*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2014. Том 55, № 2*

*УДК 517.5+517.956.225*

# НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ С КОНЕЧНЫМ ВНУТРЕННИМ РАДИУСОМ

**Ф. Г. Авхадиев, Р. Г. Насибуллин**

**Аннотация.** Доказываются неравенства типа Харди в пространственных областях с конечным внутренним радиусом. Получены одномерные $L^p$-неравенства и их многомерные аналоги. Весовые функции в пространственных неравенствах содержат степени функции расстояния до границы множества. Показана точность константы в $L^1$-неравенствах в одномерном случае и в многомерных $L^1$-неравенствах для выпуклых областей.

**Ключевые слова:** неравенства типа Харди, функция расстояния до границы, конечный внутренний радиус.

## 1. Введение

Неравенства Харди являются важным инструментом для решения задач математической физики и широко используются в спектральной теории дифференциальных операторов эллиптического типа. Базовые результаты по неравенствам Харди изложены в [1–5]. Некоторые из интересных применений неравенств типа Харди описаны в [6–9].

Оригинальная теорема Харди (см. [1]) равносильна неравенству

$$\int_0^{+\infty} \frac{|u(t)|^p}{t^s}\,dt \le \left(\frac{p}{|s-1|}\right)^p \int_0^{+\infty} \frac{|u'(t)|^p}{t^{s-p}}\,dt$$

для $p \ge 1$, $s \in \mathbb{R}$, $s \ne 1$, и любой абсолютно непрерывной функции $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $u'/t^{s/p-1} \in L^p(0,\infty)$, такой, что $u(0) = 0$ в случае $s > 1$ и $u(+\infty) = 0$ в случае $s < 1$.

Если $p = 1$, то равенство в неравенстве Харди имеет место для любых допустимых монотонных функций $u$; если $p > 1$ и $u \not\equiv 0$, то равенство не достигается, но постоянная $(p/|s-1|)^p$ точная.

Интенсивно изучаются многомерные аналоги теоремы Харди, предполагающие, что область интегрирования $\Omega$ — открытое собственное подмножество $\mathbb{R}^n$, функция $u$ и ее производная $u'$ заменены функцией $f \in C_0^\infty(\Omega)$ (или $C_0^1(\Omega)$) и ее градиентом $\nabla f$, а степени $t$ заменены степенями $\delta = \delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ — функции расстояния до границы области. Главная трудность при исследовании многомерных вариационных неравенств типа Харди состоит в оценках констант,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11–01–00762–а, 12–01–00636–а).

точнее, специальных функционалов, зависящих от области $\Omega$ и числовых параметров задачи. Хорошо известно, что ряд многомерных аналогов классического неравенства Харди оказывается справедливым в областях с локально липшицевыми границами.

Вопрос о наиболее общих условиях на область $\Omega$, обеспечивающих конечность постоянных Харди, изучался рядом авторов. Имеется ряд интересных результатов, но есть и много нерешенных проблем. Из множества работ, относящихся к этой тематике, укажем лишь три публикации по исследованию существования конечных констант Харди в многомерных неравенствах, а именно статьи [3, 10, 11], отражающие различные подходы к задачам и вскрывающие глубокие связи этой тематики с современным геометрическим анализом.

Пусть $\Omega$ — область в $\mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ (открытое собственное подмножество $\mathbb{R}^n$). Будем рассматривать сначала следующую постоянную Харди $c_p(s,\Omega) \in (0,\infty]$, определяемую как наименьшую из возможных положительную величину в неравенстве

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s}\,dx \leq c_p(s,\Omega) \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}}\,dx, \quad f \in C_0^1(\Omega).$$

В 1988 г. Льюис [4] сформулировал и доказал условия на $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, необходимые и достаточные для конечности постоянной Харди $c_p(p,\Omega)$ при любом заданном $p > 1$. Льюис обнаружил, что при $p > n$ неравенство автоматически выполняется для любой области, и тем самым доказал следующее утверждение, сформулированное в [4] в качестве следствия: *если $p > n$, то постоянная $c_p(p,\Omega)$ конечна для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.* Ваннебо [12] обобщил это утверждение следующим образом: *существует число $\varepsilon > 0$, зависящее разве лишь от показателя $p$ и от размерности пространства $n$ и такое, что условия*

$$p > n, \quad s > p - \varepsilon$$

*гарантируют существование конечной постоянной $c_p(s,\Omega)$ для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.* С другой стороны, при $s = n$ существуют области, для которых соответствующая постоянная Харди равна бесконечности, например, $c_p(n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \infty$ при любом $p \geq 1$. Первым автором настоящей статьи результаты Льюиса и Ваннебо были обобщены и усилены. А именно, имеет место следующий прямой аналог одномерного неравенства Харди, доказанный в 2006 г. (см. [13], а также [14]).

*Пусть $\Omega$ — открытое собственное подмножество $\mathbb{R}^n$. Если $1 \leq p < \infty$ и $n < s < \infty$, то*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s}\,dx \leq \left(\frac{p}{s-n}\right)^p \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}}\,dx, \quad f \in C_0^1(\Omega), \tag{1}$$

*причем постоянная $p^p(s-n)^{-p}$ точная для ряда областей $\Omega$.*

Естественным является такой вопрос: существуют ли неравенства типа (1), когда $s \in (-\infty, n)$? В настоящей работе мы доказываем аналоги неравенства (1) при $s < n$ в произвольных областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$, где

$$\delta_0(\Omega) := \sup\{\delta(x, \partial\Omega) : x \in \Omega\}.$$

Ясно, что $\delta_0(\Omega) < \infty$ для любой ограниченной области, а при $n \geq 2$ существуют и неограниченные области, обладающие свойством $\delta_0(\Omega) < \infty$.

Приведем формулировку основного результата: *для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с конечным внутренним радиусом $\delta_0 = \delta_0(\Omega)$ и любого $s \in (-\infty, n)$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|}{\delta^s} dx \leq \frac{\delta_0^{n-s}}{n-s} \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|}{\delta^{n-1}}\, dx, \quad f \in C_0^1(\Omega). \tag{2}$$

Кроме того, докажем несколько новых неравенств типа Харди, близких к (2).

Настоящая статья устроена следующим образом. В п. 2 даем единообразный вывод аналогов неравенства Харди типа (2) для конечных интервалов, эти неравенства будут нужны при выводе (2) и его обобщений при $n \geq 2$. В п. 3 доказано неравенство (2) и как следствие получены его $L^p$-версии. В п. 4 рассмотрен случай выпуклых областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

## 2. Одномерные неравенства типа Харди

В этом пункте получим одномерные неравенства типа (2) с заменой $n = 1$ параметром $\nu \geq 1$. Вид одномерных неравенств и подбор параметров продиктован методом, применяемым в дальнейшем для доказательства многомерных неравенств типа Харди. Нам понадобится постоянная

$$M(\sigma,\nu) := \begin{cases} (1-\sigma)^{-1}, & \text{если } \nu = 1, \\ (\nu-1)^{-1}\, e^{-1}, & \text{если } \sigma = 1, \\ (\nu-\sigma)^{-1}((\nu-1)/(\nu-\sigma))^{(\nu-1)/(1-\sigma)}, & \text{если } \nu \neq 1,\ \sigma \neq 1, \end{cases}$$

определенная для допустимых значений числовых параметров $\nu \geq 1$, $\sigma < \nu$.

**Теорема 1.** *Пусть $0 < b - a < \infty$, $\delta(x) = \min\{x - a, b - x\}$, функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет граничным условиям $f(a) = f(b) = 0$. Если $\nu \in [1, \infty)$, $\sigma \in (-\infty, \nu)$, $f \not\equiv 0$ и $f'/\delta(x)^{\nu-1} \in L^1(a, b)$, то справедливо строгое неравенство*

$$\int\limits_a^b \frac{|f(x)|}{\delta(x)^\sigma}\, dx < M(\sigma,\nu)\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\nu-\sigma} \int\limits_a^b \frac{|f'(x)|}{\delta(x)^{\nu-1}}\, dx, \tag{3}$$

*причем для всех отрезков $[a, b]$ и всех допустимых значений параметров $\sigma$ и $\nu$ постоянная $M(\sigma,\nu)$ точная, т. е. не может быть уменьшена без дополнительных ограничений на функцию $f$.*

Для доказательства этой теоремы нужна

**Лемма 1.** *Пусть $\rho > 0$, функция $g : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет граничному условию $g(0) = 0$. Если $\nu \in [1, \infty)$, $\sigma \in (-\infty, \nu)$, $g \not\equiv 0$ и $g'/t^{\nu-1} \in L^1(0, 1)$, то справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^\rho \frac{|g(t)|}{t^\sigma}\, dt < M(\sigma,\nu)\rho^{\nu-\sigma} \int\limits_0^\rho \frac{|g'(t)|}{t^{\nu-1}}\, dt, \tag{4}$$

*причем для всех допустимых $\sigma$ и $\nu$ постоянная $M(\sigma,\nu)$ точная, т. е. не может быть уменьшена без дополнительных ограничений на функцию $g$.*

Доказательство леммы 1. Достаточно рассмотреть случай $\rho = 1$, так как общий случай можно получить из этого линейной заменой переменной интегрирования.

Итак, пусть $\rho = 1$. Пользуясь неравенством $|g(t)| \le \int\limits_0^t |g'(x)|\,dx$ и меняя порядок интегрирования в повторных интегралах, получаем

$$\int\limits_0^1 \frac{|g(t)|}{t^\sigma}\,dt \le \int\limits_0^1 \frac{dt}{t^\sigma}\int\limits_0^t |g'(x)|\,dx = \int\limits_0^1 |g'(x)| \int\limits_x^1 \frac{dt}{t^\sigma}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{|g'(x)|}{x^{\nu-1}} T_{\sigma,\nu}(x)\,dx, \tag{5}$$

где

$$T_{\sigma,\nu}(x) = x^{\nu-1}\int\limits_x^1 \frac{dt}{t^\sigma}.$$

Простые выкладки показывают, что неотрицательная функция $T_{\sigma,\nu}$ имеет на отрезке $[0,1]$ единственный строгий максимум, достигаемый в точке $x(\sigma,\nu) \in [0,1)$, где

$$x(\sigma,\nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma < \nu = 1,\\ \exp(1/(1-\nu)), & \text{если } \sigma = 1 < \nu,\\ ((\nu-1)/(\nu-\sigma))^{1/(1-\sigma)}, & \text{если } \sigma \ne 1 < \nu, \end{cases}$$

причем

$$T_{\sigma,\nu}(x(\sigma,\nu)) = M(\sigma,\nu).$$

Поэтому из (5) следует доказываемое строгое неравенство (4) при $\rho = 1$ с учетом того, что $T_{\sigma,\nu}(x) < M(\sigma,\nu)$ для любого $x \in [0,1]$, $x \ne x(\sigma,\nu)$.

Покажем точность постоянной $M(\sigma,\nu)$ в неравенстве (4). Сначала рассмотрим случай $\sigma \ne 1$, $\nu \ne 1$. Имеем

$$t_0 := x(\sigma,\nu) = \left(\frac{\nu-1}{\nu-\sigma}\right)^{1/(1-\sigma)} \in (0,1).$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1-t_0)$. Рассмотрим однопараметрическое семейство функций

$$g_\varepsilon(t) := \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le t \le t_0,\\ t - t_0, & \text{если } t_0 < t \le t_0 + \varepsilon,\\ \varepsilon, & \text{если } t_0 + \varepsilon < t \le 1. \end{cases}$$

Непосредственными вычислениями получаем

$$X_\varepsilon(\sigma,\nu) := \int\limits_0^1 \frac{|g_\varepsilon(t)|}{t^\sigma}\,dt = \varepsilon\frac{1-t_0^{1-\sigma}}{1-\sigma} + O(\varepsilon^2),$$

$$Y_\varepsilon(\sigma,\nu) := \int\limits_0^1 \frac{|g'_\varepsilon(t)|}{t^{\nu-1}}\,dt = \varepsilon t_0^{1-\nu} + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{X_\varepsilon(\sigma,\nu)}{Y_\varepsilon(\sigma,\nu)} = t_0^{\nu-1}\frac{1-t_0^{1-\sigma}}{1-\sigma} + O(\varepsilon) = M(\sigma,\nu) + O(\varepsilon).$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ следует утверждение леммы о точности константы в неравенстве (4) в случае $\sigma \ne 1$, $\nu \ne 1$.

Если $\sigma = 1$, то $t_0 := x(1,\nu) = \exp(1/(1-\nu))$ также лежит в интервале $(0,1)$. Пользуясь тем же семейством функций $g_\varepsilon$, получаем

$$\frac{X_\varepsilon(1,\nu)}{Y_\varepsilon(1,\nu)} = t_0^{\nu-1}\ln\frac{1}{t_0} + O(\varepsilon) = M(1,\nu) + O(\varepsilon).$$

Если же $\sigma < 1 = \nu$, то $t_0 := x(\sigma, 1) = 0$. Семейство функций $g_\varepsilon(t) = t^\varepsilon$, $0 \le t \le 1$, приводит к соотношениям

$$Y_\varepsilon(\sigma, 1) = 1, \quad \frac{X_\varepsilon(\sigma, 1)}{Y_\varepsilon(\sigma, 1)} = \frac{1}{1 + \varepsilon - \sigma} \to M(\sigma, 1) \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Этим и завершается доказательство леммы 1.

Доказательство теоремы 1. Применяя лемму 1 с $\rho = (b-a)/2$ к двум функциям, определяемым равенствами $g(t) = f(t+a)$ и $g(t) = f(b-t)$, получаем

$$\int\limits_a^{(a+b)/2} \frac{|f(x)|}{(x-a)^\sigma}\,dx < M(\sigma,\nu)\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\nu-\sigma} \int\limits_a^{(a+b)/2} \frac{|f'(x)|}{(x-a)^{\nu-1}}\,dx,$$

$$\int\limits_{(a+b)/2}^{b} \frac{|f(x)|}{(b-x)^\sigma}\,dx < M(\sigma,\nu)\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\nu-\sigma} \int\limits_{(a+b)/2}^{b} \frac{|f'(x)|}{(b-x)^{\nu-1}}\,dx.$$

Сложение этих двух неравенств дает (3). Точность константы в (3) следует, очевидно, из доказательства соответствующего утверждения леммы 1 с привлечением семейства функций, определяемых соотношениями

$$f_\epsilon(x) := \begin{cases} g_\epsilon((b-a)(x-a)/2), & \text{если } a \le x \le (a+b)/2, \\ g_\epsilon((b-a)(b-x)/2), & \text{если } (a+b)/2 < x \le b. \end{cases}$$

Теорема 1 доказана.

Очевидно, что точность констант в теореме 1 сохранится, если ограничиться рассмотрением гладких функций с компактными носителями из класса $C_0^1((a,b))$. В частности, имеет место следующее утверждение, соответствующее случаю $\sigma = 1$, $\nu = 2$.

**Следствие 1.** *Справедливо неравенство*

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{|f(x)|}{1-|x|}\,dx < \frac{1}{e}\int\limits_{-1}^{1} \frac{|f'(x)|}{1-|x|}\,dx, \quad f \in C_0^1((-1,1)),\ f \not\equiv 0,$$

*где постоянная $1/e$ точная.*

## 3. Основные результаты

Как будет видно из доказательства, основным утверждением следующей теоремы является неравенство типа Харди для случая $p = 1$, которое совпадает с неравенством (2). Напомним определение внутреннего радиуса: $\delta_0(\Omega) := \sup\{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) : x \in \Omega\}$, где $\partial\Omega$ — граница $\Omega$.

**Теорема 2.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное открытое множество с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$, причем $n \ge 1$, $\delta := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Если $1 \le p < \infty$ и $-\infty < s < n$, то*

$$\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s}\,dx \le \left(\frac{p}{n-s}\right)^p \delta_0(\Omega)^{p(n-s)} \int\limits_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p+(n-s)p}}\,dx, \quad f \in C_0^1(\Omega). \tag{6}$$

Доказательство. Достаточно доказать неравенство (6) лишь для случая $p = 1$. Действительно, пусть имеет место неравенство (2), т. е. неравенство (6) для случая $p = 1$. Рассмотрим фиксированные $p \in (1, \infty)$ и $f \in C_0^1(\Omega)$. Очевидно, что $g = |f|^p \in C_0^1(\Omega)$. Применяя к функции $g \in C_0^1(\Omega)$ неравенство (2) и оценивая интеграл в правой части получаемого соотношения на основании неравенства Гёльдера с показателями $p/(p-1)$ и $p$, имеем

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s}\,dx \le \frac{\delta_0^{n-s}}{n-s} p \int\limits_{\Omega} \frac{|f|^{p-1}|\nabla f|}{\delta^{n-1}}\,dx$$
$$\le \frac{p\delta_0^{n-s}}{n-s}\biggl(\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s}\,dx\biggr)^{1-1/p}\biggl(\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p+(n-s)p}}\,dx\biggr)^{1/p}.$$

Отсюда элементарными преобразованиями получаем (6) для выбранного $p \in (1, \infty)$.

Далее, для $n = 1$ случай $p = 1$ теоремы 2 является следствием теоремы 1. Действительно, открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ является конечным или счетным объединением взаимно не пересекающихся интервалов вида $(a_m, b_m)$, полудлины которых не превосходят $\delta_0(\Omega)$. На основании теоремы 1 для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ справедливы неравенства

$$\int\limits_{a_m}^{b_m} \frac{|f(x)|}{\delta^s}\,dx \le M(s,1)\biggl(\frac{b_m - a_m}{2}\biggr)^{1-s}\int\limits_{a_m}^{b_m} |f'(x)|\,dx \le \frac{\delta_0(\Omega)^{1-s}}{1-s}\int\limits_{a_m}^{b_m} |f'(x)|\,dx.$$

Суммируя по $m$, получаем требуемое неравенство.

Понятно, что и для $n \ge 2$ неравенство (2) достаточно установить при предположении, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое связное множество, т. е. область в $\mathbb{R}^n$.

Таким образом, остается доказать неравенство теоремы 2 в предположениях, что $p = 1$, $n \ge 2$ и $\Omega$ является областью в $\mathbb{R}^n$ с конечным внутренним радиусом $\delta_0 = \delta_0(\Omega)$. В этом случае доказательство будет состоять из трех нетривиальных этапов, применяемых к фиксированной функции $f \in C_0^1(\Omega)$. Отметим, что на первых двух этапах, связанных со специальными аппроксимациями и разбиениями области интегрирования, существенно используется метод, разработанный в [13, 14] для доказательства неравенства (1) и некоторых его обобщений.

Первый этап состоит в следующем: покажем, что достаточно ограничиться рассмотрением областей специального вида, составленных из кубиков (квадратиков в двумерном случае) одинаковых размеров с ребрами, параллельными осям координат. Для обоснования этого факта рассмотрим аппроксимирующую последовательность областей $\Omega_m$ таких, что $\operatorname{supp} f \subset \Omega_1$, где $\operatorname{supp} f$ — компактный носитель выбранной функции $f \in C_0^1(\Omega)$, $\overline{\Omega}_m \subset \Omega_{m+1}$ при любом натуральном $m$ и $\Omega = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \Omega_m$. Имеем $\delta_0(\Omega_m) \le \delta_0(\Omega)$, кроме того, $\delta_m := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega_m) < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega_{m+1}) < \delta = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ для любого натурального числа $m$ и

$$\lim_{m\to\infty} \delta_0(\Omega_m) = \lim_{m\to\infty} \delta_0(\Omega), \quad \lim_{m\to\infty} \operatorname{dist}(x, \partial\Omega_m) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega), \quad x \in \operatorname{supp} f.$$

Поэтому

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega_m} \frac{|f|}{\delta_m^s}\,dx = \int\limits_{\Omega} \frac{|f|}{\delta^s}\,dx, \quad \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega_m} \frac{|\nabla f|}{\delta_m^{n-1}}\,dx = \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|}{\delta^{n-1}}\,dx.$$

Отметим, что область интегрирования у всех выписанных интегралов фактически одинакова, именно компакт $\operatorname{supp} f$, а справедливость предельных переходов под знаком интеграла следует, например, из теоремы Лебега о мажорированной сходимости.

Очевидно, что искомое неравенство для области $\Omega$ выполнится, если оно справедливо для $\Omega_m$ при любом натуральном $m$. Подходящие для наших целей области $\Omega_m$ будем строить следующим образом. Возьмем число $\varepsilon \in (0,1)$, настолько малое, что расстояние от $\operatorname{supp} f$ до границы области $\Omega$ больше, чем $\varepsilon\sqrt{n}$, и расстояние от начала координат до любой точки из множества $\operatorname{supp} f$ меньше, чем $1/\varepsilon$. Рассмотрим стандартное покрытие $\mathbb{R}^n$ кубиками $Q_{\varepsilon,w} = [0,\varepsilon]^n + \varepsilon w$, $w \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Определим конечное множество индексов

$$\mathbb{Z}^n(\Omega,\varepsilon) = \{w \in \mathbb{Z}^n : Q_{\varepsilon,w} \subset \Omega \cap \{v \in \mathbb{R}^n : |v| < 1/\varepsilon\}\}$$

и следующую аппроксимацию $\Omega$: $\Omega(\varepsilon) = \operatorname{int} \bigcup_{w\in\mathbb{Z}^n(\Omega,\varepsilon)} Q_{\varepsilon,w} \subset \Omega$. Полагаем $\Omega_m = \Omega(\varepsilon/m)$ для любого натурального $m$. Таким образом, достаточно доказать неравенство (2) для любой области, составленной из кубиков. Без ограничения общности можно считать, что длины ребер кубиков равны единице, так как общий случай получится из этого линейной заменой переменных вида $y = \varepsilon x/m$.

На втором этапе, следуя [13, 14], рассмотрим специальное разбиение замыкания области $\Omega(1)$, замощенного единичными кубиками. Пусть $S$ — $(n-k)$-мерная грань некоторого кубика $Q_{1,w_j} \subset \overline{\Omega(1)}$, причем $S \subset \partial\Omega(1)$. Для каждой такой грани определим множество

$$K(S) = \{x \in \overline{\Omega(1)} : \text{существует точка } y \in S \text{ такая, что } \delta(x,\partial\Omega(1)) = |x-y|\}.$$

Очевидно, что $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, кроме того, $\overline{\Omega(1)} = \bigcup K(S)$, где объединение берется по всем кубическим граням $S \subset \partial\Omega(1)$, и для любой функции $g \in C(\overline{\Omega}(1))$

$$\int\limits_{\Omega(1)} g(x)\,dx = \sum_{S\subset\partial\Omega(1)} \int\limits_{K(S)} g(x)\,dx. \qquad (7)$$

Предположим, что $f \in C_0^1(\Omega(1))$, $s < n$, и воспользуемся формулой (7) для функции $g(x) = |f(x)|/\delta^s$, где $\delta$ — расстояние от точки $x \in \Omega(1)$ до границы области $\Omega(1)$.

На этапе 3 докажем неравенства вида (2) для каждого множества $K(S) \neq \varnothing$ в отдельности и затем просуммируем. На основании (7) получим требуемое неравенство (2).

Как показано в [13, 14], при вычислении интегралов по множеству $K(S)$ целесообразно ввести новую систему координат заменой переменных вида $x' = A(x - x_0)$, $x_0 \in S$, причем в новой системе координат расстояние $\delta = \delta(x', \Omega(1))$ становится одной из переменных интегрирования $r = \delta$, если пользоваться либо декартовыми, либо цилиндрическими, либо сферическими координатами. А именно, интегралы по множеству $K(S)$ после перехода к соответствующим повторным интегралам в новой системе координат можно представить одной из следующих формул, содержащих непрерывные функции $\varphi_{n-k}(y,\omega) = \varphi_{n-k}(y,\omega; S, \Omega_1) \in [0, \delta_0(\Omega(1))$ и $r = \delta$:

(i) если $\dim S = n-1$, то

$$\int\limits_{K(S)} g(x)\,dx = \int\limits_{S} dy \int\limits_{0}^{\varphi_{n-1}(y,\omega_0)} g(y+r\omega_0)\,dr, \tag{8}$$

(ii) если $\dim S = n-k$ и $2 \le k \le n-1$, то

$$\int\limits_{K(S)} g(x)\,dx = \int\limits_{S} dy \int\limits_{S_+^k} d\omega \int\limits_{0}^{\varphi_{n-k}(y,\omega)} g(y+r\omega)r^{k-1}\,dr, \tag{9}$$

(iii) если $\dim S = 0$, то

$$\int\limits_{K(S)} g(x)\,dx = \int\limits_{S_+^n} d\omega \int\limits_{0}^{\varphi_0(x_0,\omega)} g(y+r\omega)r^{n-1}\,dr, \tag{10}$$

где $\mathbb{R}_+^k = \{(t_1,\dots,t_k) \in \mathbb{R}^k : t_1 \ge 0,\ \dots,\ t_k \ge 0\}$ и $S_+^k = \big\{t \in \mathbb{R}_+^k : |t| = 1\big\}$. Полагая $g(x) = f(x)/r^\sigma$, применим к внутренним интегралам в (8)–(10) лемму 1 при $\sigma = s-k+1$, $\nu = n-k+1$ с соответствующим $k = 1,2,\dots,n$. С учетом неравенств

$$M(\sigma,\nu) \le \frac{1}{\nu-\sigma}, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial r}\right| \le |\nabla f|, \quad 0 \le \varphi_{n-k}(y,\omega) = \varphi_{n-k}(y,\omega;S,\Omega_1) \le \delta_0(\Omega(1))$$

получаем

$$\int\limits_{K(S)} \frac{|f|}{\delta^s}\,dx \le \frac{\delta_0(\Omega(1))^{n-s}}{n-s} \int\limits_{K(S)} \frac{|\nabla f|}{\delta^{n-1}}\,dx,$$

что и требовалось доказать. Тем самым неравенства (2) и (6) обоснованы.

Вопрос о точности постоянной $p^p(n-s)^{-p}$ в неравенстве (6) при $n \ge 2$ остается открытым.

Можно получить более общую, чем (6), $L^p$-версию неравенств (2). Действительно, имеет место (см. [14, 15])

**Лемма 2.** *Предположим, что $\Omega$ — область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, $w_1 = w_1(x) > 0$, $w_2 = w_2(x) \ge 0$ на $\Omega$ и функция $w_1[w_2/w_1]^l$ локально интегрируема в $\Omega$ для любого $l \in [1,p]$. Если $J : C_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ — некоторый функционал и для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$J(f) + \int\limits_{\Omega} |f| w_1\,dx \le c \int\limits_{\Omega} |\nabla f| w_2\,dx, \quad c = \mathrm{const} > 0,$$

*то для любых $p \in (1,\infty)$, $l \in [1,p]$ и для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$*

$$lJ(|f|^p) + \int\limits_{\Omega} |f|^p w_1\,dx \le (cp)^l \int\limits_{\Omega} |f|^{p-l} |\nabla f|^l w_1^{1-l} w_2^l\,dx.$$

Применение леммы 2 к неравенству (2) приводит к следующему утверждению.

**Теорема 3.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное открытое множество, причем $\delta_0(\Omega) < \infty$, и пусть $p \in [1,+\infty)$ и $l \in [1,p]$. Тогда для любого $s \in (-\infty,n)$ и для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s}\,dx \le \left(\frac{p\delta_0^{n-s}}{n-s}\right)^l \int\limits_{\Omega} \frac{|f|^{p-l}|\nabla f|^l}{\delta^{s+l(n-1-s)}}\,dx.$$

## 4. Случай выпуклых областей

Отметим, что по неравенствам типа Харди в выпуклых областях имеется обширная литература (см., например, [16–19] и библиографию в них). Здесь ограничимся лишь приведением одного утверждения, доказательство которого проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.

Из результатов Хадвигера [20] следует, что для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ существует аппроксимирующая последовательность $\Omega_m \subset \Omega$, где $\Omega_m$ — выпуклые многогранники. Поэтому если следовать схеме рассуждений при доказательстве теоремы 2, но в качестве $\Omega_m$ взять выпуклые многогранники, то множества $K(S)$ будут иметь ненулевую ($n$-мерную) меру только для $(n-1)$-мерных граней $S \subset \Omega_m$. Тем самым для $K(S)$ возникают лишь интегралы вида (8). Это позволяет (см. [14]) напрямую перенести одномерные интегральные неравенства типа Харди на случай выпуклых областей. А именно, применение леммы 1 при такой схеме доказательства приводит к следующему утверждению.

**Теорема 4.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, компоненты которого являются выпуклыми множествами, с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$, и пусть $\delta := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Если $1 \le p < \infty$ и $-\infty < s < 1$, то*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s}\,dx \le \left(\frac{p}{1-s}\right)^p \delta_0(\Omega)^{p(1-s)} \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-sp}}\,dx, \quad f \in C_0^1(\Omega). \tag{11}$$

Покажем точность константы в неравенстве (11) при $p = 1$. Будем использовать метод математической индукции по параметру размерности $n$ (см. [18, 19]).

Пусть $\Omega_1 = (0,2)$, $\Omega_n = (0,2) \times \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. Рассмотрим функционал

$$K_n(f) = \int\limits_{\Omega_n} |\nabla f|\,dx - (1 - s + \varepsilon_0) \int\limits_{\Omega_n} \frac{|f|}{\delta^s}\,dx,$$

где $\varepsilon_0$ — произвольное (но фиксированное) положительное число. Поскольку $\delta_0(\Omega_n) = 1$, для обоснования точности постоянной в (11) при $p = 1$ достаточно доказать, что существует функция $f_n$, для которой величина $K_n(f_n)$ отрицательна. В дальнейшем потребуется функция $\zeta_\varepsilon \in C_0^1(\mathbb{R})$, определенная следующим образом:

$$\zeta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/\varepsilon], \\ (1 - (t - 1/\varepsilon)^2)^2, & t \in (1/\varepsilon, 1 + 1/\varepsilon), \\ 0, & t \in [1 + 1/\varepsilon, +\infty), \end{cases}$$

и $\zeta_\varepsilon(t) = \zeta_\varepsilon(-t)$, $t < 0$. Кроме того, рассмотрим функцию $f_{n+1} := f_{n+1,\varepsilon} \in C_0^1(\Omega_{n+1})$, которая определяется как произведение

$$f_{n+1,\varepsilon} = f_n(x')\zeta_\varepsilon(x_{n+1}),$$

где $x = (x', x_{n+1})$, $x' \in \Omega_n$ и $x_{n+1} \in \mathbb{R}$.

Перейдем непосредственно к доказательству требуемого утверждения методом математической индукции. В одномерном случае, т. е. при $n = 1$, точность следует из утверждения леммы 1. Предположим, что существует функция $f_n \in C_0^1(\Omega_n)$, для которой $K_n(f_n) < 0$ при некотором $n > 1$. Покажем, что величина $K_{n+1}(f_{n+1})$ также отрицательна при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Элементарные вычисления с учетом того, что

$$\delta = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega_{n+1}) = \operatorname{dist}(x', \partial\Omega_n)$$

и $\zeta(t) = (1-t^2)^2$, дают

$$K_{n+1}(f_{n+1,\varepsilon}) = \int\limits_{\Omega_{n+1}} |\nabla f_{n+1,\varepsilon}(x)|\,dx - (1-s+\varepsilon_0) \int\limits_{\Omega_{n+1}} \frac{|f_{n+1,\varepsilon}(x)|}{\delta^s}\,dx$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\Omega_n} |\nabla f_n(x')|\zeta_\varepsilon(t) + |f_n(x')|\zeta'_\varepsilon(t)\,dx'dt - (1-s+\varepsilon_0) \int\limits_{\mathbb{R}} \zeta_\varepsilon(t)\,dt \int\limits_{\Omega_n} \frac{|f_n(x')|}{\delta^s}\,dx'$$

$$= \frac{2}{\varepsilon} K_n(f_n) + L_n(f_n) - M_n(f_n),$$

где

$$L_n(f_n) = \int\limits_0^1 dt \int\limits_{\Omega_n} |\nabla f_n(x')|\zeta(t) + f_n(x')\zeta'(t)\,dx',$$

$$M_n(f_n) = (1-s+\varepsilon_0) \int\limits_0^1 \zeta(t)\,dt \int\limits_{\Omega_n} \frac{|f_n(x')|}{\delta^s}\,dx'.$$

Значения $L_n(f_n)$ и $M_n(f_n)$ не зависят от $\varepsilon$, а $K_n(f_n) < 0$ по предположению индукции. Ясно, что $K_{n+1}(f_{n+1}) < 0$ для достаточно малых значений $\varepsilon > 0$, что и требовалось доказать.

По-видимому, константы в неравенстве (11) при $p > 1$ не точны. При $p = 2$ неравенство (11) по форме совпадает с неравенством теоремы 1 из статьи [19], причем цитированное неравенство из [19] в наших обозначениях имеет точную константу, равную $4\delta_0^{2(1-s)}/(\pi(1-s))^2$. Легко заметить, что константа из неравенства (11) при $p = 2$ и точная константа из [19] в общем случае имеют различные значения.

Понятно, что при $s = 1$ неравенство (11) теряет смысл. Этот недостаток можно исправить с помощью логарифмического веса (см. [8, 14, 15, 21–23]). Справедлива

**Теорема 5.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, компоненты которого являются выпуклыми множествами, с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$, и пусть $\delta := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Если $1 \le p < \infty$, то*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta}\,dx \le p^p \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{1-p}} \left(\ln \frac{\delta_0}{\delta}\right)^p dx, \quad f \in C_0^1(\Omega). \tag{12}$$

Для доказательства теоремы 5 понадобится

**Лемма 3.** *Пусть $\rho > 0$, функция $g : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет граничному условию $g(0) = 0$. Если $\beta \ge 0$, $\alpha \le \beta$, $g \not\equiv 0$ и $g' \ln t/t^\beta \in L^1(0, \rho)$, то справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^\rho \frac{|g(t)|}{t^{\alpha+1}}\,dt < \rho^{\beta-\alpha} \int\limits_0^\rho \frac{|g'(t)|}{t^\beta} \ln \frac{\rho}{t}\,dt.$$

Доказательство леммы 3. Проделаем следующие элементарные выкладки:

$$\int_0^\rho \frac{|g(t)|}{t^{\alpha+1}}\,dt \le \int_0^\rho \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \int_0^t |g'(x)|\,dx = \int_0^\rho |g'(x)| \int_x^\rho \frac{dt}{t^{\alpha+1}}\,dx = \int_0^\rho \frac{|g'(x)|}{x^\alpha} T(x)\,dx,$$

где

$$T(x) = x^\alpha \int_x^\rho \frac{dt}{t^{\alpha+1}} = \int_1^{\rho/x} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}.$$

Далее оценим $T(x)$.

Рассмотрим два случая: $\alpha < 0$ и $\alpha \ge 0$. Воспользовавшись тем, что $\frac{x}{\rho} \le 1$ и $\beta - \alpha \ge 0$, при $\alpha < 0$ получим

$$T(x) \le \int_1^{\rho/x} \frac{t^{-\alpha}dt}{t} \le \left(\frac{\rho}{x}\right)^{-\alpha} \int_1^{\rho/x} \frac{dt}{t} \le \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\beta-\alpha} \ln\frac{\rho}{x},$$

а при $\alpha \ge 0$ имеем

$$T(x) \le \int_1^{\rho/x} \frac{1}{t^\alpha}\frac{1}{t}\,dt \le \int_1^{\rho/x} \frac{dt}{t} = \ln\frac{\rho}{x} \le \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\beta-\alpha} \ln\frac{\rho}{x}.$$

Несложно заметить, что из двух вышеприведенных оценок $T(x)$ вытекает, что

$$T(x) \le \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\beta-\alpha} \ln\frac{\rho}{x}$$

при произвольном $\alpha \le \beta$.

Отсюда следует утверждение леммы.

Используем лемму 3 при $\alpha = \beta = 0$ и вышеприведенные рассуждения для распространения одномерного неравенства на многомерный случай и получим утверждение теоремы.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G.* Inequalities. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1973.
2. *Maz'ya V. G.* Sobolev spaces. Berlin; New York: Springer-Verl., 1985.
3. *Ancona A.* On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in $\mathbb{R}^n$ // J. London Math. Soc. 1986. V. 37, N 2. P. 274–290.
4. *Lewis J. L.* Uniformly fat sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. V. 308, N 1. P. 177–196.
5. *Opic V., Kufner A.* Hardy-type inequalities. Harlow: Longman, 1990. (Pitman Res. Notes Math.; V. 219).
6. *Laptev A., Weidl T.* Hardy inequalities for magnetic Dirichlet forms // Oper. Theory, Adv. Appl. 1999. V. 108. P. 299–305.
7. *Balinsky A., Laptev A., Sobolev A. V.* Generalized Hardy inequality for the magnetic Dirichlet forms // J. Stat. Phys. 2004. V. 116. P. 507–521.
8. *Дубинский Ю. А.* Об одном неравенстве типа Харди и его приложениях // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2010. Т. 269. С. 112–132.
9. *Adimurthi, Chaudhuri N., Ramaswamy M.* An improved Hardy–Sobolev inequality and its application // Proc. Amer. Math. Soc. 2002. V. 130. P. 489–505.

**10.** *Davies E. B.* A review of Hardy inequalities // The Maz'ya anniversary collection; V. 2. Oper. Theory Adv. Appl. Basel: Birkhäuser, 1999. V. 110. P. 55–67.
**11.** *Miklyukov V. M., Vuorinen M. R.* Hardy's inequality for $W_0^{1,p}$-functions on Riemannian manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. V. 127, N 9. P. 2745–2754.
**12.** *Wannebo A.* Hardy inequalities // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 109, N 1. P. 85–95.
**13.** *Avkhadiev F. G.* Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants // Lobachevskii J. Math. 2006. V. 21. P. 3–31. (http://ljm.ksu.ru).
**14.** *Авхадиев Ф. Г.* Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2006. Т. 255. С. 8–18.
**15.** *Авхадиев Ф. Г., Насибуллин Р. Г., Шафигуллин И. К.* Неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими весами в областях евклидова пространства // Изв. вузов. Математика. 2011. № 9. С. 90–94.
**16.** *Hoffmann-Ostenhof M., Hoffmann-Ostenhof T., Laptev A.* A geometrical version of Hardy's inequality // J. Funct. Anal. 2002. V. 189, N 2. P. 539–548.
**17.** *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Weighted Hardy inequalities with sharp constants // Lobachevskii J. Math. 2010. V. 31, N 1. P. 1–7.
**18.** *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains // Z. Angew. Math. Mech. 2007. V. 87, N 8–9. P. 632–642.
**19.** *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2011. V. 18. P. 723–736.
**20.** *Hadwiger H.* Vorlesungen über Inhalt, Oberfläsche und Isoperimetrie. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1957.
**21.** *Del Pino M., Dolbeault J., Filippas S., Tertikas A.* A logarithmic Hardy inequality // J. Funct. Anal. 2010. V. 259. P. 2045–2072.
**22.** *Pachpatte B. G.* A note on certain inequalities related to Hardy's inequality // Indian J. Pure Appl. Math. 1992. V. 23, N 11. P. 773–776.
**23.** *Pečarić J. E., Love E. R.* Still more generalizations of Hardy's inequality // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1995. V. 59. P. 214–224.

*Статья поступила 5 октября 2012 г.*

Авхадиев Фарит Габидинович, Насибуллин Рамиль Гайсаевич
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
Farit.Avhadiev@kpfu.ru, NasibullinRamil@gmail.com