственное $t_x \in [0,1]$ такое, что $I(t_x) = x$ или $M_k(t_x) = x$ для некоторого k. Тем самым каждую точку пространства M можно представить как точку из промежутка длиной 1 с возможно положительным параметром k. Для $k \neq l$ и всех $x \in M_k \cap M_l$ имеем $M_k(t_x) = M_l(t_x) = I(t_x)$, поскольку тогда x принадлежит I.

Построим за три шага топологическую систему IFS и докажем, что M — ее аттрактор.

Шаг 1. Пусть $\mathscr{F} = \{f_1, f_2, g_1, \dots, g_4, h_1, \dots, h_4\}$ — совокупность непрерывных функций из M в себя таких, что для всех $x \in M$

$$g_1|_{M \setminus M_1}(x) = M_1(0), \quad g_1|_{M_1}(x) = M_1\left(\frac{\varphi(t_x)}{2}\right),$$

$$g_2|_{M \setminus M_1}(x) = M_1\left(\frac{1}{2}\right), \quad g_2|_{M_1}(x) = M_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi(t_x)}{2}\right),$$

$$g_3|_{M \setminus M_1}(x) = M_1\left(\frac{1}{2}\right), \quad g_3|_{M_1}(x) = M_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi(t_x)}{2}\right),$$

$$g_4|_{M \setminus M_1}(x) = M_1(1), \quad g_4|_{M_1}(x) = M_1\left(1 - \frac{\varphi(t_x)}{2}\right).$$

Таким образом, объединение образов M при действии каждой из функций g_i заполняет первый ряд зубов $M_1 = \bigcup_{i=1}^{4} g_i(M)$. Аналогично построим функции h_i, образы которых заполнят второй ряд M_2. Построим функции f_1 и f_2, образы которых заполнят левую и правую стороны оставшихся рядов. Положим $f_2(x) = f_1(x) + \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ так, что $f_2(x)$ лишь сдвигает значения f_1.

Для $i \in \mathbb{N}$ множество $G_i = \bigcup\{M_k : n_k = i\}$ назовем *i-м поколением* акульих зубов. Можно рассматривать G_i как функцию $G_i : [0,1] \ni t \to \bigcup\{M_k(t) : n_k = i\} \in G_i$. Заметим, что каждый ряд в одном поколении содержит одно и то же число зубов 2^i. Через $k_i = \min\{k \mid n_k = i\}$ обозначим число зубов в первом ряду в G_i, а через $N_i = |\{k \mid n_k = i\}|$ — число зубов в G_i. Функция f_1 должна переводить каждое поколение в левую часть следующего поколения, поэтому пусть $s_i = \frac{N_{i+1}}{N_i}$ — число рядов в G_{i+1}, заполненных одним рядом из G_i. В нашем случае $N_i = 2^{2^{i+1}} - 2^{2^i}$ и $s_i = 2^{2^{i+1}} + 2^{2^i}$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Надо, чтобы функция f_1 переводила целиком ряд из G_i в s_i рядов в $G_{i+1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$. Тем самым в точках $x, y \in M_k \cap I$ при $x \neq y$ для некоторого положительного k должны приниматься различные значения $f_1(x) \neq f_1(y)$ в том же порядке на I. Для этого каждый зуб из G_i должен быть разделен на s_i+1 частей, каждая из которых покрывает один зуб из G_{i+1}, а последняя заполняет малую часть кости I. Другими словами, для $j = 0, \dots, 2^i - 1$ зуб из $G_i\left(\left[\frac{j}{2^i}, \frac{j+1}{2^i}\right]\right)$ преобразуется с помощью f_1 в s_i зубов из $G_{i+1}\left(\left[\frac{j}{2^{i+1}}, \frac{j+1}{2^{i+1}}\right]\right)$ и кость $I\left(\left[\frac{j}{2^{i+1}}, \frac{j+1}{2^{i+1}}\right]\right)$ (рис. 2).

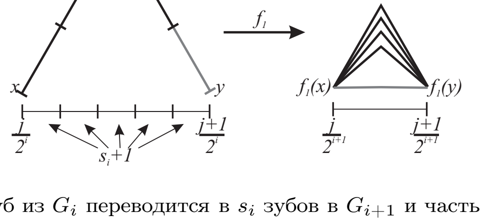

Рис. 2. Зуб из G_i переводится в s_i зубов в G_{i+1} и часть кости I.

Заметим, что для $i, j \in \mathbb{N}$ и аналогичных $p_{i,j}(t) = \frac{t}{2^i} + \frac{j}{2^i}$ можем записать $\left[\frac{j}{2^i}, \frac{j+1}{2^i}\right] = p_{i,j}([0,1])$. Кроме того, положим $P_{ijk} = \left[p_{i,j}\left(\frac{k}{s_i+1}\right), p_{i,j}\left(\frac{k+1}{s_i+1}\right)\right]$ для $k = 0, \ldots, s_i$. Тем самым формула для функции f_1 имеет вид

$$f_1|_I(x) = \frac{x}{2}$$

и для $i \in \mathbb{N}$, $l = 0, \ldots, N_i - 1$ и $j = 0, \ldots, 2^i - 1$ получим

$$f_1|_{M_{k_i+l}}(x) = \begin{cases} M_{k_{i+1}+ls_i+k}\big(p_{i+1,j}\big(2\varphi\big(\frac{s_i+1}{2}p_{i,j}^{-1}(t_x)\big)\big)\big), & t_x \in P_{ijk},\ k = \overline{0, s_{i-1}}, \\ I\big(p_{i+1,j}\big(2\varphi\big(\frac{s_i+1}{2}p_{i,j}^{-1}(t_x)\big)\big)\big), & t_x \in P_{ijk},\ k = s_i. \end{cases}$$

Можно записать $M = \bigcup\limits_{f \in \mathscr{F}} f(M)$. Действительно,

$$\bigcup_{i=1}^{4} (g_i(M) \cup h_i(M)) = M_1 \cup M_2,$$

и несложными вычислениями можно показать, что для всех $i \in \mathbb{N}$ имеем

$$f_1(G_i) = G_{i+1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \cup I\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right), \quad f_2(G_i) = G_{i+1}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \cup I\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right),$$

так что

$$f_1(M) \cup f_2(M) = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \cup I = \overline{M \setminus (M_1 \cup M_2)}.$$

Шаг 2. По определению g_i и h_i следующее свойство выполнено для любого связного множества $A \subset M$ при $i = 0, \ldots, 4$:

$$\operatorname{diam} g_i(A) \leq \frac{\operatorname{diam}(A)}{2}, \quad \operatorname{diam}\ h_i(A) \leq \frac{\operatorname{diam}(A)}{2},$$

поэтому для любых $m \in \mathbb{N}$ и связного множества $A \subset M$

$$\operatorname{diam}\ g_{i_1} \circ \cdots \circ g_{i_m}(A) \leq \frac{1}{2^m} \operatorname{diam}(A), \tag{2.1}$$

где $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, 4\}$; для функций h_i аналогично.

Для функций f_i имеем похожее свойство: для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{diam}\ f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_m}(M) \leq \frac{1}{2^m} \operatorname{diam}(M), \tag{2.2}$$

где $i_1, \ldots, i_m \in \{1, 2\}$. Это верно в силу того, что для всех $i \in \mathbb{N}$ и $j = 0, \ldots, 2^i - 1$

$$f_1\left(G_i\left(\left[\frac{j}{2^i}, \frac{j+1}{2^i}\right]\right)\right) = G_{i+1}\left(\left[\frac{j}{2^{i+1}}, \frac{j+1}{2^{i+1}}\right]\right) \cup I\left(\left[\frac{j}{2^{i+1}}, \frac{j+1}{2^{i+1}}\right]\right).$$

Шаг 3. Пусть $\mathscr{U}$ — открытое покрытие M. На этом шаге найдем положительное число m такое, что диаметр $\varphi_{i_1} \circ \cdots \circ \varphi_{i_m}(M)$ меньше лебегова числа λ покрытия $\mathscr{U}$, где $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_m} \in \mathscr{F}$. Рассмотрим произвольную композицию функций из $\mathscr{F}$ и найдем диаметр образа пространства M под действием этой композиции. Из шага 2 известно, что композиция функций только из $\{g_1, \ldots, g_4\}$, $\{h_1, \ldots, h_4\}$ или $\{f_1, f_2\}$ уменьшает диаметр пространства M по крайней мере вдвое (см. (2.1) и (2.2)). Заметим также, что для любого связного множества $A \subset M$ его образы $g_i(A)$, $h_i(A)$ и $f_i(A)$ содержатся в $\overline{M \setminus M_2}$, $\overline{M \setminus M_1}$ и $\overline{M \setminus (M_1 \cup M_2)}$ соответственно, при этом

$$\operatorname{diam}(g_i \circ f_j(A)) = 0, \quad \operatorname{diam}(g_i \circ h_j(A)) = 0,$$
$$\operatorname{diam}(h_i \circ f_j(A)) = 0, \quad \operatorname{diam}(h_i \circ g_j(A)) = 0,$$

поскольку все они одноэлементные множества. Стало быть, если функции g_i, h_i и f_i появляются в композиции в указанном порядке, то диаметр образа будет равен нулю. Осталось рассмотреть композицию вида $f_{i_k} \circ \dots \circ f_{i_1} \circ g_{j_1} \circ \dots \circ g_{j_n}(M)$ и аналогично $f_{i_k} \circ \dots \circ f_{i_1} \circ h_{j_1} \circ \dots \circ h_{j_n}(M)$, где $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2\}$ и $j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, 4\}$. Пусть

$$\alpha(k) = \operatorname{Lip} f_1|_{G_k} = \operatorname{Lip} f_2|_{G_k}$$

— константа Липшица функций f_1 и f_2, ограниченных до k-го поколения. Она конечна в силу определения f_1. Заметим, что множество $f_{i_k} \circ \dots \circ f_{i_1} \circ g_{j_1} \circ \dots \circ g_{j_n}(M)$ содержится в поколении G_{k-1}, так что получаем

$$\begin{aligned} &\operatorname{diam}(f_{i_k} \circ \dots \circ f_{i_1} \circ g_{j_1} \circ \dots \circ g_{j_n}(M)) \\ &\qquad \le \alpha(k-1) \cdot \operatorname{diam}(f_{i_{k-1}} \circ \dots \circ f_{i_1} \circ g_{j_1} \circ \dots \circ g_{j_n}(M)) \\ &\dots \le \alpha(k-1) \cdot \ldots \cdot \alpha(0) \cdot \operatorname{diam}(g_{j_1} \circ \dots \circ g_{j_n}(M)) \le \prod_{i=0}^{k-1} \alpha(i) \cdot \frac{1}{2^n} \operatorname{diam}(M). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\operatorname{diam}(f_{i_k} \circ \dots \circ f_{i_1} \circ g_{j_1} \circ \dots \circ g_{j_n}(M)) \le \operatorname{diam}(f_{i_k} \circ \dots \circ f_{i_1}(M)) \le \frac{1}{2^k} \operatorname{diam}(M).$$

Возьмем $n_1 \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{2^{n_1}} \operatorname{diam}(M) < \lambda$, и $n_2 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\prod_{i=0}^{n_1-1} \alpha(i) \cdot \frac{1}{2^{n_2}} \operatorname{diam}(M) < \lambda.$$

Тогда утверждение теоремы верно для $m = n_1 + n_2$. Действительно, все образы M под действием композиции только функций из $\{g_1, \dots, g_4\}$, $\{h_1, \dots, h_4\}$ или $\{f_1, f_2\}$ имеют диаметры меньше λ ввиду определения n_1. Более того, $\operatorname{diam}(f_{i_k} \circ \dots \circ f_{i_1} \circ g_{j_1} \circ \dots \circ g_{j_{m-k}}(M)) < \lambda$ для $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2\}$ и $j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, 4\}$, поскольку

(1) если $k \le n_1$, то

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(f_{i_k} \circ \dots \circ f_{i_1} \circ g_{j_1} \circ \dots \circ g_{j_{m-k}}(M)) &\le \prod_{i=0}^{k-1} \alpha(i) \cdot \frac{1}{2^{m-k}} \operatorname{diam}(M) \\ &\le \prod_{i=0}^{k-1} \alpha(i) \cdot \frac{1}{2^{n_2}} \operatorname{diam}(M) < \lambda; \end{aligned}$$

(2) если $k > n_1$, то

$$\operatorname{diam}(f_{i_k} \circ \dots \circ f_{i_1} \circ g_{j_1} \circ \dots \circ g_{j_{m-k}}(M)) \le \frac{1}{2^k} \operatorname{diam}(M) \le \frac{1}{2^{n_1}} \operatorname{diam}(M) < \lambda.$$

Аналогично можно показать, что

$$\operatorname{diam}(f_{i_k} \circ \dots \circ f_{i_1} \circ h_{j_1} \circ \dots \circ h_{j_{m-k}}(M)) < \lambda.$$

Остальные композиции преобразуют все пространство M в точку, так что диаметр образа M равен $0 < \lambda$. Теорема доказана.

3. Обобщения

Описанная выше конструкция может быть распространена, по существу, на все пространство «акульи зубы». При построении топологической IFS для пространства акульих зубов с помощью произвольной последовательности $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ могут возникнуть следующие проблемы.

(1) Некоторые G_i пусты. Тогда перенумеруем последовательность G_i так, что все пустые множества не нумеруются.

(2) $s_i \notin \mathbb{Z}$. Тогда положим $s_i = \lceil \frac{N_{i+1}}{N_i} \rceil$, где $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное x. Следовательно, формула для f_1 немного меняется. Последний ряд зубов для каждого i-го поколения должен быть переведен в менее чем s_i рядов из G_{i+1}. Этого можно добиться, покрывая некоторые ряды из G_{i+1} еще раз.

(3) s_i нечетно. В этом случае нет необходимости покрывать часть кости под каждым зубом, так что поделим каждый зуб из G_i на s_i частей, как на рис. 3.

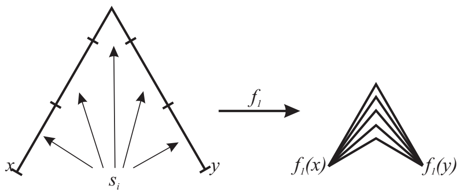

Рис. 3. При нечетном s_i зуб из G_i переводится только в s_i зубов из G_{i+1}.

Таким образом, всякое пространство «акульи зубы» является топологическим IFS-аттрактором.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hutchinson J. E.* Fractals and self similarity // Indiana Univ. Math. J. 1981. V. 30. P. 713–747.
2. *Barnsley M.* Fractals everywhere. Boston: Acad. Press, 1988.
3. *Williams R. F.* Composition of contractions // Bol. Soc. Brasil. Mat. 1971. V. 2. P. 55–59.
4. *Hata M.* On the structure of self-similar sets // Japan J. Appl. Math. 1985. V. 2, N 2. P. 381–414.
5. *Banakh T., Nowak M.* A 1-dimensional Peano continuum which is not an IFS attractor // Proc. Amer. Math. Soc. 2013. V. 141. P. 931–935.
6. *Banakh T., Tuncali M.* Controlled Hahn–Mazurkiewicz theorem and some new dimension functions of Peano continua // Topology Appl. 2007. V. 154, N 7. P. 1286–1297.

Статья поступила 24 мая 2013 г.

Magdalena Nowak (Новак Магдалена)
Jan Kochanowski University,
ul. Świętokrzyska, 15, Kielce 25-406, Poland;
Faculty of Mathematics and Computer Science, Jagiellonian University,
ul. Łojasiewicza, 6, Kraków 30-348, Poland
magdalena.nowak805@gmail.com

Tomasz Szarek (Шарек Томаш)
Institute of Mathematics, University of Gdańsk,
ul. Wita Stwosza, 57, Gdańsk 80-952, Poland
szarek@itl.pl